# DS8 (vA)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np` et `rd`).

## Exercice 1

Dans cet exercice, $\theta$ désigne un réel strictement positif et $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

***1.*** Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire $X$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) = u_k$$

***2. a)*** On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de $Y$, puis en déduire l'espérance et la variance de $X$.

***b)*** On rappelle que `rd.geometric(p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire $X$ :

```
def simuX(theta):
    y = .....
    x = .....
    return x
```

***3.*** Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre $\theta$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $X$ et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_k = x_k]\big)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de $\theta$ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

***a)*** Écrire $\ln(\mathcal{L}(\theta))$ en fonction de $\theta$ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

***b)*** On considère la fonction $\varphi$ définie par :

$$\forall \theta \in \,]0,+\infty[,\ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction $\varphi$ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de $S_n$. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$ ?

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

***c)*** Vérifier que $T_n$ est un estimateur de $\theta$ puis montrer : $\mathbb{E}_\theta(T_n) = \theta$.

***d)*** Calculer $\mathbb{V}_\theta(T_n)$ et vérifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}_\theta(T_n) = 0$.

*4.* On souhaite maintenant construire un intervalle de confiance de $\theta$ au niveau de confiance 95% à l'aide de l'estimateur $T_n$. On suppose dans toute cette question que $0 < \theta \leqslant 5$.

   ***a)*** Démontrer :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left([|T_n - \theta| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{30}{n\varepsilon^2}$$

   ***b)*** En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de $\theta$ dont le niveau de risque est $\alpha = \dfrac{30}{n\varepsilon^2}$.

   ***c)*** On suppose que $n = 3000$. Quelle valeur de $\varepsilon$ peut-on choisir pour que $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ soit un intervalle de confiance de $\theta$ au niveau de confiance 95% ?

# Exercice 2

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine $O$.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k$ à l'instant $n$, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.
Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $X_n$ l'abscisse de ce point à l'instant $n$ et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $X_n$ est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note $T$ l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que $T$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

*1.* ***a)*** Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables $X_i$.

   ***b)*** Donner la loi de $X_1$.

   ***c)*** En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de $T$.

*2.* ***a)*** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

   ***b)*** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

*3.* ***a)*** Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\,\mathbb{P}([X_n = k-1])$.

   ***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\},\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
   Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

   ***c)*** Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

*4.* Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `rd.randint(0,3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par $X_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
n = int(input(' Entrez un entier naturel n : '))
X = 0
for k in range(n):
    u = rd.randint(0,3)
    if u == 2:
        X = ............
    else:
        X = ............
print(X)
```

***5. a)*** Montrer : $\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

***b)*** En déduire que $\mathbb{E}\left(X_n\right) = \dfrac{p\left(1-p^n\right)}{1-p}$.

***6. a)*** Montrer, en utilisant la question ***3a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_n\right) + 1\right)$.

***b)*** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

***c)*** En déduire l'expression de $u_n$, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de $p$ et $n$.

***d)*** Montrer enfin que : $\mathbb{V}\left(X_n\right) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

## Problème

On souhaite étudier dans ce problème l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$(E) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t}$$

d'inconnue $\varphi$ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $(E_0)$ l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0$$

### Partie I : Étude d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

***1. a)*** On exécute le script suivant :

```
I = np.eye(3)
A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[2,1,-2]])
B = np.dot(A-I, A+I)
C = np.dot(B, A+2*I)
print(C)
```

et il renvoie :

