DS6 (vA) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

Exercice 1 (EML 2016)

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

Partie I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

- **1 pt : f est continue sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt : f est continue en 0 avec bonne méthode**
- **1 pt : par croissances comparées**

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

- **1 pt : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt :** $f'(t) = 2t - \left(1 \times \ln(t) + \cancel{t} \times \dfrac{1}{\cancel{t}}\right) = 2t - \ln(t) - 1$
- **1 pt :** $f''(t) = 2 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{2t-1}{t}$

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

- **1 pt : penser à étudier les variations de f'**
- **1 pt :**

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt :**

t	0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt :** $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ **par croissances comparées**

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

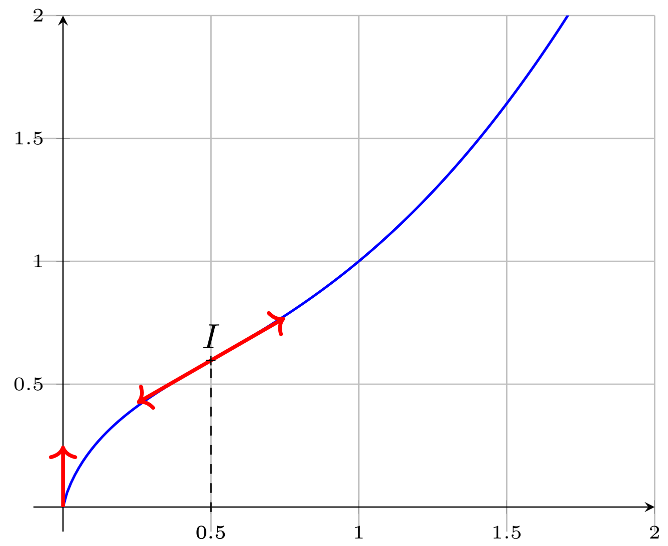
a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.

- **1 pt :** $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = +\infty$
- **1 pt : la courbe C admet une demi-tangente verticale en 0**

b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.

- **1 pt : f'' s'annule en changeant de signe uniquement en $\dfrac{1}{2}$**
- **1 pt :** $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$

c) Tracer l'allure de C et écrire un script **Python** permettant de faire ce tracé sur $[0, 5]$.




```
def f(t):
    if t == 0:
        return 0
    else:
        return t**2 - t * np.log(t)

abscisse = np.linspace(0,5,1000)
ordonnee = [f(t) for t in abscisse]
plt.plot(abscisse, ordonnee)
```

- **1 pt : La courbe C admet pour tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ la droite d'équation :**

$$y = \frac{1}{4} + \ln(2)x$$

- **1 pt : tangente verticale en 0 tracée**
- **1 pt : cohérence avec la concavité et la convexité**
- **1 pt : cohérence avec la limite en $+\infty$**
- **2 pt : définition de `f` en Python (1 pt pour cas général et 1 pt pour la valeur 0)**
- **1 pt :** `abscisse = np.linspace(0,5,1000)`
- **1 pt :** `ordonnee = [f(t) for t in abscisse]`
- **1 pt :** `plt.plot(abscisse, ordonnee)` **(donné si ce qui précède a un minimum de sens)**

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

- **1 pt : La fonction f est :**
  - × **continue sur $[0, +\infty[$,**
  - × **strictement croissante sur $[0, +\infty[$.**
- **1 pt :** $f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) \right[= [0, +\infty[$
- **1 pt :** $1 \in [0, +\infty[$
- **1 pt :** $f(1) = 1^2 - 1 \times \ln(1) = 1$ **donc** $\alpha = 1$

Partie II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$.

- **1 pt : F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[^2$ et admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $]0, +\infty[^2$**
- **1 pt :** $\partial_1(F)(x, y) = \ln(y) - \dfrac{y}{x}$ **et** $\partial_2(F)(x, y) = \dfrac{x}{y} - \ln(x)$

7. ***a)*** Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

- **1 pt : explication pour $x > 1$**
- **1 pt :** $x \ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) = \dfrac{x}{\ln(x)} \iff f(\ln(x)) = 1$
- **2 pt : équivalence bien démontrée**

b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).

