# DS8 (vA) - Correction

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées sous leurs alias habituels (`np`, `rd` et `plt`).

## Exercice 1 (EDHEC 2014)

Dans cet exercice, $\theta$ désigne un réel strictement positif et $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour tout $k$ de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

***1.*** Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, comme $\theta > 0$ : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k \geqslant 0$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre $N$ de la série géométrique de raison $\dfrac{\theta}{1+\theta} \in\, ]-1,1[$.
Ainsi, la série $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1}{1-\frac{\theta}{\theta+1}} = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1}{\frac{(\cancel{\theta}+1)-\cancel{\theta}}{\theta+1}} = \frac{1}{\cancel{1+\theta}}\,(\cancel{1+\theta}) = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (u_k) \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

On considère maintenant une variable aléatoire $X$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = k]) = u_k.$$

***2. a)*** On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de $Y$, puis en déduire l'espérance et la variance de $X$.

*Démonstration.*

- D'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Donc : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([X+1 = k]) = \mathbb{P}([X = k-1]) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1} = \frac{1}{1+\theta}\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right)^{k-1}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{1+\theta}\right).}$$

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{1}{1+\theta}} = 1+\theta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{1-\frac{1}{1+\theta}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \frac{\frac{\theta}{\cancel{1+\theta}}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{\cancel{2}}} = \theta(1+\theta)$$

- Par définition de la v.a.r. $Y$ : $X = Y - 1$. Ainsi, la v.a.r. $X$ admet une variance (et donc une espérance) en tant que transformée affine de $Y$ qui en admet une.
  - × Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \mathbb{E}(Y-1) \ = \ \mathbb{E}(Y) - 1 \ = \ \cancel{1} + \theta - \cancel{1} \ = \ \theta$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \theta}$$

  - × Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{V}(Y-1) \ = \ \mathbb{V}(Y) \ = \ \theta(1+\theta)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \theta(1+\theta)}$$

□

***b)*** On rappelle que `rd.geometric(p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire $X$ :

```
def simuX(theta):
    y = .....
    x = .....
    return x
```

*Démonstration.*

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `simuX`,
  - × elle prend en paramètre la variable `theta`.
- **Simulation de $X$**
  D'après les questions précédentes, si $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{\theta+1}\right)$, alors $X = Y - 1$ suit la loi définie par la suite $(u_n)$.
  - × On commence donc par simuler la variable $Y$ à l'aide de la commande rappelée par l'énoncé. On stocke le résultat dans la variable `y`.

```
    y = rd.geometric(1/(1+theta))
```

  - × On en déduit une simulation de $X = Y - 1$ que l'on stocke dans la variable `x`.

```
    x = y - 1
```

**Commentaire**

On détaille la réponse à cette question afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.

□

***3.*** Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre $\theta$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $X$ et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k = x_k]\right)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de $\theta$ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

**Commentaire**

On s'intéresse dans cet exercice à l'estimateur du maximum de vraisemblance.
Détaillons ce point.

- On dispose d'un échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ d'observations.
- On suppose que ces observations proviennent d'un $n$-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une v.a.r. $X$ dont la loi dépend d'un paramètre $\theta$, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur de $\theta$ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance.
- Le réel $\widehat{\theta}_n$ introduit en question ***3.b)*** est précisément la valeur du paramètre $\theta$ maximisant la réalisation des observations initiales (cette valeur était plutôt notée $\theta^*$ dans le cours, mais il faut s'adapter aux notations de l'exercice).
- La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la variable aléatoire construite à l'aide de ce maximum : $T_n$ (introduite en question ***3.c)***).
- L'idée est de choisir comme estimation de $\theta$ le réel $\widehat{\theta}_n$ tel que la **vraisemblance** d'avoir obtenu l'échantillon utilisé soit maximisée.
  Autrement dit, le réel $\widehat{\theta}_n$ tel que la probabilité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda) &= \mathbb{P}_\lambda([X_1 = x_1] \ \cap \ \ldots \ \cap \ [X_n = x_n]) \\
&= \mathbb{P}_\lambda([X_1 = x_1]) \ \times \ \ldots \ \times \ \mathbb{P}_\lambda([X_n = x_n]) && \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\lambda([X_i = x_i])
\end{aligned}$$

  soit maximale. Au lieu d'étudier la fonction $\mathcal{L}$, définie par un produit, on préfère considérer la fonction $\varphi : \theta \mapsto \ln(\mathcal{L}(\theta))$, définie par une somme. La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, le maximum de $\varphi$ fournit le maximum de $\mathcal{L}$.

***a)*** Écrire $\ln\left(\mathcal{L}(\theta)\right)$ en fonction de $\theta$ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

*Démonstration.*

Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl}
\ln(\mathcal{L}(\theta)) & = & \ln\Big( \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\,[X_k = x_k]\,)\Big) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\Big(\mathbb{P}(\,[X_k = x_k]\,)\Big) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\dfrac{1}{1+\theta}\right) + x_k \ln\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)\right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(-\ln(1+\theta) + x_k\big(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)\big)\Big) \\
& = & -n\ln(1+\theta) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\big(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)\big) \\
& = & -n\ln(1+\theta) + \big(\ln(\theta) + \ln(1+\theta)\big)\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \\
& = & -n\ln(1+\theta) + \big(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)\big) S_n \\
& = & S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)
\end{array}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\mathcal{L}(\theta)) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)}$$

□

***b)*** On considère la fonction $\varphi$ définie par :

$$\forall \theta \in \,]0, +\infty[,\ \ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction $\varphi$ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de $S_n$. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$ ?

