DS6 (vA)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

Exercice 1

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0,+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0,+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$.
  a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.
  b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.
  c) Tracer l'allure de C et écrire un script **Python** permettant de faire ce tracé sur $[0, 5]$.

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0,+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[^2\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x, y) de $]0,+\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0,+\infty[^2$.

7. ***a)*** Soit $(x, y) \in\ ]0,+\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

  b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

12. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice 2

Partie 1

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
En déterminer une base et donner sa dimension.

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.
A est-elle diagonalisable ?

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :

$$A = PD_AP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}$$

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie 2

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

9. Que vaut X_0 ?

10. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^nX_0$.

12. À l'aide des résultats de la partie 1, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 3

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. ***a)*** Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

5. ***a)*** Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$.

6. Loi de $X + Y$.

a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

b) Montrer que $\mathbb{P}\big([X + Y = 1]\big) = \frac{2}{3}$.

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X + Y = n] = \big([X = 1] \cap [Y = n-1]\big) \bigcup \big([Y = 1] \cap [X = n-1]\big)$$

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X + Y = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel non nul m, l'instruction `rd.randint(0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et $m-1$ (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

a) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = rd.randint(_____,_____)
x = 1
if piece == 0:
    lancer = rd.randint(_____,_____)
    while lancer == 0:
        lancer = ____________________
        x = _________
else:
    if piece == 1:
        x = _____
print(x)
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Problème

1. Soit x un réel quelconque.

a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On considère maintenant l'intégrale $y = \displaystyle\int_0^1 \max(x, t)\ dt$.

b) Montrer que : $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Dans la suite de ce problème, on considère une v.a.r. X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, en posant $Y = \displaystyle\int_0^1 \max(X, t)\ dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max\left(X(\omega), t\right)\ dt$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

2. Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

3. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$\mathbb{P}\left([X = -1]\right) = \mathbb{P}\left([X = 1]\right) = \frac{1}{4}$$

a) Déterminer la valeur de $\mathbb{P}\left([X = 0]\right)$.

b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$ puis donner la loi de Y.

c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```python
def simulY():
    U = rd.randint(1,5)
    if __________:
        _____________
    else:
        _______________
```

4. On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0;1[$, avec $X(\Omega) = [0;1[$.

a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\,\frac{1}{2}, 1\right[$.

c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\,\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

e) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```python
def simul2Y():
    U = rd.random()
    return ___________________
```

5. On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite.
On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\,\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

b) Donner la valeur de $\mathbb{P}\left(\left[Y = \frac{1}{2}\right]\right)$.

c) Utiliser la formule des probabilités totales associées au système complet d'évènements

$$([X \leqslant 0], [0 < X \leqslant 1], [X > 1])$$

pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?