- **2 pt :** $\Longrightarrow$
- **1 pt :** $\Longleftarrow$

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

- **1 pt : La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur cet ouvert.**
- **2 pt :** $\nabla^2(F)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(x, y) & \partial^2_{1,2}(F)(x, y) \\ \partial^2_{2,1}(F)(x, y) & \partial^2_{2,2}(F)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$
- **1 pt : La matrice $\nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e})$ est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux**
- **1 pt : $\nabla^2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e})$ admet deux valeurs propres non nulles de signe contraire, donc (e, e) n'est pas un extremum local pour F (c'est un point selle)**

Partie III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**
- **1 pt : existence également démontrée**

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

- **1 pt : thm de convergence monotone**
- **1 pt : passage à la limite pour montrer que ℓ est un point fixe de f**
- **1 pt : continuité de f**
- **1 pt : justification de $\ell \neq 0$**
- **3 pt : étude de $g : t \mapsto t - \ln(t)$ et preuve de $\ell = 1$**

12. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

```
n = 0
u = 1/2
while 1 - u >= 10**(-4):
    n = n + 1
    u = u**2 - u * np.log(u)
print(n)
```

- **1 pt : initialisation de n et u**
- **1 pt : boucle while**
- **1 pt : mise à jour n et u**
- **1 pt :** `print(n)`

Exercice 2 (ECRICOME 2016)

Partie 1

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
En déterminer une base et donner sa dimension.

- **1 pt :** $E = \text{Vect}\,(A, B)$
- **1 pt :** (A, B) **est une base de** E
- **1 pt :** $\dim(E) = \text{Card}((A, B)) = 2$

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.
A est-elle diagonalisable ?

- **2 pt : Comme** $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$**, 1 est bien valeur propre de** A**, d'espace propre associé** $E_1(A)$**.**
- **2 pt : Comme** $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$**, 2 est bien valeur propre de** A**, d'espace propre associé** $E_2(A)$**.**
- **2 pt : Comme** $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$**, 3 est bien valeur propre de** A**, d'espace propre associé** $E_3(A)$**.**
- **1 pt : On sait que :**
  - × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$**,**
  - × A **possède** 3 **valeurs propres distinctes.**

  Donc A **est diagonalisable**

3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :

$$A = PD_AP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **1 pt : D'après la question *2.*, la matrice** A **est diagonalisable.**
  Il existe donc une matrice P **inversible et une matrice** D_A **diagonale telles que** $A = PD_AP^{-1}$**.**
  Plus précisément, la matrice P **est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de** A **et la matrice** D_A **est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de** A **(dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres)**

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

- **2 pt : détails des calculs bien présentés et méthode correcte (même si erreur de calcul)**
- **1 pt :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}$$

- **1 pt :** $BX_1 = 0 \cdot X_1$, $BX_2 = -1 \cdot X_2$ **et** $BX_3 = -1 \cdot X_3$
- **1 pt :** (X_1, X_2, X_3) **est une base de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ **car** P **est inversible**
- **1 pt : La matrice** B **est donc diagonalisable et** $B = PD_BP^{-1}$ **où** D_B **est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice** B **(dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres constituant les colonnes de** P**),** ***i.e.*** $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$$

- **1 pt :** $M(x, y) = xA + yB$
- **2 pt :** $D(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

- **2 pt :** $M(x, y)$ **est inversible ssi** $D(x, y)$ **est inversible**
- **1 pt :** $M(x, y)$ **est inversible si et seulement si** $\left\{ \begin{array}{rcl} x & \neq & 0 \\ 2x - y & \neq & 0 \\ 3x - y & \neq & 0 \end{array} \right.$

8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

- **1 pt :** $B^2 = -B$
- **1 pt :** $B \in E$ **et** E **est un espace vectoriel donc** $-B \in E$
- **1 pt :** $A^2 = (PD_AP^{-1})^2 = PD_A\cancel{P^{-1}} \times \cancel{P}D_AP^{-1} = P(D_A)^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = D(x, y) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 1 \\ & - & y & = & 2 \\ & - & y & = & 6 \end{array} \right.$ **donc** $A^2 \notin E$

Partie 2

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a_{n+1} & = & 3a_n & + & 4b_n & - & c_n \\ b_{n+1} & = & -4a_n & - & 5b_n & + & c_n \\ c_{n+1} & = & -6a_n & - & 8b_n & + & 2c_n \end{array}\right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

9. Que vaut X_0 ?

- **1 pt :** $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

10. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.