*Démonstration.*

- La fonction $\varphi$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
  Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi'(\theta) & = & S_n\ \dfrac{1}{\theta} - (S_n + n)\ \dfrac{1}{1+\theta} \\[2ex]
& = & \dfrac{S_n\ (1+\theta) - (S_n + n)\ \theta}{\theta\ (1+\theta)} \\[2ex]
& = & \dfrac{S_n + \cancel{S_n\ \theta} - \cancel{S_n\ \theta} - n\ \theta}{\theta\ (1+\theta)} \\[2ex]
& = & \dfrac{S_n - n\,\theta}{\theta\,(1+\theta)}
\end{array}$$

  Étudions le signe de $\varphi'(\theta)$ :

$$\begin{array}{rcl}
\varphi'(\theta) > 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{S_n - n\ \theta}{\theta\ (1+\theta)} > 0 \\[2ex]
& \Leftrightarrow & S_n - n\ \theta > 0 \qquad \textit{(car } \theta(1+\theta) > 0\textit{)} \\[2ex]
& \Leftrightarrow & \dfrac{S_n}{n} > \theta
\end{array}$$

  On note $\hat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}$. On obtient le tableau de variations suivant :

| $\theta$ | $0$ | | $\hat{\theta}_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $\varphi'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $\varphi$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\varphi(\hat{\theta}_n)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- Ainsi :
  - $\times$ la fonction $\varphi$ est strictement croissante sur $]0, \hat{\theta}_n]$, donc : $\forall \theta \in ]0, \hat{\theta}_n[$, $\varphi(\theta) < \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  - $\times$ la fonction $\varphi$ est strictement décroissante sur $[\hat{\theta}_n, +\infty[$, donc : $\forall \theta \in ]\hat{\theta}_n, +\infty[$, $\varphi(\theta) < \varphi(\hat{\theta}_n)$.

  Finalement : $\forall \theta \in ]0, +\infty[ \setminus \{\widehat{\theta_n}\}$, $\varphi(\theta) < \varphi(\hat{\theta}_n)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \varphi \text{ admet un unique maximum en } \hat{\theta}_n = \frac{S_n}{n}.}$$

- Soit $\theta \in ]0, +\infty[ \setminus \{\widehat{\theta_n}\}$, on a : $\varphi(\theta) < \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  Par définition de $\varphi$, on en déduit :
  $$\ln(\mathcal{L}(\theta)) \ < \ \ln(\mathcal{L}(\hat{\theta}_n))$$
  Par stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on obtient :
  $$\mathcal{L}(\theta) \ < \ \mathcal{L}(\hat{\theta}_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le réel } \hat{\theta}_n \text{ est l'unique maximum de } \mathcal{L} \text{ sur } ]0, +\infty[.}$$

**Commentaire**

On peut détailler les éléments apparaissant dans le tableau de variations.

- Tout d'abord : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \ln(\theta) = -\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \ln(1+\theta) = 0$.
  De plus : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in \mathbb{N}$, donc $x_k \geqslant 0$. D'où : $S_n \geqslant 0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \varphi(\theta) = -\infty$
- Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.
  $$\varphi(\theta) \ = \ S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1+\theta) \ = \ \ln(\theta) \left( S_n - (S_n + n) \, \frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \right)$$
  Or :
  $$\frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \ = \ \frac{\ln\left(\theta\left(\frac{1}{\theta}+1\right)\right)}{\ln(\theta)} \ = \ \frac{\ln(\theta) + \ln\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}{\ln(\theta)} \ = \ 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}{\ln(\theta)} \ \underset{\theta \to +\infty}{\longrightarrow} \ 1$$
  On en déduit :
  $$\lim_{\theta \to +\infty} \left( S_n - (S_n+n) \frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \right) \ = \ S_n - (S_n + n) \times 1 \ = \ -n \leqslant 0$$
  De plus : $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \ln(\theta) = +\infty$.
  On en déduit : $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \varphi(\theta) = -\infty$.

□

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
La variable $T_n$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour $\theta$.

***c)*** Vérifier que $T_n$ est un estimateur de $\theta$ puis montrer : $\mathbb{E}_\theta(T_n) = \theta$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $T_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ s'exprime :
  - × à l'aide du $n$-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de $X$,
  - × sans mention du paramètre $\theta$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est donc un estimateur de } \theta.}$$

- La v.a.r. $T_n$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(T_n) &= \mathbb{E}_\theta\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta(X_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \theta && \textit{(d'après la question } \textbf{2.a)}\textit{)} \\ &= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\,\theta \ = \ \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{E}_\theta(T_n) = \theta.}$$

□

***d)*** Calculer $\mathbb{V}_\theta(T_n)$ et vérifier : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{V}_\theta(T_n) = 0$.

*Démonstration.*

- La v.a.r. $T_n$ admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\theta(T_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) && \textit{(car } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \theta(1+\theta) && \textit{(d'après la question } \textbf{2.a)}\textit{)} \\ &= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\,\theta(1+\theta) \ = \ \frac{\theta(1+\theta)}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}_\theta(T_n) = \frac{\theta(1+\theta)}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{V}_\theta(T_n) = 0}$$

□

***4.*** On souhaite maintenant construire un intervalle de confiance de $\theta$ au niveau de confiance 95% à l'aide de l'estimateur $T_n$. On suppose dans toute cette question que $0 < \theta \leqslant 5$.

***a)*** Démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\left([|T_n - \theta| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{30}{n\varepsilon^2}$$

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la variable $T_n$ admet une variance donc

$$\mathbb{P}\left([|T_n - \theta| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}_\theta(T_n)}{\varepsilon^2}$$

D'après la question ***3.d)***,

$$\mathbb{V}_\theta(T_n) = \frac{\theta(1+\theta)}{n}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\left([|T_n - \theta| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\theta(1+\theta)}{n\varepsilon^2}$$

Or, $\theta(1+\theta) \leqslant 5 \times 6 = 30$.

