DS7 (ESSEC II 2023) - Correction

On s'intéresse dans ce problème aux processus de Markov finis homogènes à temps continu et on étudie deux exemples de modélisation en lien avec les crédits bancaires.

Le problème comporte quatre parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes de la partie 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. On considère, dans la suite du problème, une famille de variables aléatoires X_t, pour $t \in \mathbb{R}^+$, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, vérifiant les propriétés suivantes :

(H_1) Pour tout $t \geqslant 0$, $X_t(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$.

(H_2) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$ des réels positifs, $i_1, \ldots, i_{r+1}$ des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ et s un réel positif, si $\mathbb{P}([X_{t_1} = i_1] \cap \cdots \cap [X_{t_r} = i_r]) \neq 0$,

$$\mathbb{P}_{[X_{t_1}=i_1]\cap\cdots\cap[X_{t_r}=i_r]}([X_{t_r+s} = i_{r+1}]) = \mathbb{P}_{[X_{t_r}=i_r]}([X_{t_r+s} = i_{r+1}])$$

(H_3) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction $f_i : t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i])$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et n'est pas la fonction nulle. On note S_i l'ensemble des réels positifs t tels que $f_i(t) \neq 0$.

(H_4) Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $i \neq j$ et $h \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j])$ est constante sur son ensemble de définition S_i et il existe un réel positif que l'on note $\alpha_{i,j}$, tel que, si $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) = \alpha_{i,j} h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

(H_5) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $h \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = i])$ est constante sur son ensemble de définition S_i et il existe un réel négatif que l'on note $\alpha_{i,i}$, tel que, si $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = i]) = 1 + \alpha_{i,i} h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

Commentaire

Les processus de Markov finis homogènes à temps continu présentés ci-dessus sont des analogues *continus* des chaînes de Markov homogènes présentes dans le programme d'ECG Maths Appliquées, qui elles modélisent des processus *discrets*.
La propriété (H_1) veut simplement dire que le processus est fini à n états (propriété analogue aux chaînes de Markov finies à n états).
La propriété (H_2) est l'analogue de la « propriété de Markov », que l'on retrouve en prenant $t_k = k \in \mathbb{N}^*$.
Le fait que les fonctions $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j])$ et $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = i])$ soient constantes dans les propriétés (H_4) et (H_5) est un analogue de la propriété d'homogénéité, que l'on retrouve avec $h = 1$ et t un entier.

Partie 1 - Matrice génératrice et système différentiel associés

On note L_t la matrice ligne d'ordre n, $\big(\mathbb{P}([X_t = 1]) \ldots\ldots \mathbb{P}([X_t = n])\big) = \big(f_1(t) \ldots\ldots f_n(t)\big)$ et on note G la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les $\alpha_{i,j}$, appelée **matrice génératrice du processus**.

On note aussi pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $L'_t = \big(f'_1(t) \ldots\ldots f'_n(t)\big)$.

L'objectif des trois premières questions est d'établir que pour tout $t \geqslant 0$, $L'_t = L_t G$.

1. Montrer que, pour tous $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i])$$

Démonstration.
Soient $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$. D'après (H_1), $X_t(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ donc la famille $([X_t = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i])}$$

Commentaire

On retiendra qu'il faut toujours penser à la formule des probabilités totales lorsque l'énoncé demande de calculer une probabilité sous forme d'une somme.

□

2. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$, justifier que $\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) = 1$. En déduire que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $h \in \mathbb{R}^+$, on a l'égalité :

$$1 = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \right) h + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

En conclure que $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0$.

Démonstration.
Soient $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$. De même qu'à la question précédente, la famille $([X_{t+h} = j])_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est un système complet d'événements. De plus, $\mathbb{P}_{[X_t=i]}$ est une application probabilité car $t \in S_i$ donc $\mathbb{P}([X_t = i]) \neq 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) = 1}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) \\
&= \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = i]) + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) \\
&= 1 + \alpha_{i,i} h + \underset{h \to 0}{o}(h) + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \left(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)\right) && \textit{(d'après } (H_4) \textit{ et } (H_5)\textit{)} \\
&= 1 + \alpha_{i,i} h + \underset{h \to 0}{o}(h) + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \alpha_{i,j} h + (n-1) \underset{h \to 0}{o}(h) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} h + n \underset{h \to 0}{o}(h) \\
&= 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \right) h + \underset{h \to 0}{o}(h) && \textit{(car } n \textit{ est une constante)}
\end{aligned}$$

De l'égalité précédente, il vient :

$$1 + ah + \underset{h\to 0}{o}(h) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

avec $a = 0$ (on a écrit le développement limité en 0 à l'ordre 1 de la fonction constante égale à 1).

$$\boxed{\text{Par unicité du développement limité d'ordre 1, on en déduit : } \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = a = 0.}$$

Commentaire

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité (au sens d'une application probabilité) et $(A_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, alors on a

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) = 1$$

Il faut se souvenir que toute probabilité conditionnelle est une probabilité. On peut donc utiliser le résultat précédent avec la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_t=i]}$ et le système complet d'événements $([X_{t+h} = j])_{1\leqslant j\leqslant n}$.

□

3. ***a)*** Montrer que, pour tous $j \in \{1, \dots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a alors :

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \mathbb{P}([X_t = j]) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) \mathbb{P}([X_t = i])$$

Démonstration.
Soient $j \in \{1, \dots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

- Montrons que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) = \begin{cases} \mathbb{P}([X_t = j])(1 + \alpha_{j,j} h + \underset{h\to 0}{o}(h)) & \text{si } i = j \\ \mathbb{P}([X_t = i])(\alpha_{i,j} h + \underset{h\to 0}{o}(h)) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

  et ce, indépendamment du fait que $t \in S_i$ ou non.
  Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Détaillons la preuve dans le cas $i \neq j$ (c'est analogue dans l'autre cas).
  Deux cas se présentent.

  × Premier cas : $t \in S_i$.
  Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) &= \mathbb{P}([X_t = i])\mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) \\ &= \mathbb{P}([X_t = i])(\alpha_{i,j} h + \underset{h\to 0}{o}(h)) \qquad \textit{(d'après } (H_4)\textit{)} \end{aligned}$$

  × Deuxième cas : $t \notin S_i$.
  Alors, d'une part, $\mathbb{P}([X_t = i]) = 0$ donc $\mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) = 0$ par croissance de $\mathbb{P}$ (en effet, $[X_{t+h} = j] \cap [X_t = i] \subset [X_t = i]$).
  D'autre part, $\mathbb{P}([X_t = i]) = 0$ donc $\mathbb{P}([X_t = i])(\alpha_{i,j} h + \underset{h\to 0}{o}(h)) = 0$.

- Ensuite, d'après la question ***1.***,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{t+h}=j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_{t+h}=j]\cap[X_t=i]) \\
&= \mathbb{P}([X_{t+h}=j]\cap[X_t=j]) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \mathbb{P}([X_{t+h}=j]\cap[X_t=i]) \\
&= \mathbb{P}([X_t=j])(1+\alpha_{j,j}h+\underset{h\to 0}{o}(h)) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \mathbb{P}([X_t=i])(\alpha_{i,j}h+\underset{h\to 0}{o}(h)) \\
&= \mathbb{P}([X_t=j]) + \mathbb{P}([X_t=j])(\alpha_{j,j}h+\underset{h\to 0}{o}(h)) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \mathbb{P}([X_t=i])(\alpha_{i,j}h+\underset{h\to 0}{o}(h)) \\
&= \mathbb{P}([X_t=j]) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j}h+\underset{h\to 0}{o}(h)\right)\mathbb{P}([X_t=i])
\end{aligned}$$

$\square$

b) En déduire que pour tous $j\in\{1,\dots,n\}$, $t\geqslant 0$ et $h>0$:

$$\frac{f_j(t+h)-f_j(t)}{h} = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} + \underset{h\to 0}{o}(1)$$

En conclure que $f_j'(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j}$.

Démonstration.
Soient $j\in\{1,\dots,n\}$, $t\geqslant 0$ et $h>0$.
D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_{t+h}=j]) = \mathbb{P}([X_t=j]) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j}h+\underset{h\to 0}{o}(h)\right)\mathbb{P}([X_t=i])$$

ce qui se réécrit

$$f_j(t+h) = f_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j}h+\underset{h\to 0}{o}(h)\right) f_i(t)$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{f_j(t+h)-f_j(t)}{h} &= \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j}h+\underset{h\to 0}{o}(h)\right) f_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j}+\underset{h\to 0}{o}(1)\right) f_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t)\alpha_{i,j}+\underset{h\to 0}{o}(1)\right) && \textit{(car $f_i(t)$ ne dépend pas de h)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} + n\underset{h\to 0}{o}(1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} + \underset{h\to 0}{o}(1) && \textit{(car n ne dépend pas de h)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f_j'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} && \textit{(f_j est dérivable en t par (H_3))} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} + \underset{h\to 0}{o}(1) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} \end{aligned}$$

□

c) Vérifier $L_t' = L_t G$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}^+$.
D'une part, d'après ***3.b)***,

$$\begin{aligned} L_t' &= \big(f_1'(t) \ldots\ldots f_n'(t)\big) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,1} \ldots\ldots \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,n} \right) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} L_t G &= \big(f_1(t) \ldots\ldots f_n(t)\big) \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,1} \ldots\ldots \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,n} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : pour tout } t \in \mathbb{R}^+,\ L_t' = L_t G.}$$

Commentaire

L'énoncé affirme que l'objectif des trois premières questions est d'établir que pour tout $t \geqslant 0$, $L_t' = L_t G$, mais nous n'avons pas eu besoin de la question ***2.*** pour arriver à ce résultat. Le concepteur avait peut être une autre idée de preuve en tête.