- **1 pt :** $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$
- **2 pt :** $C = M(1, 3)$

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

12. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

- **1 pt :** $C = P\,D(1,3)\,P^{-1}$ **donc, par récurrence immédiate :** $C^n = P\,(D(1,3))^n\,P^{-1}$
- **2 pt :** $C^n = \begin{pmatrix} 1-2(-1)^n & 2-2(-1)^n & -1 \\ -1+3(-1)^n & -2+3(-1)^n & 1 \\ -2+4(-1)^n & -4+4(-1)^n & 2 \end{pmatrix}$
- **1 pt : pour** $n \geqslant 1$, $\left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & 1-2(-1)^n \\ b_n & = & -1+3(-1)^n \\ c_n & = & -2+4(-1)^n \end{array}\right.$

Exercice 3 (EDHEC 2018)

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir Face vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant Face à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant Pile à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient Pile au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier Pile et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier Face. On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Pile et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais Face.

1. a) Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

- **1 pt : (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements + FPT**
- **1 pt : pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3} \neq 0$**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X = 1]\big) \ = \ \dfrac{1}{2}$

b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{1}{3} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

- **1 pt :** $[X = n] \ = \ F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n$
- **1 pt : (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements + FPT**
- **1 pt : indépendance des événements F_1, F_2, ..., F_{n-1} et P_n pour $\mathbb{P}_{A_0}$**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X = n]\big) \ = \ \dfrac{1}{3} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

- **1 pt : $X(\Omega) = \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$ donc la famille $\big([X = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements**
- **1 pt :** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big) \ = \ 1$
- **1 pt : reconnaissance d'une somme géométrique de raison $1/2$**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X = 0]\big) = \dfrac{1}{3}$

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

- **1 pt : La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum n \, \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente**
- **1 pt : reconnaissance d'une série géométrique dérivée première de raison $1/2$**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = 1$

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance.
En déduire que X possède une variance et vérifier que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{4}{3}$.

- **1 pt : La v.a.r.** $X(X-1)$ **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\ n(n-1)\ \mathbb{P}([X=n])$ **est absolument convergente**
- **1 pt : reconnaissance d'une série géométrique dérivée seconde de raison** $1/2$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{4}{3}$
- **1 pt :** $X^2 \ = \ X(X-1)+X$ **donc** X^2 **possède une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X^2) = \frac{7}{3}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$ **par la formule de Kœnig-Huygens**

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

- **1 pt : toute explication raisonnable sur la symétrie des rôles de Pile et Face**

5. ***a)*** Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=j]) = \mathbb{P}([Y=j])$.

- **1 pt :** $[X=1]\cap[Y=j] \ = \ P_1\cap\ldots\cap P_{j-1}\cap F_j \ = \ [Y=j]$

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}([X=i])$.

- **1 pt :** $[X=i]\cap[Y=1] \ = \ F_1\cap\ldots\cap F_{i-1}\cap P_i \ = \ [X=i]$

6. Loi de $X+Y$.

a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs positives sauf 0 et 2.

- **3 pts : disjonction de cas bien menée**

b) Montrer que $\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \dfrac{2}{3}$.

