Corrigés des sujets de révisions
Applications de la réduction des matrices

I. Calcul de la puissance n^{e} d'une matrice

Exercice 1 *(Calcul d'une puissance via le binôme de Newton)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.

Exercice 2 *(Calcul d'une puissance via le binôme de Newton)*

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$.

1. Déterminer des réels x et y tels que $M = xN + yI_4$.
2. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle renvoie la matrice M :

```
def matriceM(a,b):
    return _____ * np.ones([4,4]) - _______ * np.eye(4)
```

3. Calculer N^2. Conjecturer une formule pour N^k et la démontrer par récurrence.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = (a-b)^n I_4 + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N$$

Exercice 3 *(Calcul d'une puissance via un polynôme annulateur et une division euclidienne)*

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $P(X) = X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_n et deux réels α_n et β_n tels que

$$X^n = (X^2 - 2X - 3)Q_n(X) + \alpha_n X + \beta_n$$

3. En déduire l'expression de U^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 *(Calcul d'une puissance via la diagonalisation)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.
3. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.
4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
5. (a) Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

   (b) Que représente la matrice P ? Déterminer P^{-1}.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n.

Exercice 5 *(Calcul d'une puissance via la diagonalisation)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.
3. Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

4. Calculer P^{-1}.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-3^n & 3^n - 1 \\ 1-3^n & 1 & 3^n - 1 \\ 1-3^n & 1-3^n & 2 \times 3^n - 1 \end{pmatrix}$$

II. Etudes de suites récurrentes linéaires

Exercice 6 *(Deux suites couplées)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les valeurs propres de A.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
2. En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n sous forme de tableau matriciel.
4. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = -4u_n + v_n \end{cases}$$

   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.
   (b) En déduire l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 7 *(Une suite récurrente linéaire d'ordre 3)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on donne : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître pour tout entier naturel n, le produit MX_n. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de M et leur sous-espace propre associé.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) On pose $e'_1 = (1, -2, 4)$, $e'_2 = (1, 1, 1)$ et $e'_3 = (0, 1, 2)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ est :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
5. (a) Calculer P^{-1}.
   (b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

ESSEC I 2021 - suite récurrente linéaire d'ordre $d+1$

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant éte infecté k jours plus tôt.
Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.
Finalement, les réels α_0, α_1, ..., α_d sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in]0, 1[$ et on note $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.
On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$.
On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathbb{E}(R_n)$ et on pose $r_n = \mathbb{E}(R_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :
  $$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \qquad (*)$$
- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :
  $$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$
  où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

6. Donner une justification de $(*)$.

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(I_n)$ existe. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n \, \mathbb{E}(I_n)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k \, z_{n-k} \qquad (3)$$

8. *Programmation de z_n avec **Python**.*
On suppose que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.
On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \ \cdots \ \alpha_d)$.
Écrire une fonction **Python** d'entête `def z(Delta,n) :` qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ. Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `len(Delta)` qui donne le nombre d'éléments de `Delta`.

9. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

- On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir, pour tout $p \geqslant d$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\,[Z_n = 0]\,) = 1$.

d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

11. a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z_{n+1} = 0]\,) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right)$$

b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x reel, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout réel x, on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x.
Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in\,]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\, \alpha \leqslant \rho$.
On note (H_1) cette hypothese.

a) Que vaut $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in\,]0, 1[$ tel que $\theta^{d+1} \geqslant \rho \left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, \theta^{d-k}\right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

- On pose $M = \max\limits_{k\in[\![N, N+d]\!]} \dfrac{z_k}{\theta^k}$.

b) Démontrer, pour tout $n \geqslant N$: $z_n \leqslant M\, \theta^n$.

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\, \alpha \geqslant \rho$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions ***13.*** à ***16.*** , que **la suite** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est constante de valeur** $\dfrac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.
  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

13. ***a)*** Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_d \end{pmatrix}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A\,U_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n\,U_0$ puis que $z_{n+1} = L\,A^n\,U_0$.

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal a 1.

c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1\,V_1 + s_2\,V_2 + s_3\,V_3$.

d) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s_1.

15. On revient au cas général.

a) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\,\lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.

c) Établir que $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

16. On pose pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $b_k = \sum\limits_{i=k}^{d} a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathscr{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum\limits_{k=0}^{d} b_k\,w_k = 0$.

a) Démontrer, pour tout $W \in H$: $A\,W \in H$.

b) Déterminer l'unique réel s tel que : $U_0 - s\,V \in H$.

c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $L\,A^n\,W \to 0$ quand $n \to +\infty$.
En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = s$.

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?

III. Etudes de systèmes différentiels linéaires

Exercice 8 On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et le système différentiel linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & x(t) & + & y(t) & - & z(t) \\ y'(t) & = & & & 2y(t) & - & 2z(t) \\ z'(t) & = & & & & & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ de sorte que

$$X \text{ est solution de } (S) \iff X' = TX$$

On suppose que X est solution de (S).