□

4. *Probabilité moyenne d'être dans un état*
Soit $T > 0$ et U_T une variable aléatoire à valeurs dans $[0, T]$ qui suit la loi uniforme sur cet intervalle.
On pose $Z_{i,T} = f_i(U_T)$.
Montrer que $\mathbb{E}(Z_{i,T})$ existe et vaut $\dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f_i(t)\ dt$. On note $e_i(T)$ cette espérance.

Démonstration.
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On sait que $U_T \hookrightarrow \mathcal{U}([0, T])$ donc la fonction

$$g_T : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{1}{T} & \text{si } 0 < t < T \\ 0 & \text{si } t \geqslant T \end{cases}$$

est une densité de U_T. De plus,

× la densité g_T est nulle en dehors de $]0, T[$,

× la fonction f_i est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (cf (H_3)) donc *a fortiori* est continue sur $]0, T[$.

Il suit par théorème de transfert que la variable aléatoire $Z_{i,T}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^T f_i(t) g_T(t)\ dt$ est absolument convergente, et si c'est le cas alors :

$$\mathbb{E}(Z_{i,T}) = \int_0^T f_i(t) g_T(t)\ dt$$

Or,

× Les fonctions f_i et g_T sont à valeurs positives donc il suffit de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^T f_i(t) g_T(t)\ dt$ est convergente.

× On a :

$$\int_0^T f_i(t) g_T(t)\ dt = \int_0^T f_i(t) \frac{1}{T}\ dt$$

et cette intégrale converge puisque ce n'est pas une intégrale impropre (f_i est continue sur $[0, T]$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(Z_{i,T}) \text{ existe et } \mathbb{E}(Z_{i,T}) = \frac{1}{T}\int_0^T f_i(t)\ dt \text{ (par linéarité de l'intégrale).}}$$

□

5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels strictement positifs. On pose $p = \frac{b}{a+b}$, $q = 1 - p$, $\alpha = f_1(0)$.

Commentaire

D'après la question ***2.***, la somme des coefficients de la matrice G sur chaque ligne doit être égale à 0. Puisque G est une matrice 2×2, il suit que le choix des coefficients diagonaux détermine entièrement les deux autres coefficients. D'après (H_5) les coefficients diagonaux sont négatifs, le concepteur décide ici de les écrire $\alpha_{1,1} = -a$ et $\alpha_{2,2} = -b$ pour travailler avec des paramètres a et b positifs. Ceci explique la forme spécifique de la matrice G.

a) Montrer que f_1 vérifie l'équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^+$, $y' + (a+b)y = b$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$. D'après la question ***3.c)***,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -af_1(t) + bf_2(t) & af_1(t) - bf_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $f_1'(t) = -af_1(t) + bf_2(t)$.
De plus, $\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_t = 1]) & \mathbb{P}([X_t = 2]) \end{pmatrix}$ et $([X_t = 1], [X_t = 2])$ est un système complet d'événements donc $f_1(t) + f_2(t) = 1$. D'où :

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= -af_1(t) + b(1 - f_1(t)) \\ &= b - (a+b)f_1(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_1 \text{ est bien solution de l'équation différentielle } y' + (a+b)y = b.}$$

□

b) En conclure que pour tout $t \geqslant 0$,

$$f_1(t) = p + (\alpha - p)\exp(-(a+b)t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$$

Démonstration.

- D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + (a+b)y = 0$, d'ordre 1 à coefficients constants, sont de la forme

$$t \mapsto C\mathrm{e}^{-(a+b)t}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

- Le second membre de l'équation différentielle $y' + (a+b)y = b$ étant constant, on en déduit que la fonction constante $t \mapsto \frac{b}{a+b}$ est une solution particulière.
- On en déduit que les solutions de $y' + (a+b)y = b$ sont de la forme

$$t \mapsto p + C\mathrm{e}^{-(a+b)t}, \qquad C \in \mathbb{R}$$

En particulier, il existe une constante $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \geqslant 0$,

$$f_1(t) = p + C_1\mathrm{e}^{-(a+b)t}$$

En évaluant en $t = 0$, on trouve :

$$\alpha = p + C_1$$

Finalement, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\boxed{f_1(t) = p + (\alpha - p)\mathrm{e}^{-(a+b)t}.}$$

- Soit $t \geqslant 0$. On sait que $f_1(t) + f_2(t) = 1$ (car la famille $([X_t = 1], [X_t = 2])$ est un système complet d'événements) donc $f_2(t) = 1 - f_1(t)$.

$$\boxed{\text{De plus, } q = 1 - p, \text{ donc : pour tout } t \geqslant 0,\ f_2(t) = q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t).}$$

□

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f_1(t) \in [\min(p,\alpha), \max(p,\alpha)]$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} f_1(t) = p$.

Démonstration.

- Notons $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-(a+b)t}$. On sait que $a > 0$ et $b > 0$ donc $-(a+b) < 0$. Ainsi, u est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et admet le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $u'(x)$	$-$
Variations de u	$1 \searrow 0$

Puisque $f = p + (\alpha - p)u$, on en déduit immédiatement que

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} f_1(t) = p.}$$

- Rappelons que $f_1(0) = \alpha$. De plus, selon le signe de $\alpha - p$,

× soit f_1 est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ (cas $\alpha - p > 0$), et alors on peut écrire

$$f_1([0,+\infty[) \subset \left]\lim_{t\to+\infty} f_1(t), f_1(0)\right] =]p,\alpha] \subset [\min(p,\alpha), \max(p,\alpha)]$$

× soit f_1 est strictement croissante (cas $\alpha - p < 0$), et alors on peut écrire

$$f_1([0,+\infty[) \subset \left[f_1(0), \lim_{t\to+\infty} f_1(t)\right[= [\alpha, p[\subset [\min(p,\alpha), \max(p,\alpha)]$$

× soit f_1 est constante (cas $\alpha = p$), et alors on peut écrire

$$\forall t \geqslant 0, f_1(t) = p = \alpha \in [\min(p,\alpha), \max(p,\alpha)] = \{p\} = \{\alpha\}$$

$$\boxed{\text{On a bien, dans tous les cas : pour tout } t \in \mathbb{R}^+,\ f_1(t) \in [\min(p,\alpha), \max(p,\alpha)].}$$

□

d) Déterminer $\lim\limits_{T\to+\infty} e_1(T)$.

Démonstration.
Soit $T > 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^T f_1(t)\ dt &= \int_0^T \left(p + (\alpha - p)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\right)\ dt \\ &= pT + (\alpha - p)\int_0^T \mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= pT + \frac{\alpha - p}{a+b}\int_0^T (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt\end{aligned}$$

donc

$$e_1(T) = p + \frac{1}{T}\frac{\alpha - p}{a+b}\int_0^T (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt$$

Or,

× $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\dfrac{\alpha-p}{a+b} = 0$.

× En reconnaissant le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a+b)$, on a :

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt = \int_0^{+\infty} (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{T\to+\infty} e_1(T) = p.}$$

□

6. On suppose dans cette question que $n = 3$ et $G = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Commentaire

On vérifie également sur cet exemple que la somme des coefficients sur chaque ligne de G est nulle, d'après la question *2*.

Pour tout $t \geqslant 0$, on note C_t (respectivement C'_t) la transposée de la matrice ligne L_t (respectivement L'_t).

a) Montrer que $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{10}$ et 0 sont des valeurs propres de G.

Démonstration.
Notons $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
On notera c_1, c_2 et c_3 les colonnes de la matrice considérée dans chacun des calculs qui suivent.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \text{rg}\left(G + \frac{1}{6}I_3\right) &= \text{rg}\left(\frac{1}{30}A + \frac{1}{6}I_3\right) \\ &= \text{rg}(A + 5I_3) \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) < 3 \qquad \textit{(car } c_1 = c_3\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } -\tfrac{1}{6} \text{ est valeur propre de } G.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \text{rg}\left(G + \frac{1}{10}I_3\right) &= \text{rg}\left(\frac{1}{30}A + \frac{1}{10}I_3\right) \\ &= \text{rg}(A + 3I_3) \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) < 3 \qquad \textit{(car } c_1 + c_3 = 2c_2\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } -\tfrac{1}{10} \text{ est valeur propre de } G.}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} \text{rg}\,(G) &= \text{rg}\left(\frac{1}{30}A\right) \\ &= \text{rg}(A) \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right) < 3 \qquad \textit{(car } c_1 + c_2 + c_3 = 0\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } 0 \text{ est valeur propre de } G.}$$

□

b) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que $G = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Démonstration.
Il s'agit de montrer : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$.
On a vu à la question précédente que $\{0, -3, -5\} \subset \text{Sp}(A)$. Or, A est une matrice carrée d'ordre 3 donc admet au plus 3 valeurs propres distinctes. On les a donc toutes :

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{0, -3, -5\} \text{ et } A \text{ est diagonalisable.}}$$

De plus,

× $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

$$\boxed{\text{donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 0.}$$

× $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

$$\boxed{\text{donc } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } -3.}$$

× $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

$$\boxed{\text{donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } -5.}$$

On en déduit que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. La matrice P est la matrice de changement de base de la base canonique à la base $\mathcal{F}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par formule de changement de base : } A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

□

c) Calculer ${}^tPP$. En déduire que $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Tout d'abord :

$$\boxed{{}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

d'où, en multipliant à gauche par $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_3$$

et donc

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.}$$

□

d) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P^{-1}C_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $y_1'(t) = 0$, $y_2'(t) = -\frac{1}{10}y_2(t)$, $y_3'(t) = -\frac{1}{6}y_3(t)$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

- Tout d'abord,

$$\begin{array}{lll} & L_t' = L_t G & \textit{(d'après la question \textbf{3.c)})} \\ \text{donc} & C_t' = {}^tG C_t & \textit{(en transposant)} \\ \text{donc} & C_t' = G C_t & \textit{(car } G \textit{ est symétrique)} \end{array}$$

- Notons $Y_t = P^{-1}C_t$, de sorte que $C_t = PY_t$ et notons $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{lll} & C_t' = G C_t & \\ \text{donc} & P Y_t' = G P Y_t & \textit{(car } P \textit{ ne dépend pas de } t\textit{)} \\ \text{donc} & Y_t' = P^{-1} G P Y_t & \\ \text{donc} & Y_t' = D Y_t & \textit{(d'après la question \textbf{6.b)})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : pour tout } t \in \mathbb{R}^+,\ y_1'(t) = 0,\ y_2'(t) = -\frac{1}{10}y_2(t),\ y_3'(t) = -\frac{1}{6}y_3(t).}$$

□

e) En conclure que, pour tout $t \geqslant 0$, $C_t = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}C_0$, puis que pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \frac{1}{3}$.