- **1 pt :** $[X+Y=1] \ = \ [X=0]\cup[Y=0]$
- **1 pt : incompatibilité** $[X=0]$ **et** $[Y=0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X+Y=1]\big) = \dfrac{2}{3}$

c) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[X+Y=n] = \big([X=1]\cap[Y=n-1]\big) \bigcup \big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$$

- **2 pts : inclusion directe**
- **1 pt : inclusion réciproque**

d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\mathbb{P}([X+Y=n]) = \frac{2}{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- **1 pt : incompatibilité des deux évenements (0 pt si non sens à un moment donné)**

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel non nul m, l'instruction `rd.randint(0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et $m-1$ (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

a) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
1  piece = rd.randint( 0 , 3 )
2  x = 1
3  if piece == 0:
4      lancer = rd.randint( 0 , 2 )
5      while lancer == 0:
6          lancer = rd.randint(0,2)
7          x = x + 1
8  else:
9      if piece == 1:
10         x = 0
11 print(x)
```

- **1 pt :**
```
1  piece = rd.randint( 0 , 3 )
```
- **1 pt :**
```
4      lancer = rd.randint( 0 , 2 )
```
- **1 pt :**
```
6          lancer = rd.randint(0,2)
```
- **1 pt :**
```
7          x = x + 1
```
- **1 pt :**
```
10         x = 0
```

b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

- **1 pt : toute explication raisonnable**

Problème (EDHEC 2014)

1. Soit x un réel quelconque.

a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : expression du** max
- **1 pt : continuité sur** $\mathbb{R} \setminus \{x\}$
- **1 pt : continuité en** x

On considère maintenant l'intégrale $y = \displaystyle\int_0^1 \max(x, t)\, dt$.

b) Montrer que : $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

- **1 pt : cas** $x \leqslant 0$
- **1 pt : cas** $x > 1$

- 1 pt : cas $x \in \,]0,1]$

Dans la suite de ce problème, on considère une v.a.r. X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, en posant $Y = \displaystyle\int_0^1 \max(X,t)\ dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max\left(X(\omega), t\right)\ dt$$

On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

2. Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.

- 1 pt : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

- 1 pt : utilisation question *1.b)*

3. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$\mathbb{P}\left([X = -1]\right) = \mathbb{P}\left([X = 1]\right) = \frac{1}{4}$$

a) Déterminer la valeur de $\mathbb{P}\left([X = 0]\right)$.

- 1 pt : donner le SCE

- 1 pt : calcul

b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\ ; 1\right\}$ puis donner la loi de Y.

- 1 pt : $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\ ; 1\right\}$

- 1 pt : calcul de $\mathbb{P}([Y = 1])$

- 1 pt : calcul de $\mathbb{P}\left(\left[Y = \frac{1}{2}\right]\right)$

c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
def simulY():
    U = rd.randint(1,5)
    if  U == 1  :
        return 1
    else:
        return 1/2
```

- 1 pt : explication

- 3 pts : 1 pt par ligne à compléter

4. On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$. On pourra utiliser sans démonstration que $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{12}$.

a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

- 1 pt

b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

- 2 pts

c) Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.

- 2 pts : égalités entre probabilités

- 1 pt : justification $\sqrt{2x-1} \in [0,1]$

- 1 pt : fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([0,1])$

d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.

- 2 pts : 1 par argument

e) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

- 1 pt : existence de $\mathbb{E}(Y)$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}$

f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
def simul2Y():
    U = rd.random()
    return  (U**2 + 1) / 2
```

- 1 pt

5. On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite.
On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

- 1 pt : disjonction de cas

- 1 pt : écriture de l'univers image sous forme d'union (ou phrase équivalente)

b) Donner la valeur de $\mathbb{P}\left(\left[Y = \frac{1}{2}\right]\right)$.

- 1 pt : égalité $\left[Y = \frac{1}{2}\right] = [X \leqslant 0]$

- 1 pt : $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

c) Utiliser la formule des probabilités totales associées au système complet d'évènements

$$([X \leqslant 0], [0 < X \leqslant 1], [X > 1])$$

pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi\left(\sqrt{2x-1}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1 pt : cas $x < \frac{1}{2}$

- 1 pt : formule des probabilités totales

- 1 pt : simplication $[Y \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]$

- 3 pts : simplication $[Y \leqslant x] \cap [0 < X \leqslant 1]$

- 1 pt : simplication $[Y \leqslant x] \cap [X > 1]$

- 2 pts : cas $x > 1$

d) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

- 1 pt : Y **n'est pas à densité**

- 1 pt : Y **n'est pas discrète**