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}\left([|T_n - \theta| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{30}{n\varepsilon^2}.}$$

□

***b)*** En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de $\theta$ dont le niveau de risque est $\alpha = \dfrac{30}{n\varepsilon^2}$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([|T_n - \theta| > \varepsilon]\right) &= 1 - \mathbb{P}\left([|T_n - \theta| \leqslant \varepsilon]\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}\left([-\varepsilon \leqslant \theta - T_n \leqslant \varepsilon]\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}\left([T_n - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant T_n + \varepsilon]\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\left([T_n - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant T_n + \varepsilon]\right) \geqslant 1 - \frac{30}{n\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{D'où : } [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon] \text{ est un intervalle de confiance de } \theta \text{ dont le niveau de risque est } \alpha = \frac{30}{n\varepsilon^2}.}$$

□

***c)*** On suppose que $n = 3000$. Quelle valeur de $\varepsilon$ peut-on choisir pour que $[T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]$ soit un intervalle de confiance de $\theta$ au niveau de confiance 95% ?

*Démonstration.* Cela revient à demander un niveau de risque de 5%.

$$\begin{aligned}\frac{30}{n\varepsilon^2} = 5\% &\iff \frac{30}{3000\varepsilon^2} = 5 \times 10^{-2}\\ &\iff \varepsilon^2 = \frac{1}{5}\\ &\iff \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si l'on choisit } \varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \text{ alors } [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon] \text{ est un intervalle de confiance de } \theta\\ \text{au niveau de confiance 95\%.}\end{array}}$$

□

## Exercice 2 (EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine $O$.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k$ à l'instant $n$, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $X_n$ l'abscisse de ce point à l'instant $n$ et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $X_n$ est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note $T$ l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que $T$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

**Commentaire**

- Dans un énoncé de probabilités discrètes, on manipule différents niveaux d'objets.
  *1)* Au premier niveau, on trouve l'expérience aléatoire considérée.
  On note $\Omega$ l'univers des possibles : c'est **l'ensemble** des résultats possibles (appelés aussi issues) de l'expérience. Ici, $\Omega$ est l'ensemble de tous les $\infty$-déplacements possibles du mobile. Par exemple, $\omega = (0, 1, 2, 0, 1, 0, \dots)$ (évidemment, on ne peut décrire l'$\infty$-tirage en entier !) est un $\infty$-déplacement qui est un résultat possible de l'expérience. Ce résultat est obtenu si le mobile se déplace à droite aux instants 1 et 2, puis revient en 0 à l'instant 3, puis se déplace de nouveau à droite à l'instant 4 puis revient de nouveau en 0 à l'instant 5 …
  Décrire précisément $\Omega$ n'est pas si simple ici. On peut toutefois dire que $\Omega$ est un sous-ensemble de l'ensemble des suites à valeurs entières positives.
  *2)* Au deuxième niveau, on trouve les événements : un événement $A$ n'est rien d'autre qu'un **ensemble** qui regroupe certaines issues de l'expérience. Ainsi : $A \subset \Omega$. Par exemple, l'événement $A$ : « le mobile se déplace à droite à l'instant 1 » regroupe tous les $\infty$-déplacements dont le coefficient en position 1 vaut 1. Par exemple, $\omega = (0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots) \in A$.
  Lorsque $\omega \in A$, on dit que $\omega$ **réalise** l'événement $A$.
  *3)* Au troisième niveau, on trouve les v.a.r. . Ce sont des **applications** particulières :
  - elles prennent comme argument un résultat possible de l'expérience et renvoient une valeur réelle. Par exemple, avec l'$\infty$-déplacement $\omega$ précédent : $T(\omega) = T\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 3$.
    En effet, d'après l'énoncé, $T$ prend la valeur du premier instant de retour à l'origine du mobile.
    Par ailleurs :
    $\times$ $X_1\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 1$, $\times$ $X_3\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 0$, $\times$ $X_5\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 0$,
    $\times$ $X_2\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 2$, $\times$ $X_4\big((0, 1, 2, 0, 1, 0 \dots)\big) = 1$, $\times$ …
  - elles sont des machines à créer des événements. Par exemple, $[T = 2]$ est un événement.
    Il regroupe **tous** les $\infty$-déplacements $\omega$ tels que : $T(\omega) = 2$.
    Autrement dit : $[T = 2] = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = 2\} \subset \Omega$.

  Ce deuxième point nous replonge au deuxième niveau. Ainsi, pour comprendre le chapitre sur les v.a.r. , il est essentiel de maîtriser celui sur les probabilités générales.
- Les notations $T = 1$ et $T = 4$ de l'énoncé sont malvenues. Écrire $T = 4$ signigie que $T$ est la v.a.r. constante égale à 4. Il n'en est rien. Il faut alors traduire rigoureusement l'énoncé : si $\omega = (0, 1, 2, 3, 0, 0, 1, \dots)$ alors $T(\omega) = 4$. On peut aussi dire que si les abscisses de déplacement du mobile sont 0, 1, 2, 3, 0, 0, 1 alors la v.a.r. $T$ **prend la valeur** 4.
  Mais en aucun cas, il ne faut écrire $T = 4$ car cela marque une confusion d'objets.
  Sur ce point remarquons que l'écriture : $X_0 = 0$ de l'énoncé est juste. En effet, le mobile se situe toujours à l'origine à l'instant 0. Ainsi, la v.a.r. est constante égale à 0.

***1. a)*** Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables $X_i$.

*Démonstration.*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- L'événement $[T = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile revient en 0 pour la première fois à l'instant $k$. Cela signifie qu'entre l'instant 0 et l'instant $k-1$, le mobile n'est pas revenu en 0 et que ce retour a eu lieu à l'instant $k$.
  Étant données les règles de déplacement du mobile, l'événement $[T = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile s'est déplacé sur la droite lors des $k-1$ premiers instants puis est revenu en 0 à l'instant $k$. Finalement, cet événement est réalisé si et seulement si :
  × le mobile se trouve en position 1 à l'instant 1.
  × le mobile se trouve en position 2 à l'instant 2.
  × ...
  × le mobile se trouve en position $k-1$ à l'instant $k-1$.
  × le mobile se trouve en position 0 à l'instant $k$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } [T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i]\right) \cap [X_k = 0].}$$

- Afin de lever toute ambiguïté, précisons cette formule lorsque $k = 1$.