Démonstration.
D'après la question précédente, il existe trois constantes réelles α, β, γ telles que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$y_1(t) = \alpha$$

$$y_2(t) = \beta \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}$$

$$y_3(t) = \gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}t}$$

$$\boxed{\text{donc : pour tout } t \geqslant 0,\ C_t = PY_t = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}.}$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient $C_0 = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}C_0.}$$

Montrons que, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \alpha$.

On le détaille pour $i = 1$ (les calculs sont analogues dans les deux autres cas).

On remarque que $\mathbb{P}([X_t = 1])$ est le premier coefficient de $C_t = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$ donc, par produit matriciel :

$$\mathbb{P}([X_t = 1]) = \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Il reste à montrer que $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Or, α est le premier coefficient du vecteur colonne $P^{-1}C_0$. Ainsi, d'après la question ***6.c)*** :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{6}(2\mathbb{P}([X_0 = 1]) + 2\mathbb{P}([X_0 = 2]) + 2\mathbb{P}([X_0 = 3])) \\ &= \frac{1}{3}(\mathbb{P}([X_0 = 1]) + \mathbb{P}([X_0 = 2]) + \mathbb{P}([X_0 = 3])) \\ &= \frac{1}{3} && \textit{(car } ([X_0 = 1], [X_0 = 2], [X_0 = 3]) \\ & && \textit{est un système complet d'événements)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien montré : pour tout } i \in \{1, 2, 3\}, \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \frac{1}{3}.}$$

□

7. *Temps initial passé dans un état* - On pose pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta_i = -\alpha_{i,i}$ et on suppose dans cette question que, si $\mathbb{P}([X_0 = i]) \neq 0$, alors $\beta_i \neq 0$.

On définit les variables aléatoires, $Y_1, \ldots, Y_n$ et Y égales, au premier instant t où $X_t \neq i$ pour Y_i et au premier instant t où $X_t \neq X_0$ pour Y. *On admet que ces instants existent.* Ainsi Y est à valeurs dans $]0, +\infty[$ et si $X_0 \neq i$, $Y_i = 0$.

Soit i tel que $\mathbb{P}([X_0 = i]) \neq 0$. On admet que pour tout $x > 0$, lorsque k est un entier naturel assez grand $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) \neq 0$ et que l'on a :

$$\mathbb{P}([Y_i > x]) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right)$$

a) Montrer que pour tout $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, k assez grand :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) = \mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{\left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]}\left(\left[X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right]\right) = \mathbb{P}([X_0 = i]) \left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

Démonstration.

Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) \neq 0$.

D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right)$$

$$=\mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{\bigcap_{m=0}^{j}\left[X_{\frac{m}{k}x}=i\right]}\left(\left[X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right]\right)$$

$$=\mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]}\left(\left[X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right]\right) \qquad \textit{(d'après } (H_2)\textit{, car } 0 = \frac{0}{k}x < \frac{1}{k}x < \cdots < \frac{j}{k}x\textit{)}$$

$$=\mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \alpha_{i,i}\frac{x}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{k}\right)\right) \qquad \textit{(d'après } (H_5)\textit{, car } \frac{j+1}{k}x - \frac{j}{k}x = \frac{x}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0\textit{)}$$

$$=\mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \qquad \textit{(car } x \textit{ ne dépend pas de } k\textit{)}$$

$$=\mathbb{P}([X_0 = i]) \left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

□

b) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \mathrm{e}^{-\beta_i x}$. Quelle est la loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_0=i]}$?

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$. Deux cas se présentent.

- Premier cas : $x = 0$.
  Alors, d'une part, $\mathrm{e}^{-\beta_i \times 0} = 1$.
  Et d'autre part, si l'événement $[X_0 = i]$ est réalisé, alors le premier instant t où $X_t \neq i$ n'est pas 0 et donc est nécessairement strictement positif donc l'événement $[Y_i > 0]$ est réalisé. On en déduit que
  $$\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > 0]) = 1$$
  On a bien
  $$\boxed{\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \mathrm{e}^{-\beta_i x}.}$$
- Deuxième cas : $x > 0$.
  $$\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \frac{\mathbb{P}([X_0 = i] \cap [Y_i > x])}{\mathbb{P}([X_0 = i])} = \frac{\mathbb{P}([Y_i > x])}{\mathbb{P}([X_0 = i])}$$
  En effet, on remarque (et c'est rappelé dans l'énoncé) que $[X_0 \neq i] \subset [Y_i = 0]$ donc, par contraposée, $[Y_i > x] \subset [Y_i \neq 0] \subset [X_0 = i]$.
  De plus, il est admis que
  $$\mathbb{P}([Y_i > x]) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) &= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\mathbb{P}([X_0=i])}\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right)\\ &= \lim_{k\to+\infty}\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k\end{aligned}$$

Or, pour tout k assez grand :

$$\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k = \mathrm{e}^{k\ln\left(1-\frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)}$$

Rappelons le DL à l'ordre 1 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 :

$$\ln(1+u) = u + \underset{u\to0}{o}(u)$$

Ainsi, en posant $u = -\dfrac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ (ce qui est possible car $\lim\limits_{k\to+\infty} -\dfrac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k}\right) = 0$) :

$$\begin{aligned}k\ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) &= k\left(-\frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) + \underset{k\to+\infty}{o}\left(-\frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right)\\ &= k\left(-\frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)\\ &= -\beta_i x + \underset{k\to+\infty}{o}(1)\end{aligned}$$

De plus :

$$-\beta_i x + \underset{k\to+\infty}{o}(1) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -\beta_i x$$

$$\boxed{\text{Par continuité de exp sur } \mathbb{R} : \mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \mathrm{e}^{-\beta_i x}.}$$

- Tout d'abord, $Y_i(\Omega) = [0, +\infty[$ et l'ensemble des valeurs possibles pour Y_i sachant l'événement $[X_0 = i]$ réalisé est $]0, +\infty[$.
  Ensuite, par passage au complémentaire :

  $$\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  Remarquons que $\beta_i > 0$. En effet, $\beta_i = -\alpha_{i,i}$ et $\alpha_{i,i} \leqslant 0$ d'après (H_5) donc $\beta_i \geqslant 0$.
  De plus, $\mathbb{P}([X_0 = i]) \neq 0$ donc $\beta_i \neq 0$ par hypothèse.
  On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre β_i. Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

  $$\boxed{\text{Donc la loi de } Y_i \text{ pour la probabilité conditionnelle } \mathbb{P}_{[X_0=i]} \text{ est la loi exponentielle de paramètre } \beta_i.}$$

Commentaire

Les compositions de DL ne sont pas au programme et ne sont pas exigibles des candidat·es, mais cette technique de calcul nous a semblé être dans l'esprit de ce sujet TOP3.
Pour rester dans le cadre strict du programme, il est possible de faire un calcul d'équivalent plutôt qu'un calcul de DL. Cela alourdit légèrement la rédaction car nous devons vérifier que nous n'écrivons pas d'équivalent à 0 et c'est sans doute moins naturel dans ce contexte, mais détaillons tout de même cette rédaction.
Notons, pour tout k assez grand, $u_k = -\frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$.
Puisque $x > 0$ et $\beta_i > 0$:

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\beta_i}{k}x$$

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$ et pour tout k assez grand, $u_k \neq 0$.
On peut donc écrire :

$$\ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \ln(1+u_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\beta_i}{k}x$$

puis

$$k\ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\beta_i x$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} k\ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) = -\beta_i x$$

□

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([Y > x]) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k])e^{-\beta_k x}$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$. La famille $([X_0 = k])_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([Y > x]) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k])$$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathbb{P}([X_0 = k]) \neq 0$. Alors

  $$\mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k]) = \mathbb{P}([X_0 = k])\mathbb{P}_{[X_0=k]}([Y > x])$$

  Si l'événement $[X_0 = k]$ est réalisé, alors, par définition, Y est le premier instant t tel que $X_t \neq k$, autrement dit $[Y = Y_k]$ est réalisé. D'où

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k]) &= \mathbb{P}([X_0 = k])\mathbb{P}_{[X_0=k]}([Y_k > x]) \\ &= \mathbb{P}([X_0 = k])e^{-\beta_k x} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)}\end{aligned}$$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathbb{P}([X_0 = k]) = 0$. Alors, par un raisonnement analogue à celui fait en question ***3.a)***, on a aussi

  $$\mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k]) = \mathbb{P}([X_0 = k])e^{-\beta_k x}$$

  car

  $$\mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k]) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_0 = k])e^{-\beta_k x} = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : pour tout } x \geqslant 0,\ \mathbb{P}([Y > x]) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) e^{-\beta_k x}.}$$

□

d) En conclure que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.

