DS8 (vA) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

Exercice 1 (EDHEC 2014)

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

- **1 pt : comme $\theta > 0$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k \geqslant 0$**
- **1 pt : $\sum\limits_{k\geqslant 0}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$ série géométrique de raison $\dfrac{\theta}{1+\theta} \in \,]-1,1[$, donc convergente. Ainsi $\sum u_n$ convergente.**
- **1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = 1$**

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\,[X=k]\,\big) = u_k$$

2. a) On pose $Y = X+1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

- **2 pts : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{1+\theta}\right)$**
  - × **1 pt : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$**
  - × **1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y=k]) = \dfrac{1}{1+\theta}\left(1-\dfrac{1}{1+\theta}\right)^{k-1}$**
- **1 pt : $\mathbb{E}(Y) = 1+\theta$ et $\mathbb{V}(Y) = \theta\,(1+\theta)$**
- **1 pt : X admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée affine de Y qui en admet une**
- **1 pt : par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(X) = \theta$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X) = \theta\,(1+\theta)$**

b) On rappelle que `rd.geometric(p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```
def simuX(theta):
    y = .....
    x = .....
    return x
```

- **2 pts : un pt par ligne**

```
    y = rd.geometric(1/(1+theta))
    x = y - 1
```

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_k = x_k]\big)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln(\mathcal{L}(\theta))$ en fonction de θ et de $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

- **1 pt :** $\ln\big(\mathcal{L}(\theta)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(\mathbb{P}([X_k = x_k])\Big)$
- **1 pt :** $\ln\big(\mathcal{L}(\theta)\big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(-\ln(1+\theta) + x_k\,\big(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)\big)\Big)$
- **1 pt :** $\ln\big(\mathcal{L}(\theta)\big) = S_n\,\ln(\theta) - (S_n + n)\,\ln(1+\theta)$

b) On considère la fonction φ définie par :

$$\forall \theta \in \,]0, +\infty[, \ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$?

- **1 pt :** φ **dérivable sur** $]0, +\infty[$ **et** $\varphi' : \theta \mapsto \dfrac{S_n - n\,\theta}{\theta\,(1+\theta)}$
- **1 pt : signe de** $\varphi'(\theta)$ **et variations de** φ

θ	0		$\hat{\theta}_n$		$+\infty$
Signe de $\varphi'(\theta)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\hat{\theta}_n)$	$\searrow$	$-\infty$

- **1 pt :** φ **admet un unique maximum en** $\widehat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}$
- **1 pt : par stricte croissance de** exp **sur** $\mathbb{R}$**,** $\widehat{\theta}_n$ **est l'unique maximum de** $\mathcal{L}$ **sur** $]0, +\infty[$

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

c) Vérifier que T_n est un estimateur de θ puis montrer : $\mathbb{E}_\theta(T_n) = \theta$.

- **1 pt :** T_n **est un estimateur**
- **1 pt :** T_n **admet une espérance**
- **2 pts :** $\mathbb{E}_\theta(T_n) = \theta$
  - × **1 pt : linéarité de l'espérance**
  - × **1 pt : d'après *2.a)*** $\mathbb{E}(X_i) = \theta$

d) Calculer $\mathbb{V}_\theta(T_n)$ et vérifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}_\theta(T_n) = 0$.

- **1 pt : T_n admet une variance**
- **1 pt : indépendance de X_1, …, X_n**
- **1 pt :** $\mathbb{V}_\theta(T_n) = \dfrac{\theta\,(1+\theta)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

4. On souhaite maintenant construire un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance 95% à l'aide de l'estimateur T_n. On suppose dans toute cette question que $0 < \theta \leqslant 5$.

a) Démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left([|T_n - \theta| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{30}{n\varepsilon^2}$$

- **1 pt : T_n admet une variance**
- **1 pt : inégalité de Bienaymé-Tchebychev bien écrite**
- **1 pt :** $\theta(1+\theta) \leqslant 5 \times 6 = 30$

b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de θ dont le niveau de risque est $\alpha = \dfrac{30}{n\varepsilon^2}$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\left([|T_n - \theta| > \varepsilon]\right) = 1 - \mathbb{P}\left([T_n - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant T_n + \varepsilon]\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left([T_n - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant T_n + \varepsilon]\right) \geqslant 1 - \dfrac{30}{n\varepsilon^2}$

c) On suppose que $n = 3000$. Quelle valeur de ε peut-on choisir pour que $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ soit un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance 95% ?

- **1 pt :** $\dfrac{30}{n\varepsilon^2} = 5\% \iff \varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
- **1 pt : Si l'on choisit $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, alors $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance 95%.**

Exercice 2 (EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

- **1 pt : explication claire de la CNS pour que $[T = k]$ soit réalisé**
- **2 pts : formule** $[T = k] = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \right) \cap [X_k = 0]$

b) Donner la loi de X_1.

- **1 pt :** $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p$ **et** $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$
- **1 pt :** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

- **1 pt : écriture correcte formule des probas composées**
- **1 pt : explication de l'existence des probas conditionnelles**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T = k]) = p \times \ldots \times p \times (1-p) = p^{k-1}\ (1-p)$
- **1 pt :** $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

- **1 pt : initialisation :** $X_0(\Omega) = \{0\} = [\![0, 0]\!]$
- **2 pt : hérédité**

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

- **1 pt : la famille** $\Big([X_{n-1} = k] \Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ **est un système complet d'événements d'après la question précédente.**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0])$
- **1 pt :** $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$**,** $\mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$

3. *a)* Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\}\ ,\ \mathbb{P}\left([X_{n+1} = k]\right) = p\, \mathbb{P}\left([X_n = k-1]\right)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[X_{n+1} = k]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]\,\big)$
- **1 pt : formule des probabilités composées et** $\mathbb{P}\big(\,[X_n = k-1]\,\big) \neq 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) = p$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}\ ,\ \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = p^k\,(1-p)\,.$
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}\left([X_n = n]\right)$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

- **1 pt : initialisation première récurrence**
- **2 pts : hérédité première récurrence**
- **0 pt : initialisation deuxième récurrence**
- **2 pts : hérédité deuxième récurrence**
- **1 pt : toute explication probabiliste raisonnable**

c) Vérifier : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1$.

- **2 pts : calcul**

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `rd.randint(0,3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = int(input(' Entrez un entier naturel n : '))
X = 0
for k in range(n):
    u = rd.randint(0,3)
    if u == 2:
        X = ............
    else:
        X = ............
print(X)
```