1. Montrer qu'il existe une constante $C_3 \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = C_3 \mathrm{e}^{3t}$.

2. Montrer qu'il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = C_2 \mathrm{e}^{2t} - 2C_3 \mathrm{e}^{3t}$.

3. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $x(t)$ similaire aux expressions précédentes, faisant intervenir une nouvelle constante $C_1 \in \mathbb{R}$.

4. Expliciter trois vecteurs colonnes U_1, U_2, U_3 tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = C_1 U_1 \mathrm{e}^{t} + C_2 U_2 \mathrm{e}^{2t} + C_3 U_3 \mathrm{e}^{3t}$$

5. Que peut-on dire des trois vecteurs U_1, U_2, U_3 vis-à-vis de la matrice T ? Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 9 `(DS 5 2022-2023)` On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) On compile le code **Python** suivant :

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

2. a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

8. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$, où A est la matrice étudiée dans la partie I.

9. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

10. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S). On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

11. Montrer que les solutions de (S) sont de la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera X_1.

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

b) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera X_2.

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

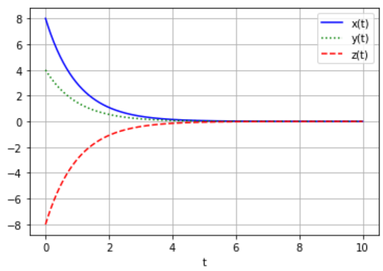

FIG. 1 Tracé 1

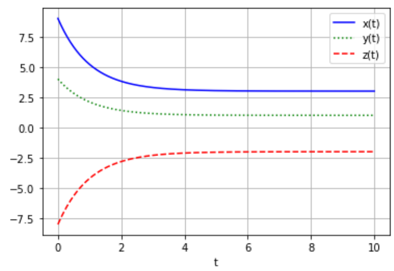

FIG. 2 Tracé 2

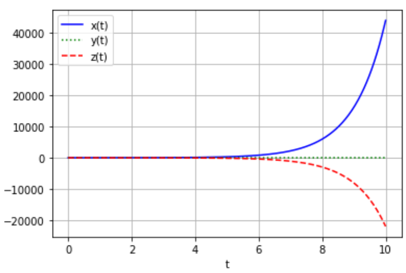

FIG. 3 Tracé 3

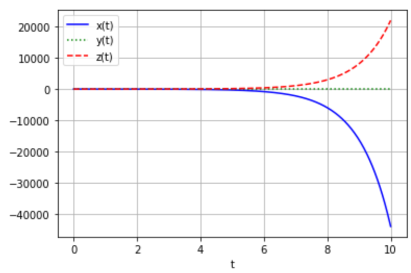

FIG. 4 Tracé 4

Exercice 10 `(DS 6 2022-2023)` On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}. On pose $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Expliciter $\mathrm{Sp}(T)$. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

On considère maintenant les systèmes différentiels linéaires suivants :

$$(S_A) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) & + & x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & & \\ x_3'(t) & = & & & x_2(t) & + & x_3(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_T) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & + & y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & & 2y_2(t) & + & y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

3. Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

4. Soit $Y = P^{-1}X$. On note alors, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si Y est solution de (S_T).

5. ***a)*** Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto at\mathrm{e}^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + a\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_2)$$

c) Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + bt\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

6. On fixe Y une solution de (S_T).

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3(t) = y_3(0)\mathrm{e}^{2t}$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$.

c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $y_1(t)$ similaire aux expressions précédentes.

7. On fixe X une solution de (S_A).

a) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) & = (\lambda_2 + \lambda_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) & = \left((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \\ x_3(t) & = \left((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

b) Montrer que si la trajectoire associée à X est convergente, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Interpréter.

IV. Etudes de chaînes de Markov

EML 2022 sujet 0

Etude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan A, B et C. Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.

— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

— A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n » et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$,

— B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et $q_n = \mathbb{P}(B_n)$,

— C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n » et $r_n = \mathbb{P}(C_n)$,

— $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ le n^{e} état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

2. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0, ainsi que p_1, q_1, r_1.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n = V_0 M^n$.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Calculer $A^2 - 5A$. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
   (c) Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On calculera la matrice P^{-1}.
   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que : $M^n = \dfrac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question 1.
   (b) Démontrer que $p_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n.
6. Déterminer les limites respectives des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

   (a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots X_n$. Quelle est la signification de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$?

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n.

8. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.
   Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.

   (a) Calculer $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n.

   (c) Démontrer que $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$. En déduire que $\mathbb{P}_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}(B_3) = \dfrac{1}{4}$.

   Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $\mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([T_B = k])$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([T_B = 0])$.