Démonstration.

- Tout d'abord, $Y(\Omega) =]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x \leqslant 0$, alors :
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  - × Si $x > 0$, alors :
$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([Y > x]) && \textit{(par passage au complémentaire)} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) e^{-\beta_k x} && \textit{(d'après la question } \textbf{7.c)}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) e^{-\beta_k x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

- On en déduit que la fonction F_Y est :
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle **ouvert** $]-\infty, 0[$ car constante sur cet intervalle,
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle **ouvert** $]0, +\infty[$ par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
  - × continue en 0. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} F_Y(x) &= \lim_{x \to 0} 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) e^{-\beta_k x} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) \\ &= 0 && \textit{(car } ([X_0 = k])_{1 \leqslant k \leqslant n} \textit{ est un système complet d'événements)} \\ &= F_Y(0) \\ &= \lim_{x \to 0^-} F_Y(x) \end{aligned}$$

  Finalement, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

$$\boxed{\text{Donc } Y \text{ est une variable à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité de Y, on dérive sa fonction de répartition sur les intervalles ouverts où elle est de classe $\mathcal{C}^1$. On pose :

$$f_Y : t \mapsto \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) \beta_k e^{-\beta_k x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  et on prolonge f_Y en 0 en posant $f_Y(0) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_Y \text{ est une densité de } Y.}$$

□

e) On note $I = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid \mathbb{P}([X_0 = k]) \neq 0\}$. Établir que Y admet une espérance égale à $\sum_{k \in I} \frac{\mathbb{P}([X_0 = k])}{\beta_k}$.

Démonstration.
La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt$ converge absolument, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt &= \int_0^{+\infty} t f_Y(t)\, dt && \textit{(car } f_Y \textit{ est nulle en dehors }]0, +\infty[\textit{)} \\
&= \int_0^{+\infty} t \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) \beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k \in I} \mathbb{P}([X_0 = k]) t \beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt && \textit{(les autres termes étants nuls)}
\end{aligned}$$

Soit $k \in I$. Montrons que $\int_0^{+\infty} t \beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt$ converge.
Tout d'abord, remarquons que $\beta_k > 0$ (même raisonnement qu'en question ***7.b)***).
On reconnaît alors le moment d'ordre 1 d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre β_k. Ainsi, $\int_0^{+\infty} t \beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} t \beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt = \frac{1}{\beta_k}$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \sum_{k \in I} \mathbb{P}([X_0 = k]) t \beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt$ converge, et par linéarité (c'est bien une somme finie) :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt &= \sum_{k \in I} \mathbb{P}([X_0 = k]) \int_0^{+\infty} t \beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt \\
&= \sum_{k \in I} \mathbb{P}([X_0 = k]) \frac{1}{\beta_k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } Y \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y) = \sum_{k \in I} \frac{\mathbb{P}([X_0 = k])}{\beta_k}.}$$

□

Partie 2 - Matrice de transition, lien avec la matrice génératrice

On utilise les notations de la partie 1.

8. *Définition de la matrice de transition* - Pour tous $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ et $s \geqslant 0$, si $t \in S_i$, on pose

$$m_{i,j}(s) = \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+s}=j])$$

qui ne dépend pas de t d'après les hypothèses (H_4) et (H_5).
On note $M(s)$ la matrice d'élément générique $m_{i,j}(s)$.

a) Établir que pour tout $s \geqslant 0$, $L_s = L_0 M(s)$.

Démonstration.
Soit $s \geqslant 0$.
Le coefficient $m_{i,j}(s)$ ne dépend pas de t donc on peut, pour $i \in I$, choisir de l'écrire avec $t = 0$:

$$m_{i,j}(s) = \mathbb{P}_{[X_0=i]}([X_s=j])$$

Fixons $j \in [\![1,n]\!]$.

- D'une part, la famille $([X_0=i])_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_s=j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_0=i]\cap[X_s=j]) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}([X_0=i]\cap[X_s=j]) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}([X_0=i])\mathbb{P}_{[X_0=i]}([X_s=j]) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}([X_0=i])m_{i,j}(s)\end{aligned}$$

- D'autre part,

$$\begin{aligned}L_0M(s) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_0=i])m_{i,1}(s) \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_0=i])m_{i,2}(s) \ldots\ldots \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_0=i])m_{i,n}(s)\right) \\ &= \left(\sum_{i\in I} \mathbb{P}([X_0=i])m_{i,1}(s) \quad \sum_{i\in I} \mathbb{P}([X_0=i])m_{i,2}(s) \ldots\ldots \sum_{i\in I} \mathbb{P}([X_0=i])m_{i,n}(s)\right)\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}[L(s)]_j &= \mathbb{P}([X_s=j]) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}([X_0=i])m_{i,j}(s) \\ &= [L_0M(s)]_j\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } L(s) = L_0M(s).}$$

Commentaire

On réutilise dans cette preuve la notation introduite en question ***7.e)*** :

$$I = \{k \in \{1,\dots,n\} \mid \mathbb{P}([X_0=k]) \neq 0\}$$

En restreignant la somme aux indices $i \in I$, on fait disparaître des termes nuls et on s'assure de n'écrire que des probabilités conditionnelles qui ont un sens.

□

b) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $r \in S_i$. En utilisant la propriété (H_2) et en distinguant les cas où $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k])$ est nulle ou non, montrer que pour tous $(j, k) \in \{1, \ldots, n\}^2$, s et t des réels positifs :

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i]) m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

En déduire que, pour tous $j \in \{1, \ldots, n\}$ et s, t des réels positifs,

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i]) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

Démonstration.
Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et soit $r \in S_i$. Par définition, $\mathbb{P}([X_r = i]) \neq 0$.
Soient $(j, k) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$. Deux cas se présentent.

- Premier cas : $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) \neq 0$.
  Alors $\mathbb{P}([X_{r+s} = k]) \neq 0$, c'est-à-dire $r + s \in S_k$.
  Pour utiliser la propriété (H_2), il faut des instants $t_1 < \cdots < t_m$ distincts, donc il faut encore séparer deux cas.
  - × Supposons $s > 0$.
    On peut alors écrire, en appliquant la formule des probabilités composées :
    $$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) \\ = {} & \mathbb{P}([X_r = i]) \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k]) \mathbb{P}_{[X_r=i] \cap [X_{r+s}=k]}([X_{r+s+t} = j]) \\ = {} & \mathbb{P}([X_r = i]) \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k]) \mathbb{P}_{[X_{r+s}=k]}([X_{r+s+t} = j]) && \textit{(par } (H_2) \textit{ car } r < r + s\textit{)} \\ = {} & \mathbb{P}([X_r = i]) m_{i,k}(s) m_{k,j}(t) \end{aligned}$$
  - × Supposons maintenant $s = 0$.
    Alors on doit nécessairement avoir $k = i$, sinon on aurait $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) = \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_r = k]) = 0$.
    Ainsi, d'une part :
    $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) &= \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_r = i] \cap [X_{r+t} = j]) \\ &= \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+t} = j]) \\ &= \mathbb{P}([X_r = i]) \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+t} = j]) \\ &= \mathbb{P}([X_r = i]) m_{i,j}(t) \end{aligned}$$
    et d'autre part :
    $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_r = i]) m_{i,k}(s) m_{k,j}(t) &= \mathbb{P}([X_r = i]) m_{i,i}(0) m_{i,j}(t) \\ &= \mathbb{P}([X_r = i]) m_{i,j}(t) \end{aligned}$$
    En effet,
    $$m_{i,i}(0) = \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_r = i]) = 1$$

- Deuxième cas : $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) = 0$.
  Alors, d'une part,
  $$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = 0$$
  et d'autre part,
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_r = i])m_{i,k}(s)m_{k,j}(t) &= \mathbb{P}([X_r = i])\mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k])m_{k,j}(t) \\ &= \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k])m_{k,j}(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

On a bien montré, dans tous les cas :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i])m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).}$$

Pour finir, la famille $([X_{r+s} = k])_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_r = i])m_{i,k}(s)m_{k,j}(t) \\ &= \mathbb{P}([X_r = i]) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)m_{k,j}(t)\end{aligned}$$

□

c) En conclure que pour tous s et t, des réels positifs, $M(s + t) = M(s)M(t)$.