- **2 pts :** `X = X + 1`
- **1 pt :** `X = 0`
- **1 pt :** `(BONUS)` **explications raisonnables**

5. *a)* Montrer : $\forall n \geqslant 2,\ \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

b) En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

- **1 pt : X_n est finie donc X_n admet une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X_n = k])$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([X_n = k])\right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n])$
- **1 pt : reste du calcul**

6. a) Montrer, en utilisant la question ***3a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$.

- **1 pt : les v.a.r. X_n et X_{n+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments d'ordre 2.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k])$ **par définition**
- **1 pt : découpage de la somme (cas de l'indice 0 traité à part)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\ \mathbb{P}([X_n = k-1])$ **d'après la question *3.a)* (ici $k \geqslant 1$!)**
- **2 pt : fin du calcul**

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer : $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.

- **1 pt :** $u_{n+1} = p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right) + (2n+1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p}$
- **1 pt :** $p\ u_n = p\ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p}$
- **1 pt :** $u_{n+1} - pu_n = p\ \dfrac{1+p}{1-p}$

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

- **1 pt : (u_n) est une suite arithmético-géométrique**
- **1 pt : méthode connue**
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{p}{(1-p)^2}(1+p-2p^n)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_n^2) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right)$

d) Montrer enfin : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)\,p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

- **1 pt : justification que X_n admet une variance.**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2$ **d'après la formule de Kœnig-Huygens.**
- **2 pt : fin du calcul**

Problème (`sujet maison`)

On souhaite étudier dans ce problème l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$(E) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t}$$

d'inconnue φ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0$$

Partie I : Étude d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. a) On exécute le script suivant :

```
I = np.eye(3)
A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[2,1,-2]])
B = np.dot(A-I, A+I)
C = np.dot(B, A+2*I)
print(C)
```

et il renvoie :

```
[[0 0 0]
 [0 0 0]
 [0 0 0]]
```

Que peut-on en déduire ?

- **1 pt :** $(A-I_3)(A+I_3)(A+2I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt : le polynôme $P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$ est un polynôme annulateur de A (point donné si cette réponse est donnée à la question suivante)**

b) Donner les valeurs propres possibles de A.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{$**racines de** $P(X)\}$
- **1 pt : les valeurs propres possibles de A sont 1, -1 et -2**

2. a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

- **2 pts :** $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$
- **1 pt :** $E_{-2}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ **donc -2 est valeur propre de A**
- **1 pt :** $\mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ **est une base de $E_{-2}(A)$**
- **1 pt :** $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- **1 pt :** $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

b) Justifier que A est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

- **1 pt : La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable**
- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(point donné si faux mais cohérent avec erreur précédente)**
- **1 pt : Par la formule de changement de base, on a bien $A = PDP^{-1}$**
  ***ou* P est obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres**