$$\boxed{[T = 1] = [X_1 = 0]}$$

*(le mobile revient à la position* 0 *dès l'instant* 1*)* □

***b)*** Donner la loi de $X_1$.

*Démonstration.*

- Après l'instant 0 :
  × soit le mobile a avancé d'une position et se trouve donc en position 1.
  × soit le mobile est resté sur le point origine.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_1(\Omega) = \{0, 1\}.}$$

- D'après l'énoncé, on a de plus :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

□

***c)*** En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de $T$.

*Démonstration.*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([T=k]\big) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}[X_i=i]\right)\cap[X_k=0]\right)\\ &= \mathbb{P}\big([X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]\cap[X_k=0]\big)\end{aligned}$$

- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\big([T=k]\big)\\ =\ &\mathbb{P}([X_1=1])\times\ldots\times\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-2}=k-2]}([X_{k-1}=k-1])\times\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0])\end{aligned}$$

- La position du mobile à un instant $j \geqslant 2$ ne dépendant que de sa position à l'instant précédent, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{j-1}=j-1]}([X_j=j]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{j-1}=j-1]}([X_j=j]) = p$$

  et :

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0]) = 1-p$$

  ce qui permet de lever la réserve précédente.

- On en conclut :

$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) = p\times\ldots\times p\times(1-p) = p^{k-1}\ (1-p)}$$

- Remarquons alors : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  (le mobile peut revenir, pour la première fois en position 0 à n'importe quel instant)
  On peut donc en conclure, grâce au calcul de probabilité précédent :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}\,(1-p)}$$

□

***2.*** ***a)*** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

▸ **Initialisation** :
D'après l'énoncé, $X_0 = 0$. Ainsi : $X_0(\Omega) = \{0\} = [\![0,0]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$).
D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Autrement dit, le mobile peut se trouver à n'importe quelle position $k \in [\![0,n]\!]$ à l'instant $n$.
Concernant la position du mobile à l'instant $n+1$, deux cas se présentent :
× soit le mobile se déplace en avant et ainsi le mobile se retrouve en position $k+1 \in [\![1,n+1]\!]$.
× soit le mobile revient en position 0.
Toutes les positions dans $[\![0,n+1]\!]$ peuvent donc bien être atteintes.
Ainsi : $X_{n+1}(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\Omega) = [\![0,n]\!].}$$

**Commentaire**

- L'énoncé demande ici de démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, **l'égalité** : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Il s'agit donc de démontrer une double inclusion.
  - × $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$. Cette inclusion est souvent la plus simple à démontrer. Elle est même généralement la seule nécessaire à la poursuite de l'exercice.
    Ici, comme le mobile ne peut prendre une position (strictement) à gauche de 0 et peut atteindre au plus le point d'abscisse $n$ en $n$ étapes (en ne se déplaçant que sur la droite), on obtient directement l'inclusion voulue.
  - × $[\![0, n]\!] \subset X_n(\Omega)$. Il s'agit ici de démontrer que chacune des positions 0, 1, ..., $n$ peut être atteinte par le mobile en $n$ étapes. Cette inclusion se démontre le plus souvent en exhibant des déplacements du possibles du mobile. Détaillons ce procédé ici.

    Soit $k \in [\![0, n]\!]$. L'$\infty$-déplacement $\omega_k$ suivant réalise l'événement $[X_n = k]$ :

    $$\omega_k \; = \; (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-k}, 1, 2, \ldots, k, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

    Ainsi : $\omega_k \in [X_n = k]$, c'est-à-dire : $X_n(\omega_k) = k$. D'où : $k \in X_n(\Omega)$.

  Dans la démonstration par récurrence proposée, on ne détaille pas si précisément la double-inclusion, mais la récurrence nous assure bien que chacune des positions souhaitées (de 0 à $n+1$ cette fois) sont bien atteintes.
- Remarquons enfin que pour la suite de l'exercice, démontrer l'inclusion : $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ est suffisante. C'est d'ailleurs sans doute ce que l'énoncé avait en tête en posant cette question. □

***b)*** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $\Big( [X_{n-1} = k] \Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $\Big( [X_{n-1} = k] \Big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_n = 0]) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}\left([X_n = 0]\right) & \textit{(car : } \forall k \in [\![0, n-1]\!], \\ & & & \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times (1-p) & \\ & = & (1-p) \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) & \\ & = & (1-p) & \end{array}$$

En effet, comme $\big( [X_{n-1} = k] \big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une système complet d'événements :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p.}$$

□

***3. a)*** Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}\ ,\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\,\mathbb{P}([X_n = k-1])$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- La famille $\Big([X_n = i]\Big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big([X_{n+1} = k]\big) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k]\big)$$

- Démontrons alors : $\forall i \neq k-1,\ [X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] = \varnothing$.
  Soit $i \in [\![0, n]\!]$. L'événement $[X_n = i] \cap [X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile se trouve en position $i$ à l'instant $n$ et en position $k \neq 0$ à l'instant suivant $n+1$. Le mobile se déplaçant d'un pas sur la droite à chaque étape, cet événement ne peut être réalisé que si $i = k-1$.

$$\boxed{\forall i \neq k-1,\ [X_n = i] \cap [X_{n+1} = k] = \varnothing}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X_{n+1} = k]\big) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k]\big) \\ &= \left( \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k-1}}^{n} \cancel{\mathbb{P}\big([X_n = i] \cap [X_{n+1} = k]\big)} \right) + \mathbb{P}\big([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]\big) \end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) && \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\ &= \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times p \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\,\mathbb{P}([X_n = k-1])}$$

**Commentaire**

Il est aussi possible de remarquer directement :

$$[X_{n+1} = k] \quad = \quad [X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]$$

La rédaction est très similaire à celle présentée ci-dessus. L'événement $[X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si le mobile se trouve en position $k$ à l'instant $n+1$. Comme $k \neq 0$, cela se produit si et seulement si le mobile se trouvait en position $k-1$ à l'instant $n$ et se retrouve en position $k$ à l'instant $n+1$ suite à son déplacement vers la droite. $\square$