Démonstration.
Soit $s \geqslant 0$ et soit $t \geqslant 0$.
Soit $(i, j) \in \{1, \dots , n\}^2$. Soit $r \in S_i$ (il existe bien un tel réel d'après (H_3)).
D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i]) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)m_{k,j}(t)$$

Or, on a également :

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i])m_{i,j}(s + t)$$

En simplifiant par $\mathbb{P}([X_r = i]) \neq 0$, on obtient :

$$m_{i,j}(s + t) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)m_{k,j}(t)$$

Or, $m_{i,j}(s + t)$ est le coefficient à la position (i, j) de la matrice $M(s + t)$ et, par définition du produit matriciel, $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)m_{k,j}(t)$ est le coefficient à la position (i, j) de la matrice $M(s)M(t)$.
L'égalité précédente étant valable pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots , n\}^2$,

$$\boxed{\text{on a bien : } M(s + t) = M(s)M(t).}$$

□

d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel positif, $M(kt) = (M(t))^k$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $M(kt) = (M(t))^k$ ».
Initialisation :
$M(t)^1 = M(t) = M(1 \times t)$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} M((k+1)t) &= M(kt+t) \\ &= M(kt)M(t) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.c)}}\textit{, car } t \geqslant 0 \textit{ et } kt \geqslant 0\textit{)} \\ &= (M(t))^k M(t) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= M(t^{k+1}) \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{On a montré par récurrence : pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ M(kt) = (M(t))^k.}$$

□

- Si $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite de matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, A une matrice appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si l'on note $a_{i,j}(k)$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A_k, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de A, alors on écrira $A = \lim\limits_{k \to +\infty} A_k$ si pour $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{i,j}(k) = a_{i,j}$.
  On dit alors que la suite $(A_k)_{k \geqslant 1}$ converge vers A.
- On admet, dans la suite de cette partie et dans la partie 3, que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = \lim_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k} G \right)^k \qquad (**)$$

9. On veut simuler le processus à partir de la donnée de la matrice G et de L_0. On admet que pour $t \in [0, 100]$, on peut considérer que $M(t) = \left(I_n + \frac{t}{1000} G\right)^{1000}$.

- On importe des bibliothèques :
  `numpy as np`, `numpy.random as rd`, `matplotlib.pyplot as plt`, `numpy.linalg as al`
- On rappelle que si `M` est une matrice, représentée par un tableau `numpy`, `M[:,j]` désigne le vecteur des coefficients de la `j`-ème colonne de `M`, de même pour `M[i,:]` et la `i`-ème ligne de `M`.

a) Écrire une fonction **Python** `transition(t,G)` de paramètres `G` représentant la matrice génératrice carrée d'ordre n et `t`, qui renvoie la matrice $\left(I_n + \frac{t}{1000} G\right)^{1000}$.

Démonstration.

```
def transition(t, G):
    # On récupère n en calculant la taille de la matrice carrée G
    n = len(G)
    # On crée la matrice identité d'ordre n
    I = np.eye(n)
    return al.matrix_power(I + (t / 1000)*G, 1000)
```

Commentaire

On peut être très économe et écrire directement

```
def transition(t, G):
    return al.matrix_power(np.eye(len(G)) + (t / 1000)*G, 1000)
```

mais cela rend le code moins facile à lire car il y a beaucoup de formules emboitées.

□

b) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `traceLoi2Xt(G,L0,tmax)` qui trace, sur un même graphique, les graphes des fonctions $t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i])$ sur le segment $[0, t_{\max}]$ pour i variant de 1 à n, `G` et `L0` représentant, respectivement, la matrice génératrice du processus et la ligne L_0.
On utilisera 1000 points pour les graphes.

Démonstration.

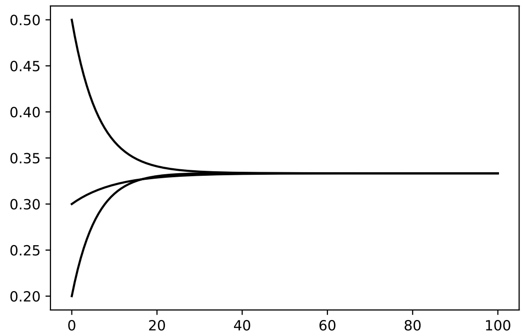
- On remarque que la loi de X_t est donnée par le vecteur $L_0 M(t)$. En utilisant la fonction précédente, on peut ainsi récupérer la loi de X_t via la commande `np.dot(L0, transition(t, G))`.
- On discrétise le segment $[0, t_{\max}]$ en 1000 points, que l'on note $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{999} = t_{\max}$. Cette discrétisation est stockée dans la variable `abscisse`.
- On construit ensuite une (grande) matrice $T \in \mathscr{M}_{n,1000}(\mathbb{R})$, dont la colonne j contient la loi de X_{t_j}. Une fois cette matrice construite, la discrétisation de la fonction $t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i+1])$ est stockée dans la ligne `T[i,:]` de la matrice `T` (le décalage d'indice provient du fait que $X_t(\Omega) = [\![1, n]\!]$ tandis que **Python** numérote à partir de 0).
- On peut alors tracer le graphe de $t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i+1])$ en traçant la ligne `T[i,:]` au dessus de `abscisse`, ce qui est fait par la commande `plt.plot(abscisse, T[i,:])`.

On propose finalement la fonction suivante :

```
def traceLoi2Xt(G, L0, tmax):
    n = len(G)
    abscisse = np.linspace(0, tmax, 1000)
    T = np.zeros([n,1000])
    for j in range(1000):
        t = abscisse[j]
        vectLoi = np.dot(L0, transition(t, G))
        # vectLoi contient la loi de X_{t_j}
        for i in range(n):
            T[i,j] = vectLoi[i]
    for i in range(n):
        plt.plot(abscisse, T[i,:])
    plt.show()
```

□

c) Si G est la matrice de la partie 1, question ***6.***, l'instruction,
`traceLoi2Xt(1/30*np.array([[-3,1,2],[1,-2,1],[2,1,-3]]),1/10*np.array([5,3,2]),100)`
affiche l'image suivante :
Expliquer en quoi ce graphique est cohérent avec un résultat obtenu précédemment.



Démonstration.
Le graphique représente les graphes des fonctions $t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i])$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où

$$n = 3, \qquad G = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad L_0 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad t_{\max} = 100$$

Il s'agit du contexte de la question ***6***.

D'après la question ***6.e)***, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \dfrac{1}{3}$.

C'est bien ce que l'on observe sur le graphique.

□

d) On veut simuler et représenter, sur un même graphique, les valeurs de $X_0, X_t, \ldots, X_{kt}$, pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, à partir de la loi de X_0 donnée dans une ligne `L0`. Compléter la fonction suivante pour qu'elle réalise cette tâche :

```
def simulX(t,k,L0,G):
    listeDesT=[] ; listeDesX=[]
    Mt=transition(t,G) ; Lt = L0
    for i in range(k+1):
        listeDesT.append(i*t)
        p=rd.random()
        s=...
        j=0
        while p>...:
            j+=1
            s+=Lt[j]
        Lt=...
        listeDesX.append(j+1)
    plt.plot(listeDesT,listeDesX) ; plt.show()
```

Démonstration.
Il est possible de compléter la fonction de la manière suivante.

```
1  def simulX(t,k,L0,G):
2      listeDesT=[] ; listeDesX=[]
3      Mt=transition(t,G) ; Lt = L0
4      for i in range(k+1):
5          listeDesT.append(i*t)
6          p=rd.random()
7          s=Lt[0]
8          j=0
9          while p>s:
10             j+=1
11             s+=Lt[j]
12         Lt=Mt[j,:]
13         listeDesX.append(j+1)
14     plt.plot(listeDesT,listeDesX) ; plt.show()
```

Expliquons maintenant comment arriver à ce résultat, en commençant par interpréter quelques notations :

- La liste `listeDesT` doit contenir les nombres $0, t, \dots, kt$. Les lignes 4 et 5 permettent de construire cette liste de manière itérative. Notons qu'on aurait pu la définir en une seule ligne en écrivant `listeDesT = [i*t for i in range(k+1)]`.
- La liste `listeDesX` doit contenir les valeurs simulées de $X_0, X_t, \dots, X_{kt}$. Les lignes 4 et 13 permettent de construire cette liste de manière itérative. Nous expliquerons ci-dessous comment est obtenue la valeur de j utilisée à la ligne 13.
- La loi de X_0 est donnée par la matrice ligne L_0, représentée en **Python** par `L0`.
  On définit une variable `Lt = L0`. Initialement, le vecteur `Lt` contient donc la loi de X_0. On veut, au cours de la boucle `for` de la ligne 4, mettre à jour la variable `Lt` pour qu'elle contienne successivement les lois de $X_0, X_t, X_{2t}, \dots, X_{kt}$.

Il est important de comprendre que dans un processus de Markov, les variables aléatoires X_0, X_t, …, X_{kt} ne sont pas indépendantes et que l'on doit donc les simuler dans cet ordre (chronologique), de manière récursive. Détaillons maintenant le raisonnement permettant de mettre à jour correctement la variable `Lt`, afin qu'elle contienne bien la loi de X_{it} au moment où l'on souhaite simuler cette variable aléatoire.