   (e) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

AgroParisTech 2021 - chaîne de Markov à $2N+1$ états

Partie I : modèle d'évolution de Wright-Fisher

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $[\![0, 2N]\!]$ et on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, 2N]\!]$ vérifiant, pour tout entier n,

$$\forall (i,j) \in [\![0, 2N]\!]^2,\ \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j]) = \binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1-\frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

Pour un variant génétique biallélique (dont les allèles sont notés A et a) et dans le cadre du modèle de Wright-Fisher, X_n représente le nombre d'allèles de type A à la génération n dans une population finie de taille N.

Etude d'un cas particulier

On suppose ici que $N = 1$ et on note, pour tout entier n, $V_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}([X_n=0]) & \mathbb{P}([X_n=1]) & \mathbb{P}([X_n=2])\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout entier n, on ait $V_{n+1} = V_n M$.

Démonstration. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

2. Prouver que M est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.

Démonstration. On trouve que :

- $\mathrm{Sp}(M) = \{\frac{1}{2}, 1\}$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(M)$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{\frac{1}{2}}(M)$.
- La matrice M est donc diagonalisable et $M = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

3. Calculer M^n pour tout entier n.

Démonstration. On commence par calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

4. En déduire que :

a) pour tout entier n, on a $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.

Démonstration. Commencer par démontrer par récurrence (immédiate) que, pour tout entier n, on a $V_n = V_0 M^n$. Ainsi, on a accès à la loi de X_n en fonction de celle de X_0. On utilise ensuite la formule de l'espérance pour une variable aléatoire discrète finie à valeurs dans $[\![0, 2]\!]$. □

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n \in \{0, 2\}]) = 1$

Démonstration. On note $V_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) = [V_0 M^n]_2 = \frac{\beta}{2^n}$$

On passe au complémentaire et on obtient :

$$\mathbb{P}([X_n \in \{0, 2\}]) = 1 - \frac{\beta}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

□

Cas général

On suppose désormais que $N \geqslant 1$. On cherche à généraliser les résultats de la question *4*.

5. a) Soit $i \in [\![0, 2N]\!]$. Donner une interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{2N} j \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

et en déduire sa valeur.

Démonstration. On reconnait l'espérance d'une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2N, \frac{i}{2N}\right)$. D'où :

$$\boxed{S_i = 2N \frac{i}{2N} = i}$$

□

b) En déduire que pour tout entier n, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration. Indication : utiliser la FPT et inverser l'ordre de sommation. □

c) Interpréter le résultat obtenu.

Démonstration. Le nombre d'allèles de type A ne change pas en moyenne. □

6. On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \mathbb{P}([X_n \in \{0, 2N\}])$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, 2N-1]\!]$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}]) \geqslant 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que $[X_{n+1} \in \{0, 2N\}] = [X_{n+1} = 0] \cup [X_{n+1} = 2N]$.
Par incompatibilité : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}]) = \mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 2N])$.

- $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 0]) \geqslant \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$ car $k \leqslant 2N - 1$
- $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 2N]) \geqslant \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$ car $k \geqslant 1$

□

b) En déduire que, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n + 2(1-u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.

Démonstration. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k\in[\![0,2N]\!]}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbb{P}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}]) \\
&= \sum_{k=0}^{2N} \mathbb{P}([X_n = k])\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}]) \\
&= \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbb{P}([X_n = k])\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}]) + \mathbb{P}([X_n = 0])\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}]) \\
&\quad + \mathbb{P}([X_n = 2N])\mathbb{P}_{[X_n=2N]}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}])
\end{aligned}$$

Or,

- $\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 0]) = 1$ donc $\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}]) = 1$
- $\mathbb{P}_{[X_n=2N]}([X_{n+1} = 2N]) = 1$ donc $\mathbb{P}_{[X_n=2N]}([X_{n+1} \in \{0, 2N\}]) = 1$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &\geqslant \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbb{P}([X_n = k])2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} + \mathbb{P}([X_n = 0]) + \mathbb{P}([X_n = 2N]) \\
&\geqslant u_n + 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbb{P}([X_n = k]) \\
&\geqslant u_n + 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} (1-u_n)
\end{aligned}$$

□

c) Soit $\alpha \in]0,1[$. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = u_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n + \alpha(1-w_n)$$

Justifier que la suite (w_n) est convergente et donner sa limite.

Démonstration. (w_n) est une suite arithmético-géométrique. A l'aide de la méthode du cours, on trouve

$$w_n = 1 + (u_0 - 1)(1-\alpha)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \textit{(car } |1-\alpha| < 1\textit{)}$$

□

d) Conclure et interpréter le résultat obtenu.

Démonstration. On choisit dans cette question $\alpha = 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. On a bien $\alpha \in]0,1[$ donc on peut appliquer la question précédente : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Il reste à montrer que, pour tout entier n, $w_n \leqslant u_n \leqslant 1$ et à appliquer le théorème d'encadrement. L'inégalité de droite est vraie car u_n est la probabilité d'un événement. L'inégalité de gauche se démontre par récurrence. □