Partie II : Calcul des solutions générales de (E)

On note S l'ensemble des solutions de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$ où φ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que φ est solution de (E_0) si et seulement si $X' = AX$.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \end{pmatrix} \iff \varphi'''(t) = 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t)$
- **1 pt : équivalence clairement démontrée et pas seulement une implication**

4. a) Déterminer les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$.
(On utilisera les notations C_1, C_2 et C_3 pour nommer les constantes indéterminées)

- **1 pt : rappel des informations algébriques sur la matrice A (0 pt si il n'est pas écrit que la matrice A est diagonalisable)**
- **2 pt : les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$ sont de la forme :**

$$t \mapsto C_1\mathrm{e}^{-2t}U_{-2} + C_2\mathrm{e}^{-t}U_{-1} + C_3\mathrm{e}^{t}U_1$$

  où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$

b) Expliciter l'ensemble S_0.

- **1 pt : bonne quantification de l'existence des constantes**
- **1 pt : double inclusion bien démontrée (raisonnement par équivalence ou double implication)**
- **1 pt :** $S_0 = \left\{t \mapsto C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3\right\}$

5. a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $g : t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^{2t}$ soit une solution particulière de (E).
(*Indication : commencer par calculer et mettre sous forme factorisée $g'(t)$, $g''(t)$ et $g'''(t)$.*)

- **1 pt :**

$$g'(t) = (2at + a + 2b)\mathrm{e}^{2t}$$
$$g''(t) = (4at + 4a + 4b)\mathrm{e}^{2t}$$
$$g'''(t) = (8at + 12a + 8b)\mathrm{e}^{2t}$$

- **1 pt :** $g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) = (12at + 19a + 12b)\mathrm{e}^{2t}$

- **2 pt :** $a = -1$ **et** $b = 2$

  (Si tous les calculs sont faux mais la méthode est correcte : seulement 1 pt)

b) Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (E_0), où g est la solution particulière déterminée à la question précédente.

- **1 pt : sens direct**
- **1 pt : sens réciproque**

c) En déduire l'ensemble S.

- **1 pt :** $\varphi \in S \iff \varphi - g \in S_0$
- **2 pt :** $S = \left\{t \mapsto C_1\mathbf{e}^{-2t} + C_2\mathbf{e}^{-t} + C_3\mathbf{e}^{t} + (-t+2)\mathbf{e}^{2t} \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3\right\}$

Partie III : Etude d'une famille de problèmes de Cauchy

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de Cauchy de la forme :

$$(P_{u,v}) : \begin{cases} \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = u \\ \varphi''(0) = v \end{cases} \qquad \text{où } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

6. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right)\mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

- **2 pt :**

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= C_1\mathbf{e}^{-2t} + C_2\mathbf{e}^{-t} + C_3\mathbf{e}^{t} + (-t+2)\mathbf{e}^{2t} \\ \varphi'(t) &= -2C_1\mathbf{e}^{-2t} - C_2\mathbf{e}^{-t} + C_3\mathbf{e}^{t} + (-2t+3)\mathbf{e}^{2t} \\ \varphi''(t) &= 4C_1\mathbf{e}^{-2t} + C_2\mathbf{e}^{-t} + C_3\mathbf{e}^{t} + (-4t+4)\mathbf{e}^{2t} \end{aligned}$$

- **1 pt :**

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= C_1 + C_2 + C_3 + 2 \\ \varphi'(0) &= -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 \\ \varphi''(0) &= 4C_1 + C_2 + C_3 + 4 \end{aligned}$$

- **3 pt :** $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + 2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 = u \\ 4C_1 + C_2 + C_3 + 4 = v \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}v - 1 \\ C_2 = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2} \\ C_3 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2} \end{cases}$

b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t)$.

- **1 pt :** $\varphi_{u,v}(t) = \mathbf{e}^{2t}\left(\left(\frac{1}{3}v - 1\right)\mathbf{e}^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right)\mathbf{e}^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right)\mathbf{e}^{-t} + (-t+2)\right)$ **(ou n'importe quelle autre factorisation permettant d'enlever les formes indéterminées)**
- **2 pt :** $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t) = -\infty$ **(1 pt pour le détail de l'argumentation)**

7. a) Expliciter, pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi_{0,1}(t)$.