- Comme dit précédemment, initialement `Lt = L0` donc `Lt` contient bien la loi de X_0. Au premier tour de boucle ($i = 0$), on peut donc simuler X_0.
- Supposons avoir simulé $X_0, X_t, \dots, X_{mt}$ après $m + 1$ tours de boucles. Comment simuler $X_{(m+1)t}$?
  Notons $j_0, \dots, j_m$ les valeurs prises par $X_0, X_t, \dots, X_{mt}$. Il s'agit alors de simuler la loi conditionnelle de $X_{(m+1)t}$ sachant que l'événement $[X_0 = j_0] \cap \dots \cap [X_m = j_m]$ est réalisé. Or, d'après (H_2),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X_0=j_0]\cap\dots\cap[X_m=j_m]}\big(\big[X_{(m+1)t} = j\big]\big) &= \mathbb{P}_{[X_{mt}=j_m]}\big(\big[X_{(m+1)t} = j\big]\big)\\ &= m_{j_m,j}(t)\end{aligned}$$

  Ainsi, la loi conditionnelle de $X_{(m+1)t}$ sachant que l'événement $[X_0 = j_0] \cap \dots \cap [X_m = j_m]$ est réalisé est donnée par la ligne numéro j_m de la matrice $M(t)$. Puisque $M(t)$ est représentée par `Mt` et que **Python** commence la numérotation à 0, on obtient cette ligne via l'appel `Mt[j,:]` si $j + 1 = j_m$ (autrement dit, si X_{mt} a pris la valeur $j + 1$). Ceci est cohérent avec les lignes 12 (mise à jour de `Lt` pour pouvoir simuler $X_{(m+1)t}$ au prochain tour de boucle) et 13 (ajout de la valeur simulée de X_{mt} à la liste `listeDesX`).

```
12            Lt=Mt[j,:]
13            listeDesX.append(j+1)
```

Il reste à expliquer comment est effectuée la simulation de X_{mt} à partir du vecteur `Lt` (contenant sa loi conditionnelle sachant la valeur prise par $X_{(m-1)t}$). Il s'agit de l'implémentation classique de la méthode d'inversion pour une variable aléatoire discrète finie, que l'on rappelle ci-dessous.
On considère X telle que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et on note

$$(\mathbb{P}([X = 1]), \dots, \mathbb{P}([X = n])) = (p_0, \dots, p_{n-1})$$

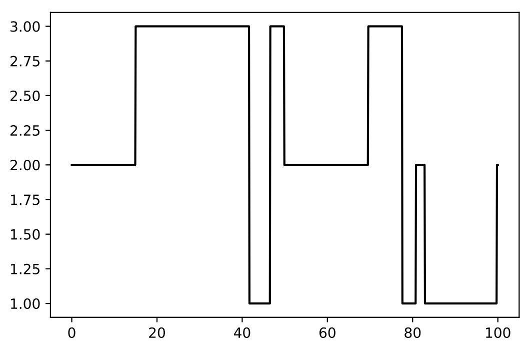
(la numérotation des p_i se fait à partir de 0 pour avoir la même convention que **Python**, en ayant en tête que p_i est donné par `Lt[i]`)
On simule alors X en tirant au hasard un nombre p entre 0 et 1 (`p=rd.random()`) et en attribuant à X la valeur $j+1$ si

$$p_0 + \dots + p_{j-1} < p \leqslant p_0 + \dots + p_{j-1} + p_j$$

Pour trouver la valeur de j, on met en place une structure itérative à l'aide d'une boucle `while`. On teste si $p \leqslant p_0$, puis si $p \leqslant p_0 + p_1$, etc. Cette boucle while doit s'arrêter puisque on a nécessairement $p \leqslant p_0 + \dots + p_{n-1} = 1$. Il faut, à l'intérieur de cette boucle, calculer la somme $p_0 + \dots + p_i$, ce qui se fait à l'aide de la variable `s`. Cette méthode d'inversion est implémentée de la ligne 6 à la ligne 11.

```
6            p=rd.random()
7            s=Lt[0]
8            j=0
9            while p>s:
10                j+=1
11                s+=Lt[j]
```

On donne un exemple d'appel de cette fonction, avec $t = 0,1$ et $k = 1000$, ainsi que G et L_0 comme à la question ***9.c)***.



Commentaire

- La démarche suivie à cette question est très similaire à celle de la simulation d'une chaîne de Markov. Si l'on note $Y_i = X_{it}$, la suite (Y_i) est une chaîne de Markov (ce qui revient à discrétiser le processus de Markov continu).
- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.

□

Partie 3 - Deux exemples de modélisations

On conserve les notations des deux premières parties.

10. On considère trois états pour le recouvrement d'un crédit bancaire après un défaut de paiement et un accord entre le débiteur et l'organisme de crédit sur la somme à recouvrer :

- 1 - en cours de recouvrement, lorsque le débiteur est en train de régulariser sa créance ;
- 2 - recouvré, lorsque le débiteur a honoré la totalité du montant dû ;
- 3 - non recouvré, lorsque l'organisme de crédit considère que l'argent est définitivement perdu.

La matrice génératrice G du processus de Markov modélisant ce phénomène est $\begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, α et β étant des réels strictement positifs.

a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1} G$.

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(i)$
où $\mathcal{P}(i)$: « $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1} G$ ».
Initialisation :
D'une part, $G^1 = G$. D'autre part $(-\alpha-\beta)^{1-1} G = (-\alpha-\beta)^0 G = G$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité : soit $i \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(i)$. Montrons $\mathcal{P}(i+1)$.

$$\begin{aligned} G^{i+1} &= G^i G \\ &= (-\alpha-\beta)^{i-1} G G && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-\alpha-\beta)^{i-1} G^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} G^2 &= \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-\alpha-\beta)(-\alpha-\beta) & (-\alpha-\beta)\alpha & (-\alpha-\beta)\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-\alpha-\beta) G \end{aligned}$$

donc

$$G^{i+1} = (-\alpha - \beta)^{i-1}(-\alpha - \beta)G = (-\alpha - \beta)^i G$$

d'où $\mathcal{P}(i+1)$.

$$\boxed{\text{On a montré par récurrence : pour tout } i \in \mathbb{N}^*,\ G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1}G.}$$

□

b) En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel : $(I_3 + \frac{t}{k}G)^k = I_3 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(\frac{t}{k})^i(-\alpha - \beta)^{i-1}\right) G$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Les matrices I_3 et $\frac{t}{k}G$ commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices de même taille). On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(I_3 + \frac{t}{k}G)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}G\right)^i I_3^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i \\
&= \left(\frac{t}{k}\right)^0 G^0 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i && \textit{(découpage valable car } k \geqslant 0\textit{)} \\
&= I_3 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} G && \textit{(égalité valable car } i \geqslant 1\textit{)} \\
&= I_3 + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1}\right) G
\end{aligned}$$

□

c) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel, $\sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(\frac{t}{k})^i(-\alpha - \beta)^{i-1} = \dfrac{1 - (1 - (\alpha + \beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha + \beta}$ et en déduire que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha + \beta)t)}{\alpha + \beta} G$$

Démonstration.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et t un réel.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1} \\
=&\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-(\alpha+\beta))^{i-1} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-(\alpha+\beta))^{i} && \textit{($\alpha>0$ et $\beta>0$ donc $\alpha+\beta\neq 0$)} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^i 1^{n-i} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^i 1^{n-i} - 1\right) \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)} \left(\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k - 1\right) && \textit{(par binôme de Newton)} \\
=&\frac{1-(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

On remarque que l'égalité $M(t) = I_3 + \dfrac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G$ est valable si $t=0$. En effet :

× D'une part, $M(0) = I_3$.

× D'autre part, $I_3 + \dfrac{1-\exp(-(\alpha+\beta)\times 0)}{\alpha+\beta} G = I_3 + \dfrac{1-1}{\alpha+\beta} G = I_3$.

On suppose dans la suite de cette preuve que $t>0$.
D'après $(**)$,

$$M(t) = \lim_{k\to+\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$$

et d'après ce qui précède

$$\left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \frac{1-(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta} G$$

Or,

$$\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \mathrm{e}^{k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)}$$

et $\lim\limits_{k\to+\infty} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k} = 0$, avec $(\alpha+\beta)t \neq 0$, donc on peut écrire que

$$\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k}$$

d'où

$$k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)t$$

ce qui entraîne

$$\lim_{k\to+\infty} k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) = -(\alpha+\beta)t$$

et enfin, par continuité de exp sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } M(t) = I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G.}$$

Commentaire

On utilise à la dernière étape de cette preuve deux propriétés des limites de suites de matrices qui ne sont pas au programme mais qui sont naturelles :

- si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\ell G = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n G$
- si $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$, alors $I_3 + A = \lim\limits_{n\to+\infty} I_3 + A_n$

Il ne semble pas être dans l'esprit de ce sujet TOP3 de devoir détailler la preuve de ces propriétés lors de cette question.

□

d) En conclure que pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X_t = 1]) = \exp(-(\alpha+\beta)t)$,
$\mathbb{P}([X_t = 2]) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))$ et $\mathbb{P}([X_t = 3]) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))$

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\mathbb{P}([X_t=1]) & \mathbb{P}([X_t=2]) & \mathbb{P}([X_t=3])\end{pmatrix} &= L_t \\
&= L_0 M(t) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.a)}}\textit{)} \\
&= L_0\left(I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.c)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

Or, $L_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc $L_0\left(I_3 + \dfrac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G\right)$ est la première ligne de la matrice :

$$I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}-\alpha-\beta & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_t=1]) &= 1 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}(-\alpha-\beta) \\
&= 1-(1-\exp(-(\alpha+\beta)t)) \\
&= \exp(-(\alpha+\beta)t)
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_t=2]) &= \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}\alpha \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_t = 3]) &= \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}\beta \\ &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))\end{aligned}$$

Commentaire

On peut vérifier à vue que $\mathbb{P}([X_t = 1]) + \mathbb{P}([X_t = 2]) + \mathbb{P}([X_t = 3]) = 1$. C'est un réflexe à avoir avant d'encadrer son ou ses résultats, afin de détecter une éventuelle erreur de calcul.

□

e) En utilisant les résultats de la question ***7.*** de la partie 1, montrer que le temps aléatoire passé en recouvrement suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha + \beta$.