```
[[0 0 0]
 [0 0 0]
 [0 0 0]]
```

Que peut-on en déduire ?

***b)*** Donner les valeurs propres possibles de $A$.

***2. a)*** Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de $A$.

***b)*** Justifier que $A$ est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

## Partie II : Calcul des solutions générales de $(E)$

On note $S$ l'ensemble des solutions de $(E)$ et $S_0$ l'ensemble des solutions de $(E_0)$.

On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$ où $\varphi$ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

***3.*** Montrer que $\varphi$ est solution de $(E_0)$ si et seulement si $X' = AX$.

***4. a)*** Déterminer les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$.
*(On utilisera les notations $C_1$, $C_2$ et $C_3$ pour nommer les constantes indéterminées)*

***b)*** Expliciter l'ensemble $S_0$.

***5. a)*** Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que la fonction $g : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{2t}$ soit une solution particulière de $(E)$.
(*Indication : commencer par calculer et mettre sous forme factorisée $g'(t)$, $g''(t)$ et $g'''(t)$.*)

***b)*** Montrer que $\varphi$ est solution de $(E)$ si et seulement si $\varphi - g$ est solution de $(E_0)$, où $g$ est la solution particulière déterminée à la question précédente.

***c)*** En déduire l'ensemble $S$.

## Partie III : Etude d'une famille de problèmes de Cauchy

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de Cauchy de la forme :

$$(P_{u,v}) : \begin{cases} \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = u \\ \varphi''(0) = v \end{cases} \qquad \text{où } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

***6.*** Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

***a)*** Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right)\mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

***b)*** Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t)$.

**7.** ***a)*** Expliciter, pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi_{0,1}(t)$.

***b)*** En déduire une fonction **Python**, nommée `phi(t)`, qui prend en entrée un réel $t \geqslant 0$ et renvoie le réel $\varphi_{0,1}(t)$.

***c)*** Dire, parmi les quatre représentations graphiques de fonctions ci-dessous, laquelle correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$. On expliquera son raisonnement en notant $\psi_i$ la fonction associée au tracé numéro $i$.

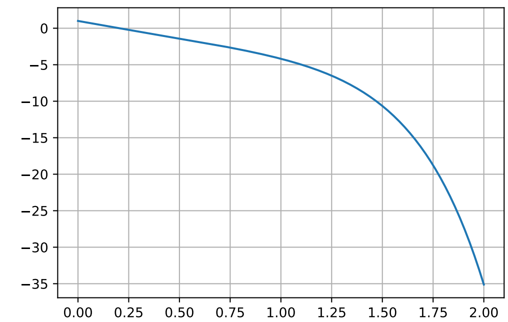


**FIG. 1** Tracé 1

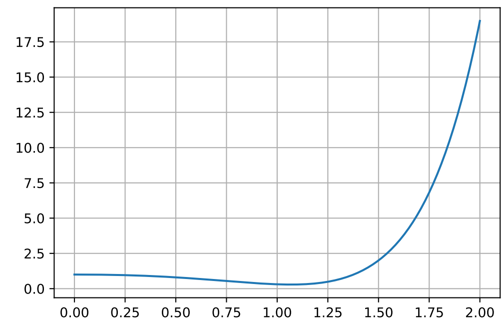


**FIG. 2** Tracé 2

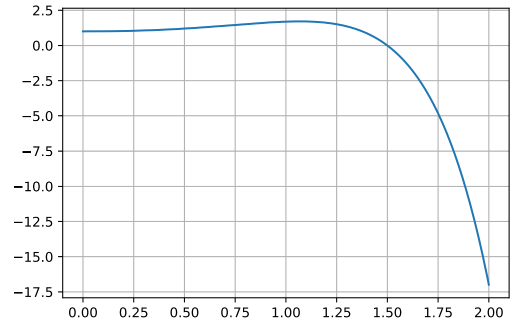


**FIG. 3** Tracé 3

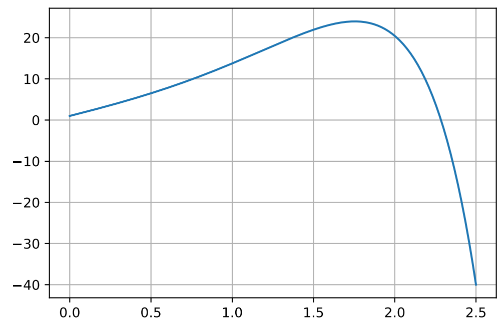


**FIG. 4** Tracé 4

***d)*** Montrer : $\varphi_{0,1}(2) = \mathrm{e}^2 \left( \dfrac{6 - 7\mathrm{e}^4}{3\mathrm{e}^4} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)$. En déduire qu'il existe $t \in ]0,2[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

***e)*** Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée d'un zéro de la fonction $\varphi_{0,1}$ à `eps` près en appliquant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(eps):
    a = _____
    b = _____
    while ______________ :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
            __________
        else:
            __________
    return (a+b)/2
```

## Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

On considère le fermé $F = [0,1]^2$ et l'ouvert $U = ]0,1[^2$.
On note $f$ la fonction de deux variables définie sur $F$ par :

$$\forall (x,y) \in F,\ \ f(x,y) = \varphi_{x,y}(1)$$

*(On s'intéresse ici à l'évolution au temps 1 des solutions des problèmes de Cauchy étudiés à la partie précédente.)*

***8.*** Représenter l'ouvert $U$ ainsi que le bord de $F$ sur un même graphique, dans un repère orthonormé.

***9.*** Montrer qu'il existe trois constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ (que l'on explicitera) telles que :

$$\forall (x,y) \in F,\ \ f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

***10.*** Démontrer que $f$ admet un maximum global sur $F$.

***11.*** ***a)*** Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$.

***b)*** La fonction $f$ admet-elle des points critiques sur $U$ ? Si oui, les donner.

***c)*** En déduire que le maximum global de $f$ sur $F$ ne peut pas être atteint sur $U$.
*(Il est donc nécessairement atteint sur le bord de $F$.)*

***12.*** ***a)*** Montrer : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

***b)*** En déduire que le maximum global de $f$ sur $F$ est atteint en un unique point $(x_0, y_0)$ dont on explicitera les coordonnées.

***c)*** Parmi les deux tracés de lignes de niveaux ci-dessous, lequel correspond à la fonction $f$ ?

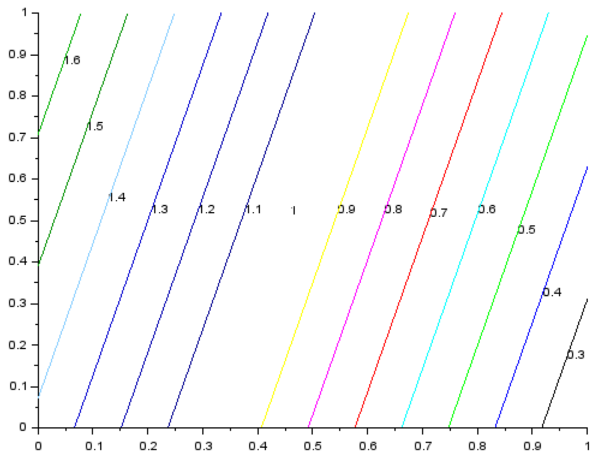


**Fig. 5** Tracé 1

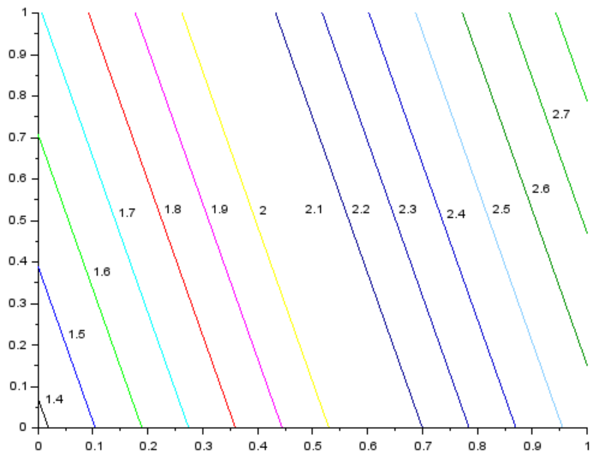


**Fig. 6** Tracé 2