- **1 pt :** $\varphi_{0,1}(t) = -\dfrac{2}{3}\mathbf{e}^{-2t} + 2\mathbf{e}^{-t} - \dfrac{7}{3}\mathbf{e}^{t} + (-t+2)\mathbf{e}^{2t}$

b) En déduire une fonction **Python**, nommée `phi(t)`, qui prend en entrée un réel $t \geqslant 0$ et renvoie le réel $\varphi_{0,1}(t)$.

- **2 pt :**

```
def phi(t):
    return - (2/3) * np.exp(-2*t) + 2 * np.exp(-t)
                - (7/3) * np.exp(t) + (-t+2)*np.exp(2*t)
```

c) Dire, parmi les quatre représentations graphiques de fonctions ci-dessous, laquelle correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$. On expliquera son raisonnement en notant ψ_i la fonction associée au tracé numéro i.

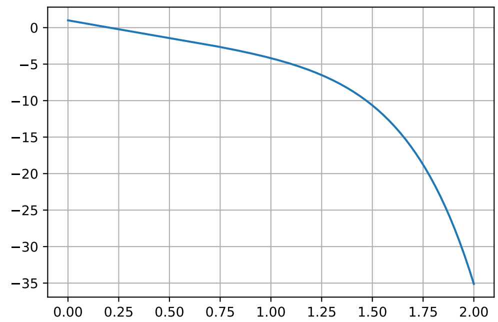

Fig. 1 Tracé 1

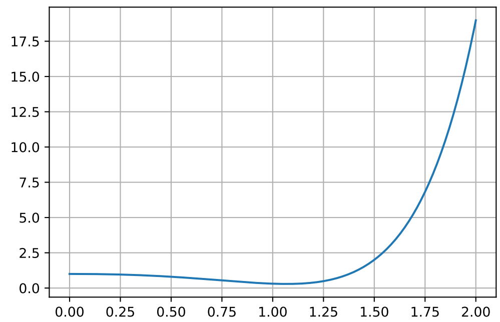

Fig. 2 Tracé 2

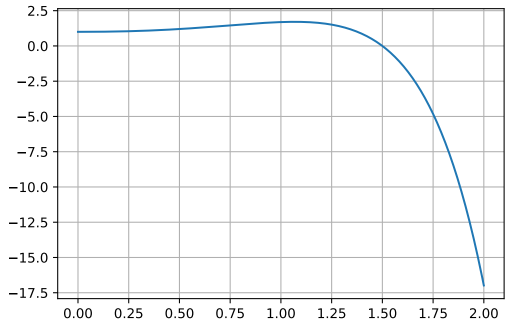

Fig. 3 Tracé 3

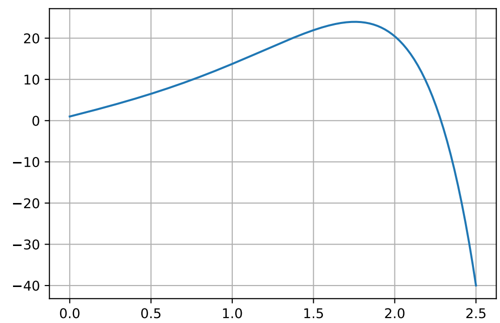

Fig. 4 Tracé 4

- **1 pt : c'est le tracé numéro 3 qui correspond au graphe de** $\varphi_{0,1}$
- **2 pt : élimination des trois autres tracés**

d) Montrer : $\varphi_{0,1}(2) = \mathrm{e}^2 \left(\dfrac{6 - 7\mathrm{e}^4}{3\mathrm{e}^4} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)$. En déduire qu'il existe $t \in]0, 2[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

- **1 pt :** $\varphi_{0,1}(2) = \mathbf{e}^2 \left(\dfrac{6 - 7\mathbf{e}^4}{3\mathbf{e}^4} - \dfrac{2}{3}\mathbf{e}^{-6} \right)$
- **1 pt :** $\varphi_{0,1}(2) < 0$
- **1 pt :** $\varphi_{0,1}(0) = 1 > 0$ **et la fonction** $\varphi_{0,1}$ **est continue sur** $[0, 2]$