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}\,,\ \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = p^k\,(1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}\left([X_n = n]\right)$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

*Démonstration.*

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = p^k\,(1-p)$.
  - **Initialisation** :
    D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}\left([X_{n+1} = k]\right) = p^k\,(1-p)$).
    Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :
    × si $k = 0$ :
      D'une part : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 1 - p$.
      D'autre part : $p^0\ (1-p) = 1 - p$.
      Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée dans ce cas.
    × si $k \in [\![1, n]\!]$ :
      D'après la question précédente :
      $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & = & p\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) & \\ & = & p \times p^{k-1}(1-p) & \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à } k-1 \in [\![0, n-1]\!]\textit{)} \\ & = & p^k(1-p) & \end{array}$$
      Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée dans ce cas.
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

    $$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = p^k\,(1-p).}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question précédente appliqué à $k = n + 1 \in [\![1, n+1]\!]$ :
  $$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n]) \quad (*)$$
  On peut alors démontrer par récurrence : $\forall \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \mathbb{P}\big(\,[X_n = n]\,\big) = p^n$.
  - **Initialisation** :
    – D'une part, d'après la question ***1.b)***, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p\right)$.
      Ainsi : $\mathbb{P}\big(\,[X_1 = 1]\,\big) = p$.
    – D'autre part : $p^1 = p$.
    D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}\big(\,[X_{n+1} = n+1]\,\big) = p^{n+1}$).
    On a :
    $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) & = & p\ \mathbb{P}([X_n = n]) & \textit{(d'après l'égalité } (*)\textit{)} \\ & = & p \times p^n & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & p^{n+1} & \end{array}$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n}$$

Ce résultat s'explique par le fait que le seul $n$-déplacement réalisant $[X_n = n]$ est celui dans lequel le mobile ne fait qu'avancer sans retour en 0. Chaque avancée se produisant avec probabilité $p$, un tel $n$-déplacement se déroule avec probabilité $p^n$.

**Commentaire**

- On aurait pu démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$ en utilisant la question ***2.a)***.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  La famille $\left( [X_n = k] \right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements d'après ***2.a)***.
  Ainsi :
  $$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$$
  $$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n = n])$$
  On en déduit :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = n]) &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p^k\,(1-p) && \textit{(d'après le résultat précédent de cette question)} \\ &= 1 - (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} p^k \\ &= 1 - \cancel{(1-p)}\, \frac{1-p^n}{\cancel{1-p}} \\ &= \cancel{1} - (\cancel{1} - p^n) \ = \ p^n \end{aligned}$$
- Ce n'était sans doute pas la méthode attendue au regard de la question suivante. □

***c)*** Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \left( \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k]) \right) + \mathbb{P}([X_n = n]) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{n-1} p^k\,(1-p) \right) + p^n && \textit{(d'après la question \textbf{3.b)})} \\ &= (1-p) \left( \sum_{k=0}^{n-1} p^k \right) + p^n \\ &= \cancel{(1-p)}\, \frac{1-p^n}{\cancel{1-p}} + p^n && \textit{(car } p \neq 1\textit{)} \\ &= 1 - p^n + p^n \ = \ 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([X_n = k]\right) = 1}$$

□

*4.* Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `rd.randint(0,3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par $X_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
1 n = int(input(' Entrez un entier naturel n : '))
2 X = 0
3 for k in range(n):
4     u = rd.randint(0,3)
5     if u == 2:
6         X = ...........
7     else:
8         X = ...........
9 print(X)
```

*Démonstration.*
On peut compléter le programme de la manière suivante :

```
1 n = int(input(' Entrez un entier naturel n : '))
2 X = 0
3 for k in range(n):
4     u = rd.randint(0,3)
5     if u == 2:
6         X = X+1
7     else:
8         X = 0
9 print(X)
```

Le but de ce programme est de simuler la v.a.r. $X_{\mathtt{n}}$ qui donne la position du mobile à l'instant `n`.
Pour ce faire, le déplacement du mobile est simulé à chaque instant.
Détaillons les différents éléments du script.

- **Début du programme**
  - × On commence par stocker dans une variable `n` une valeur entière choisie par l'utilisateur.
  - × On crée alors une variable informatique `X` dans le but stocker les simulations successives des v.a.r. $X_0$, $X_1$, …, $X_{\mathtt{n}}$. Comme $X_0 = 0$, la variable `X` est initialisée à 0 (ce qui revient à dire que le mobile est initialement en position 0).

```
1 n = int(input(' Entrez un entier naturel n : '))
2 X = 0
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 8 consistent à simuler successivement les v.a.r. $X_1$, …, $X_{\mathtt{n}}$.
  Pour cela, on met en place une structure itérative (boucle for) :

```
3 for k in range(n):
4     u = rd.randint(0,3)
5     if u == 2:
6         X = X+1
7     else:
8         X = 0
```

L'idée est la suivante. Supposons qu'au début d'un certain tour de boucle $\mathtt{k} \in [\![0, \mathtt{n}-1]\!]$ la variable informatique `X` contient une simulation de la v.a.r. $X_{\mathtt{k}}$. Autrement dit, la variable `X` contient une position possible du mobile après `k` instants. L'instant suivant, le mobile se trouve :

– en position `X + 1` s'il s'est déplacé vers la droite. Dans ce cas, on procédera à la mise à jour :

```
6            X = X + 1
```

D'après l'énoncé, ceci doit se produire avec probabilité $p = \frac{1}{3}$.

– en position `0` s'il est revenu en 0. Dans ce cas, on procédera à la mise à jour :

```
8            X = 0
```

D'après l'énoncé, ceci doit se produire avec probabilité $1 - p = \frac{2}{3}$.