Démonstration.
$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $X_0 = 1$ (à l'instant 0, le crédit bancaire est en cours de recouvrement).
Si le processus de Markov passe dans l'état 2 ou 3, il devient stationnaire et ne revient jamais dans l'état 1. Ainsi, le temps aléatoire passé en recouvrement coïncide avec le temps initial passé dans l'état 1.
On en déduit que le temps aléatoire passé en recouvrement suit la loi de Y_1 pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_0=1]}$ (notations de la question ***7***).
D'après la question ***7.b)***, cette loi conditionnelle est la loi exponentielle de paramètre $\beta_1 = -\alpha_{1,1}$.
Dans notre contexte : $\alpha_{1,1} = -\alpha - \beta$.

$\boxed{\text{Finalement : le temps aléatoire passé en recouvrement suit la loi exponentielle de paramètre } \alpha+\beta.}$

□

11. On distingue, pour l'accès au crédit d'une organisation, trois niveaux de solvabilité :

- 1 - niveau C ;
- 2 - niveau B ;
- 3 - niveau A.

On suppose que ce niveau évolue dans le temps suivant un processus de Markov avec $G = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ 4\alpha & 0 & -4\alpha \end{pmatrix}$ et $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$. On note aussi $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) On admet que $A^3 = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 2A^2 + A$ (on explicitera A^2). Que peut-on dire du polynôme $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$?

Démonstration.
Tout d'abord :

$$A^2 = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
A^3-2A^2+A &= \frac{1}{3^3}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - \frac{2}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3^3}\left(\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + 3^2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{3^3}\left(\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 & -6 \\ -24 & -6 & 30 \\ 120 & -24 & -96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ -36 & 0 & 36 \end{pmatrix}\right) \\
&= 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : le polynôme } U \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

□

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'il existe un polynôme Q et des réels a, b, c tels que, pour tout x réel : $\left(1+\frac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c \quad (*)$.

b) Déterminer une factorisation de $U(x)$ et en déduire que $c = 1$ et $\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k = a+b+c$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
U(x) &= x^3 - 2x^2 + x \\
&= x(x^2-2x+1) \\
&= x(x-1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, 0 est racine simple de U et 1 est racine double de U, ce qui implique que $U(1) = U(0) = 0$ et $U'(1) = 0$.
En évaluant $(*)$ en $x = 0$, on trouve :

$$\boxed{c = 1}$$

En évaluant $(*)$ en $x = 1$, on trouve :

$$\boxed{a+b+c = \left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k}$$

□

c) En dérivant la relation $(*)$, montrer que, $\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a+b$.
En déduire que $a = \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k + 1$, $b = 2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2$.

Démonstration.
On dérive la relation $(*)$ par rapport à x :

$$Q'(x)U(x) + Q(x)U'(x) + 2ax + b = \frac{\theta}{k}k\left(1+\frac{\theta}{k}x\right)^{k-1} = \theta\left(1+\frac{\theta}{k}x\right)^{k-1} \qquad (*')$$

En évaluant $(*')$ en $x = 1$, on trouve (puisque $U'(1) = U(1) = 0$) :

$$\boxed{2a+b=\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}}$$

Or,

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k-1 \\ 2a+b=\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a+b=\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k-1 \\ -b=\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}-2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k+2 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} a & =\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}+1-\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k \\ & -b=\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}-2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k+2 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1+L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} a & =\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}-\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k+1 \\ & b=2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k-\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}-2 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\boxed{\text{D'où : } a=\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}-\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k+1 \text{ et } b=2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k-\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}-2}$$

□

d) En conclure que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t)=\left(1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)A^2+((2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-2)A+I_3$$

puis préciser la loi de X_t.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.
D'après l'égalité $(**)$ admise :

$$M(t)=\lim_{k\to+\infty}\left(I_3+\frac{t}{k}G\right)^k$$

On a montré que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left(I_3+\frac{\theta}{k}A\right)^k &= Q(A)U(A)+aA^2+bA+cI_3 \\ &= aA^2+bA+cI_3 \qquad \textit{(car } U(A)=0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)}\end{aligned}$$

où

$$a=\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}-\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k+1, \qquad b=2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k-\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1}-2, \qquad c=1$$

On remarque que $G=-\alpha A$. On applique alors le résultat précédent avec $\theta=-\alpha t$, ce qui donne :

$$\left(I_3+\frac{t}{k}G\right)^k=aA^2+bA+cI_3$$

où

$$a=-\alpha t\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1}-\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^k+1, \qquad b=2\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^k+\alpha t\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1}-2, \qquad c=1$$

De manière analogue à la question ***10.c)***, on montre que

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1}=\mathrm{e}^{-t\alpha} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^k=\mathrm{e}^{-t\alpha}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned}M(t) &= (-\alpha t\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\alpha t} + 1)A^2 + (2\mathrm{e}^{-\alpha t} + \alpha t\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2)A + I_3 \\ &= \left(1 - (1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) A^2 + ((2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2)A + I_3\end{aligned}$$

Pour finir, rappelons que $L_t = L_0 M(t)$. Or, $L_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc L_t est la première ligne de la matrice $M(t)$.

$$M(t) = \left(1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16\end{pmatrix} + ((2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -4 & 0 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_t = 1]) &= \frac{1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{3^2} + \frac{(2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2}{3} + 1 \\ &= \frac{1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} + 3(2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 6 + 9}{9} \\ &= \frac{4 + (6 + 3\alpha t - 1 - \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9} \\ &= \frac{4 + (5 + 2\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_t = 2]) &= \frac{2(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2}{3^2} + \frac{2 - (2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{3} \\ &= \frac{2(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2 + 6 - 3(2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9} \\ &= \frac{4 + (2 + 2\alpha t - 6 - 3\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9} \\ &= \frac{4 - (4+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}\end{aligned}$$

et enfin

$$\mathbb{P}([X_t = 3]) = \frac{1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}$$

Commentaire

On peut vérifier à vue que $\mathbb{P}([X_t = 1]) + \mathbb{P}([X_t = 2]) + \mathbb{P}([X_t = 3]) = 1$. C'est un réflexe à avoir avant d'encadrer son ou ses résultats, afin de détecter une éventuelle erreur de calcul.

$\square$

Partie 4 - Démonstration de l'égalité $(**)$ admise dans la partie 2

On utilise les notations et définitions des deux premières parties.

- On définit pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$ c'est-à-dire la plus grande valeur que prend $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ lorsque i décrit $\{1,\ldots,n\}$.
- On admet que si $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et A appartenant aussi à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \lim\limits_{k\to+\infty} A_k$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A_k - A\| = 0$.

Commentaire

Cette dernière partie introduit, sans le dire, une *norme matricielle.*
Si E est un espace vectoriel, on définit une *norme* (vectorielle) sur E comme étant une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant trois axiomes :

- $\|0_E\| = 0$ et pour tout $u \neq 0_E$, $\|u\| > 0$ (séparation).
- Pour tout $(u,v) \in E^2$, $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire, d'après la question ***14.a)***).
- Pour tout $u \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$ (absolue homogénéité).

Une telle application permet de donner un sens précis à la notion de *longueur d'un vecteur*. D'après les axiomes, seul le vecteur nul à une longueur nulle.
Remarquons que la valeur absolue est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}$. D'une certaine manière, le concept de norme généralise la valeur absolue à un espace vectoriel quelconque.
Dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = a$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} |a_k - a| = 0$. Le résultat admis sur les suites de matrices est une généralisation de ce fait.

On peut toujours créer une distance à partir d'une norme. Il suffit de définir l'application $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ par

$$\forall (u,v) \in E^2,\ d(u,v) = \|u - v\|$$

Une application $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$, pour être appelée *distance*, doit vérifier les trois axiomes :

- Pour tout $(u,v) \in E^2$, $d(u,v) = d(v,u)$ (symétrie).
- Pour tout $(u,v) \in E^2$, $d(u,v) = 0 \iff u = v$ (séparation).
- Pour tout $(u,v,w) \in E^3$, $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v)$ (inégalité triangulaire).

Avec le concept de distance, on peut écrire $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = a$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} d(a_k, a) = 0$. La suite (a_k) converge vers a si et seulement si la distance entre a_k et a tend vers 0, ce qui est tout à fait naturel. Les mots sont donc bien choisis.

Revenons maintenant à l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit d'un espace vectoriel, mais on peut aussi faire le produit de deux matrices, ce qui en fait une algèbre (structure algébrique hors programme). La question ***14.c)*** montre que la norme introduite est une *norme d'algèbre* : elle est sous-multiplicative. Il existe beaucoup de normes matricielles sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La norme choisie dans l'énoncé est la norme *subordonnée* à la norme infinie de $\mathbb{R}^n$, mais expliquer précisément ces termes nous emmènerait un peu trop loin par rapport à l'objectif que se fixe ce corrigé.

12. *Un exemple* - Si $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que $\|A\| = 2$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

donc

- $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{1,j}| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$
- $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{2,j}| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{3,j}| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$

$$\boxed{\text{D'où : } \|A\| = \max\left(1, \frac{2}{3}, 2\right) = 2.}$$

□

13. Soit $t \geqslant 0$.

a) Établir $\|M(t)\| = 1$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $r \in S_i$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}(t)| &= \sum_{j=1}^{n} \left|\mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+t} = j])\right| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+t} = j]) && \textit{(car } \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+t} = j]) \geqslant 0\textit{)} \\ &= 1 && \textit{(d'après la question 2.)} \end{aligned}$$

D'où

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}(t)|\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (1) = 1$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \|M(t)\| = 1.}$$

Commentaire

Il est étrange de rappeler l'existence de la question ***2.*** à la question suivante mais pas à celle-ci, alors qu'on peut également l'utiliser pour ne pas avoir à réécrire l'argument du système complet d'événements.