- **1 pt : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel** $t \in]0, 2[$ **tel que** $\varphi_{0,1}(t) = 0$

e) Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée d'un zéro de la fonction $\varphi_{0,1}$ à `eps` près en appliquant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(eps):
    a = _____
    b = _____
    while _____________ :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
            _________
        else:
            _________
    return (a+b)/2
```

- **1 pt :** `a = 0` **et** `b = 2`
- **1 pt :** `while b-a > eps :`
- **1 pt :** `b = c` **puis** `a = c`

Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

On considère le fermé $F = [0, 1]^2$ et l'ouvert $U =]0, 1[^2$.
On note f la fonction de deux variables définies sur F par :

$$\forall (x, y) \in F,\ f(x, y) = \varphi_{x,y}(1)$$

(On s'intéresse ici à l'évolution au temps 1 *des solutions des problèmes de Cauchy étudiés à la partie précédente.)*

8. Représenter l'ouvert U ainsi que le bord de F sur un même graphique, dans un repère orthonormé.

- **1 pt : ouvert** U
- **1 pt : bord de** F

9. Montrer qu'il existe trois constantes α, β et γ (que l'on explicitera) telles que :

$$\forall (x, y) \in F,\ f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

- **1 pt :** $\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{-1}\right)$
- **1 pt :** $\beta = \frac{1}{3}\mathbf{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathbf{e}$
- **1 pt :** $\gamma = -\mathbf{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathbf{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathbf{e} + \mathbf{e}^{2}$

10. Démontrer que f admet un maximum global sur F.

- **1 pt :** f **est continue sur** F **(car polynomiale)**
- **1 pt :** F **est un fermé borné**

11. *a)* Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

- **1 pt :** f **est de classe** $\mathcal{C}^2$ **sur** U **car polynomiale**

b) La fonction f admet-elle des points critiques sur U ? Si oui, les donner.

- **1 pt : (x, y) est un point critique de f ssi $\alpha = \beta = 0$**
- **1 pt : $\alpha \neq 0$**
- **1 pt : f n'admet aucun point critique sur U**

c) En déduire que le maximum global de f sur F ne peut pas être atteint sur U.
(Il est donc nécessairement atteint sur le bord de F.)

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : si f atteint son maximum global en $(x_0, y_0) \in U$, alors (x_0, y_0) est nécessairement un point critique de f**

12. a) Montrer : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

- **1 pt : $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) > 0$**
- **2 pt : $\beta = \left(\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \dfrac{1}{6}\mathrm{e}\right) = \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2 + \mathrm{e}^3 - 3\mathrm{e}\right) = \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2 + \mathrm{e}(\mathrm{e}^2 - 3)\right) > 0$**

b) En déduire que le maximum global de f sur F est atteint en un unique point (x_0, y_0) dont on explicitera les coordonnées.

- **1 pt : $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \leqslant \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$**
- **1 pt : si $x < 1$ ou $y < 1$, alors $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma < \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$**

c) Parmi les deux tracés de lignes de niveaux ci-dessous, lequel correspond à la fonction f ?

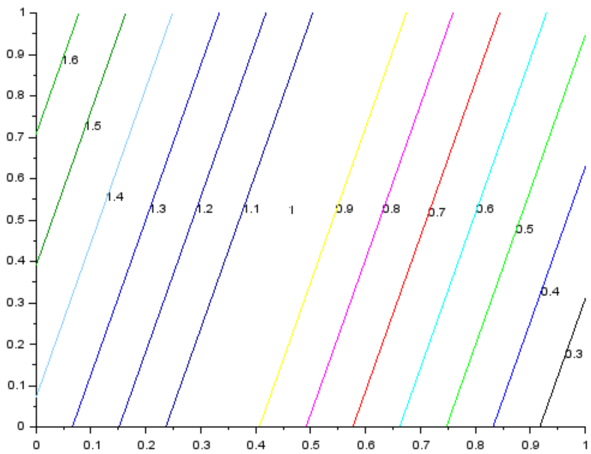

FIG. 5 Tracé 1

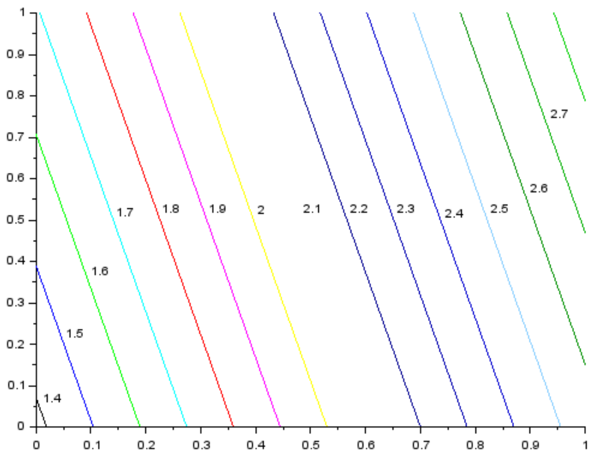

FIG. 6 Tracé 2

- **2 pt : Il s'agit du tracé numéro 2, car on remarque que la valeur inscrite sur les lignes de niveaux augmente lorsque l'on se rapproche du point $(1, 1)$, contrairement à ce que l'on peut observer sur le tracé numéro 1.**