Il reste alors à comprendre comment on procède pour que ces mises à jour se fassent avec la bonne probabilité. Ceci est réalisé à l'aide de la fonction `rd.randint`. Plus précisément, l'instruction `rd.randint(0,3)` renvoie 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$, 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et 2 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Ainsi, la ligne 4 stocke dans une variable `u` :

– la valeur 2 avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

– une valeur de $\{0, 1\}$ avec une probabilité $\frac{2}{3}$.

```
4        u = rd.randint(0,3)
```

La mise à jour correspondant au déplacement à droite doit se faire avec probabilité $\frac{1}{3}$.

```
5        if u == 2:
6            X = X+1
```

Celle correspondant au retour en 0 doit se faire avec probabilité $\frac{2}{3}$.

```
7        else:
8            X = 0
```

Étant donné le contenu de `X` au début de cette boucle, la variable `X` va contenir une simulation de la v.a.r. $X_{\mathtt{k}+1}$ à l'issue de cette structure conditionnelle et donc au début du $(\mathtt{k}+1)^{\text{ème}}$ tour de boucle.

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `X` contient une simulation de la v.a.r. $X_{\mathtt{n}}$, autrement dit une position possible du mobile après `n` instants. □

***5. a)*** Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \frac{(n-1)\, p^n - n\, p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2-1} k\ p^{k-1} = \sum_{k=1}^{1} k\ p^{k-1} = 1\ p^0 = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{(2-1)\, p^2 - 2\, p^{2-1} + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{(1-p)^2}{(1-p)^2} = 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

- ▸ **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.}\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} = \frac{n\ p^{n+1} - (n+1)\,p^n + 1}{(1-p)^2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^{n-1} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n\ p^{n-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)^2\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-2p+p^2)\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \left(\cancel{n\,p^{n-1}} - 2\,n\,p^n + n\,p^{n+1}\right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1-2n)\,p^n + 1 + n\,p^{n+1}}{(1-p)^2} = \frac{n\,p^{n+1} - (n+1)\,p^n + 1}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}.}$$

□

***b)*** En déduire : $\mathbb{E}\,(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

*Démonstration.*
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***2.a)***, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
  La v.a.r. $X_n$ est donc finie. Ainsi, $X_n$ admet une espérance.
- De plus, par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k \in X_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([X_n = k])\right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^k\ (1-p)\right) + n\ p^n && \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{2.b)}}, \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\
&= (1-p)\ p\ \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^n \\
&= \cancel{(1-p)}\ p\ \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^{\cancel{2}}} + n\ p^n && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= p\ \left(\frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)\ p^{n-1}}{1-p}\right)
\end{aligned}$$

On en conclut finalement :

$$\mathbb{E}(X_n) = p\left(\frac{\cancel{np^n} - p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \cancel{n\,p^{n-1}} - \cancel{np^n}}{1-p}\right) = p\left(\frac{1-p^n}{1-p}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_n\right) = \frac{p\left(1-p^n\right)}{1-p}}$$

□

***6. a)*** Montrer, en utilisant la question ***3.a)*** : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_n\right) + 1\right)$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Les v.a.r. $X_n$ et $X_{n+1}$ sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc des moments d'ordre 2.
- De plus, par définition du moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}^2) &= \sum_{k \in X_{n+1}(\Omega)} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) && \textit{(car } 0^2\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 0\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2\ p\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\
&= p \sum_{k=1}^{n+1} k^2\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) \\
&= p \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2\ \mathbb{P}([X_n = k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\ \mathbb{P}([X_n = k]) + 2\sum_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k])\right) \\
&= p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right) && \begin{array}{l}\textit{(par définition des moments} \\ \textit{et par la question } \textbf{\textit{3.c)}}\textit{)}\end{array}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right)}$$

□

***b)*** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p\ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de la suite $(u_n)$ :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2(n+1)-1)\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} \\[2mm] & = & \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2n+1)\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} \\[2mm] & = & p\left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\ \mathbb{E}(X_n) + 1\right) + (2n+1)\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} p\ u_n & = & p\ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + p\ \ (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p} \\[2mm] & = & p\ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} \end{array}$$

- On obtient, par soustraction des deux lignes :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - pu_n & = & \cancel{p\ \mathbb{E}(X_n^2)} - \cancel{p\ \mathbb{E}(X_n^2)} + 2p\ \mathbb{E}(X_n) + p + ((\cancel{2n}+1) - (\cancel{2n}-1))\,\dfrac{p^{n+2}}{1-p} \\[2mm] & = & 2p\ \dfrac{p(1-p^n)}{1-p} + p + 2\ \dfrac{p^{n+2}}{1-p} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\[2mm] & = & p\ \dfrac{2p(1-p^n)}{1-p} + p\ \dfrac{1-p}{1-p} + p\ \dfrac{2p^{n+1}}{1-p} \\[2mm] & = & p\ \dfrac{2p(1-p^n) + (1-p) + 2p^{n+1}}{1-p} \\[2mm] & = & p\ \dfrac{2p - \cancel{2p^{n+1}} + 1 - p + \cancel{2p^{n+1}}}{1-p} \\[2mm] & = & p\ \dfrac{1+p}{1-p} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p\ u_n + p\ \dfrac{1+p}{1-p}}$$

□

***c)*** En déduire l'expression de $u_n$, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de $p$ et $n$.

*Démonstration.*
D'après la formule trouvée dans la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite $(u_n)$ est :
$$x = p\,x + \frac{p(1+p)}{1-p}$$
Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.
- On écrit :
$$\begin{array}{rcccccl} u_{n+1} & = & p & \times & u_n & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_1) \\ \lambda & = & p & \times & \lambda & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_2) \end{array}$$
et donc $$u_{n+1} - \lambda = p \times (u_n - \lambda) \qquad (L_1)-(L_2)$$
Notons alors $(v_n)$ la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.
- La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $p$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$v_n = p^n \times v_0 = p^n \times (u_0 - \lambda)$$
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$u_n = v_n + \lambda = p^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda$$
- Enfin : $u_0 = \mathbb{E}(X_0^2) + (2\times 0 - 1)\dfrac{p^1}{1-p} = \mathbb{E}(0^2) - \dfrac{p}{1-p} = -\dfrac{p}{1-p}$.
- Ainsi : $u_0 - \lambda = -\dfrac{p}{1-p} - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \dfrac{-p(1-p) - p(1+p)}{(1-p)^2} = -p\dfrac{1 - \cancel{p} + 1 + \cancel{p}}{(1-p)^2} = \dfrac{-2p}{(1-p)^2}$.
- On en conclut :
$$\begin{aligned} u_n &= p^n\,\frac{-2p}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1 + p - 2p^n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p}{(1-p)^2}\,(1 + p - 2p^n)}$$