□

b) En utilisant la question ***2.*** de la partie 1, montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $\|I_n + \frac{t}{k}G\| = 1$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $A_k = I_n + \frac{t}{k}G = (a_{i,j}(k))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$,

$$a_{i,j}(k) = \begin{cases} \frac{t}{k}\alpha_{i,j} & \text{si } j \neq i \\ 1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i} & \text{si } j = i \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)| &= |a_{i,i}(k)| + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{i,j}(k)| \\
&= \left|1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \left|\frac{t}{k}\alpha_{i,j}\right| \\
&= \left|1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{t}{k}\alpha_{i,j} && \textit{(car pour tout } i \neq j,\ \alpha_{i,j} \geqslant 0,\ \textit{cf } (H_4)) \\
&= 1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{t}{k}\alpha_{i,j} && \textit{(pour } k \textit{ assez grand, car } \lim_{k\to+\infty} 1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i} = 1 > 0) \\
&= 1 + \frac{t}{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \\
&= 1 && \textit{(car } \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0,\ \textit{d'après la question } \textbf{\textit{2.}})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où, pour tout } k \text{ assez grand : } \|I_n + \tfrac{t}{k}G\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (1) = 1.}$$

□

14. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Établir que $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

Démonstration.
$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donc

$$\|A + B\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \right)$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} (|a_{i,j}| + |b_{i,j}|) && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&\leqslant \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

Le terme de droite ne dépend pas de i, donc on peut passer au max :

$$\boxed{\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.}$$

□

b) Montrer que $\|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

Démonstration.
Rappelons que $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$. De plus, l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est fini donc il existe un entier $i_0 \in [\![1,n]\!]$ vérifiant :

$$\|A\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

Or, $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq i_0}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \geqslant 0$ (somme de termes positifs) donc

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq i_0}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

$$\boxed{\text{D'où : } \|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.}$$

□

c) Démontrer que, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ puis que pour tout entier naturel n, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.

Démonstration.
Notons $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

Par définition,

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}|\right)\\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right|\right)\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| && \textit{(par inégalité triangulaire)}\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| && \textit{(par interversion de sommes)}\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,\|B\| && \textit{(car } \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \leqslant \|B\|\textit{)}\\ &\leqslant \|B\|\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| && \textit{(par linéarité de la somme)}\\ &\leqslant \|B\|\|A\| && \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leqslant \|A\|\textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le terme de droite ne dépend pas de } i\text{, donc on peut passer au max : } \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|.}$$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$ ».
Initialisation :
D'une part $\|A^0\| = \|I_n\| = 1$ et d'autre part $\|A\|^0 = 1$ d'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\|A^{n+1}\| &= \|A^n A\| \\
&\leqslant \|A^n\|\|A\| && \textit{(en appliquant le résultat précédent avec } B = A^n\textit{)} \\
&\leqslant \|A\|^n\|A\| && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant \|A\|^{n+1}
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{On a montré par récurrence : pour tout } n \in \mathbb{N},\ \|A^n\| \leqslant \|A\|^n.}$$

Commentaire

Les questions ***14.a)***, ***14.b)*** et ***14.c)*** mettent en jeu des raisonnements sur le max et des calculs matriciels théoriques qui sont classiques en filière scientifique, mais assez éloignés de ce qui se fait habituellement en prépa ECG, voie maths appliquée. Il s'agit donc de questions difficiles et seul·es les candidat·es ayant un fort recul sur les notions du programme pourront les aborder avec sérénité et rigueur.
Il ne faut pas pour autant se décourager, car il y a tout de même des questions simples dans cette partie, en particulier les récurrences.

□

d) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{k+1} - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A-B)B^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
A(A^k - B^k) + (A-B)B^k &= A^{k+1} - AB^k + AB^k - B^{k+1} \\
&= A^{k+1} - B^{k+1}
\end{aligned}$$

Commentaire

Démontrer cette formule ne pose aucune difficulté. Le concepteur a rajouté cette question non pas pour tester les candidat·es, mais parce qu'il a jugé, avec raison, qu'aucun·e candidat·e n'aurait été en mesure de penser tout·e seul·e à cette factorisation pour faire la prochaine question. Ainsi, sortir de l'épreuve sans traiter cette question est nécessairement la conséquence d'une mauvaise lecture de l'énoncé et d'une mauvaise gestion du temps, pas d'un niveau trop faible en mathématiques. Il faut s'habituer à repérer ce genre de questions et se forcer à les traiter en fin d'épreuve même si l'on doit pour cela passer 4 ou 5 questions d'affilée.

□

e) On pose $c = \max(\|A\|, \|B\|)$. Montrer, par récurrence sur k, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|A^k - B^k\| \leqslant kc^{k-1}\|A - B\|$$

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $\|A^k - B^k\| \leqslant kc^{k-1}\|A - B\|$ ».
Initialisation :
D'une part, $\|A^1 - B^1\| = \|A - B\|$ et d'autre part $1c^{1-1}\|A - B\| = \|A - B\|$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned}
\|A^{k+1} - B^{k+1}\| &= \|A(A^k - B^k) + (A - B)B^k\| && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{14.d)}}\textit{)} \\
&\leqslant \|A(A^k - B^k)\| + \|(A - B)B^k\| && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{14.a)}}\textit{)} \\
&\leqslant \|A\|\|A^k - B^k\| + \|A - B\|\|B\|^k && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{14.c)}}\textit{)} \\
&\leqslant c\|A^k - B^k\| + \|A - B\|c^k && (0 \leqslant \|B\| \leqslant c \textit{ donc } 0 \leqslant \|B\|^k \leqslant c^k) \\
&\leqslant ckc^{k-1}\|A - B\| + \|A - B\|c^k && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant kc^k\|A - B\| + \|A - B\|c^k \\
&\leqslant (k+1)c^k\|A - B\|
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

On a montré par récurrence : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k - B^k\| \leqslant kc^{k-1}\|A - B\|$.

□

15. Soit t un réel positif et $k \in \mathbb{N}^*$.

Commentaire

La variable k est muette dans les questions qui suivent, ainsi, seule la variable t devrait être fixée ici en principe.

a) Justifier que $\left\|M\left(\dfrac{t}{k}\right) - \left(I_n + \dfrac{t}{k}G\right)\right\| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

Démonstration.
Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = M\left(\dfrac{t}{k}\right) - \left(I_n + \dfrac{t}{k}G\right) = (a_{i,j}(k))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrons que $a_{i,j}(k) \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$. Deux cas se présentent.

- Premier cas : $j = i$. Alors

$$a_{i,i}(k) = m_{i,i}\left(\frac{t}{k}\right) - \left(1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right) = m_{i,i}\left(\frac{t}{k}\right) - 1 - \frac{t}{k}\alpha_{i,i}$$

Soit $r \in S_i$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
m_{i,i}\left(\frac{t}{k}\right) &= \mathbb{P}_{[X_r=i]}\left(\left[X_{r+\frac{t}{k}} = i\right]\right) \\
&= 1 + \alpha_{i,i}\frac{t}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) && \textit{(cf } (H_5)\textit{, } t \textit{ étant une constante)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{a_{i,i}(k) = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right).}$$

- Deuxième cas : $j \neq i$. Alors

$$a_{i,j}(k) = m_{i,j}\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{t}{k}\alpha_{i,j}$$

Soit $r \in S_i$, de sorte que :

$$\begin{aligned} m_{i,j}\left(\frac{t}{k}\right) &= \mathbb{P}_{[X_r=i]}\left(\left[X_{r+\frac{t}{k}} = j\right]\right) \\ &= \alpha_{i,j}\frac{t}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) \qquad \textit{(cf } (H_4)\textit{, } t \textit{ étant une constante)} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{a_{i,j}(k) = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right).}$$

On en déduit que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}(k)| = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$.
En utilisant le fait que n est une constante, il suit que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)| = n \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$$

et donc, en sommant sur $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)| = n \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Or, d'après la question ***14.b)*** :

$$0 \leqslant \left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| = \|A_k\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)|$$

d'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant k\left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| \leqslant k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)|$$

On en déduit, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{k\to+\infty} k\left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| = 0$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right).}$$

□

b) Montrer que pour tout k assez grand,

$$\left\| M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| \leqslant k\left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\|$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $c_k = \max\left(\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)\right\|, \left\|I_n + \frac{t}{k}G\right\|\right)$.
D'après la question ***13.a)***, $\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)\right\| = 1$.
D'après la question ***13.b)***, pour k assez grand, $\left\|I_n + \frac{t}{k}G\right\| = 1$.
Donc, pour k assez grand, $c_k = 1$.
Soit k assez grand. On applique la question ***14.e)*** :

$$\begin{aligned}\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| &\leqslant k c_k^{k-1} \left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| \\ &\leqslant k \left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\|\end{aligned}$$

□

c) En conclure que $M(t) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$0 \leqslant \left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| \leqslant k \left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\|$$

D'après la question ***15.a)*** :

$$\lim_{k\to+\infty} k \left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| = 0$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| = 0$$

Or, d'après la question ***8.d)*** :

$$M\left(\frac{t}{k}\right)^k = M\left(k\frac{t}{k}\right) = M(t)$$

Donc :

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|M(t) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| = 0$$

D'après l'équivalence admise dans l'énoncé en début de partie 4, on peut conclure :

$$\boxed{M(t) = \lim_{k\to+\infty} \left(I_n + \tfrac{t}{k}G\right)^k}$$

□