- Il reste à déterminer $\mathbb{E}(X_n^2)$. Par définition de $u_n$ :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1 + p - 2p^n) - (2n-1)\,\frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1 + p - 2p^n) - (2n-1)(1-p)\,p^n\,\frac{p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1 + p - 2p^n) - (2n-1)(1-p)\,p^n) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1 + p - 2p^n) - (2n-1)(1-p)\,p^n) \end{aligned}$$

- Enfin :

$$-(2n-1)(1-p) = (2n-1)(p-1) = 2np - 2n - p + 1 = (1-2n) + (2n-1)p$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n^2) &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 + p - 2p^n + (1-2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 + p + (-1-2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 + p - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right)}$$

□

***d)*** Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n\,(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

*Démonstration.*

- On a déjà vu en question ***6.a)*** que la v.a.r. $X_n$ admet un moment d'ordre 2. Ainsi $X_n$ admet une variance.
- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2 \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 + p - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right) - \left(\frac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2 \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 + p - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1}\right) - \frac{p}{(1-p)^2}\,p(1-p^n)^2 \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 + \cancel{p} - (1+2n)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p(\cancel{1} - 2p^n + p^{2n})\right) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (1+2n)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}\right) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)}$$

□

## Problème (`sujet maison`)

On souhaite étudier dans ce problème l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$(E) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t}$$

d'inconnue $\varphi$ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $(E_0)$ l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0$$

### Partie I : Étude d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

***1. a)*** On exécute le script suivant :

```
I = np.eye(3)
A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[2,1,-2]])
B = np.dot(A-I, A+I)
C = np.dot(B, A+2*I)
print(C)
```

et il renvoie :

```
[[0  0  0]
 [0  0  0]
 [0  0  0]]
```

Que peut-on en déduire ?

*Démonstration.* On peut en déduire que $(A - I_3)(A + I_3)(A + 2I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : le polynôme } P(x) = (x-1)(x+1)(x+2) \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

$\square$

***b)*** Donner les valeurs propres possibles de $A$.

*Démonstration.* D'après la question précédente, $P$ étant un polynôme annulateur de $A$ :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{-2, -1, 1\}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } A \text{ sont : } -2,\ -1 \text{ et } 1.}$$

$\square$

***2. a)*** Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de $A$.

*Démonstration.* Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
U \in E_{-2}(A) &\iff (A+2I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -y \\ z = -2y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ z = -2y \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{1}{2}y \quad \text{et} \quad z = -2y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-2}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc $-2$ est valeur propre de $A$. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-2} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ :

— engendre $E_{-2}(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_{-2} \text{ est une base de } E_{-2}(A)}$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) &\iff (A+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x+y = 0 \\ y+z = 0 \\ 2x+y-z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y = 0 \\ y+z = 0 \\ -y-z = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
&\iff \begin{cases} x+y = 0 \\ y+z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\iff \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \quad \text{et} \quad z = -y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc $-1$ est valeur propre de $A$. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ :

— engendre $E_{-1}(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(A)}$.

- Enfin :

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A-I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -x+y \phantom{+z} = 0 \\ \quad -y+\ z = 0 \\ 2x+y-3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x+\ y \phantom{+z} = 0 \\ \quad -\ y+\ z = 0 \\ \quad 3y-3z = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\
&\iff \begin{cases} -x+y \phantom{+z} = 0 \\ \quad -y+z = 0 \\ \quad 0 = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \quad \text{et} \quad z = y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 1 est valeur propre de $A$. De plus, la famille $\mathcal{F}_1 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ :

— engendre $E_1(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(A)}$.

Les valeurs propres possibles de $A$ sont $-2, -1, 1$ et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de $A$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}}$$

□

***b)*** Justifier que $A$ est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

*Démonstration.* La matrice $A$ est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc $A$ est diagonalisable. Ainsi, il existe :

- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de $A$
- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $A$

telles que $A = PDP^{-1}$.
On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{D'après la formule de changement de base, on a bien } A = PDP^{-1}.}$$

□

## Partie II : Calcul des solutions générales de $(E)$

On note $S$ l'ensemble des solutions de $(E)$ et $S_0$ l'ensemble des solutions de $(E_0)$.
On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$ où $\varphi$ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

***3.*** Montrer que $\varphi$ est solution de $(E_0)$ si et seulement si $X' = AX$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \varphi'''(t) = 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \\ &\iff \varphi \text{ est solution de } (E_0) \end{aligned}$$

□

***4. a)*** Déterminer les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$.
*(On utilisera les notations $C_1$, $C_2$ et $C_3$ pour nommer les constantes indéterminées)*

*Démonstration.* D'après la partie I, la matrice $A$ est diagonalisable, $\text{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}$ et la famille $(U_{-2}, U_{-1}, U_1) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$ (pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $U_\lambda$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$). On en déduit, d'après le cours, que les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$ sont de la forme :

$$t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{-2t} U_{-2} + C_2 \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + C_3 \mathrm{e}^{t} U_1$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$. □

***b)*** Expliciter l'ensemble $S_0$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\varphi \in S_0 &\iff \varphi \text{ est solution de } (E_0) \\
&\iff X' = AX && \textit{(d'après la question 3)} \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{t} \\ -2C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t} + C_3 e^{t} \\ 4C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{t} \end{pmatrix} && \textit{(d'après la question 4.a))} \\
&\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{t} && \textit{(en ne gardant que la première coordonnée)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } S_0 = \left\{ t \mapsto C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{t} \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

□

***5. a)*** Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que la fonction $g : t \mapsto (at + b)e^{2t}$ soit une solution particulière de $(E)$.
(*Indication : commencer par calculer et mettre sous forme factorisée* $g'(t)$, $g''(t)$ *et* $g'''(t)$*.*)

*Démonstration.* Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $g : t \mapsto (at + b)e^{2t}$. La fonction $g$ est dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables trois fois sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$g'(t) = a e^{2t} + 2(at + b)e^{2t} = (2at + a + 2b)e^{2t}$$
$$g''(t) = 2a e^{2t} + 2(2at + a + 2b)e^{2t} = (4at + 4a + 4b)e^{2t}$$
$$g'''(t) = 4a e^{2t} + 2(4at + 4a + 4b)e^{2t} = (8at + 12a + 8b)e^{2t}$$

Il suit :

$$\begin{aligned}
g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) &= -2(at + b)e^{2t} \\
&\quad - \ (2at + a + 2b)e^{2t} \\
&\quad + 2(4at + 4a + 4b)e^{2t} \\
&\quad + \ (8at + 12a + 8b)e^{2t} \\
&= (12at + 19a + 12b)e^{2t}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) = (-12t + 5)e^{2t} &\iff (12at + 19a + 12b)e^{2t} = (-12t + 5)e^{2t} \\
&\iff (12at + 19a + 12b) = (-12t + 5)
\end{aligned}$$

On en déduit, par identification des coefficients :

$$\begin{aligned}
g \text{ est une solution particulière de } (E) &\iff \begin{cases} 12a & = -12 \\ 19a + 12b = 5 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a & = -1 \\ & b = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g : t \mapsto (-t + 2)e^{2t} \text{ est une solution particulière de } (E).}$$

□

***b)*** Montrer que $\varphi$ est solution de $(E)$ si et seulement si $\varphi - g$ est solution de $(E_0)$, où $g$ est la solution particulière déterminée à la question précédente.

*Démonstration.* Raisonnons par double implication.

- Supposons que $\varphi$ soit solution de $(E)$.
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\varphi - g)'''(t) + 2(\varphi - g)''(t) - (\varphi - g)'(t) - 2(\varphi - g)(t) &= \varphi'''(t) + 2\varphi''(t) - \varphi'(t) - 2\varphi(t) \\ &\quad - \left(g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t)\right) \\ &= (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} - (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{et donc } \varphi - g \text{ est solution de } (E_0).}$$

- Supposons que $\varphi - g$ soit solution de $(E_0)$.
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi - g)'''(t) + 2(\varphi - g)''(t) - (\varphi - g)'(t) - 2(\varphi - g)(t) = 0$$

  et donc, en utilisant le fait que $g$ est solution de $(E)$ :

$$\varphi'''(t) + 2\varphi''(t) - \varphi'(t) - 2\varphi(t) = g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t}$$

$$\boxed{\text{ceci permet de conclure que } \varphi \text{ est solution de } (E).}$$

□

***c)*** En déduire l'ensemble $S$.

*Démonstration.* En traduisant le résultat de la question ***5.b)***, on a

$$\varphi \in S \iff \varphi - g \in S_0$$

Ainsi, d'après la question ***4.b)***,

$$\begin{aligned}\varphi \in S &\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) - g(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} \\ &\iff \exists (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } S = \left\{t \mapsto C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t} \mid (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3\right\}}$$

□

## Partie III : Etude d'une famille de problèmes de Cauchy

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de Cauchy de la forme :

$$(P_{u,v}) : \begin{cases} \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = u \\ \varphi''(0) = v \end{cases} \qquad \text{où } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

***6.*** Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

***a)*** Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right)\mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

*Démonstration.* Soit $\varphi$ une solution de $(E)$. Il existe $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -2C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} + 2(-t+2)\mathrm{e}^{2t} \\ &= -2C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-2t+3)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= 4C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{2t} + 2(-2t+3)\mathrm{e}^{2t} \\ &= 4C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{t} + (-4t+4)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= C_1 + C_2 + C_3 + 2 \\ \varphi'(0) &= -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 \\ \varphi''(0) &= 4C_1 + C_2 + C_3 + 4\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\varphi \text{ est solution de } (P_{u,v}) \iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + 2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 = u \\ 4C_1 + C_2 + C_3 + 4 = v \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 = u - 3 \\ 4C_1 + C_2 + C_3 = v - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 & \\ C_2 + 3C_3 = u - 5 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -3C_2 - 3C_3 = v & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 & \\ C_2 + 3C_3 = u - 5 & \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6C_1 + 6C_2 = -3u - v + 9 & L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ 2C_2 = -u - v + 5 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6C_1 = 2v - 6 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ 2C_2 = -u - v + 5 & \\ 6C_3 = 3u + v - 15 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}v - 1 \\ C_2 = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2} \\ C_3 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ceci démontre qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\boxed{\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right) \mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}}$$

□

***b)*** Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t)$.

*Démonstration.* Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi_{u,v}(t) = \mathrm{e}^{2t} \left( \left(\frac{1}{3}v - 1\right) \mathrm{e}^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} + (-t+2) \right)$$

Tout d'abord :

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{3}v - 1\right) \mathrm{e}^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} = 0$$

Ensuite :

$$\lim_{t \to +\infty} (-t+2) = -\infty$$

Enfin :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{2t} = +\infty$$

$$\boxed{\text{Par somme et produit : } \lim_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t) = -\infty}$$

□

***7. a)*** Expliciter, pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi_{0,1}(t)$.

*Démonstration.* Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}(t) &= \left(\frac{1}{3} - 1\right) \mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t} \\ &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

□

***b)*** En déduire une fonction **Python**, nommée `phi(t)`, qui prend en entrée un réel $t \geqslant 0$ et renvoie le réel $\varphi_{0,1}(t)$.

*Démonstration.* On propose la fonction **Python** suivante :

```
def phi(t):
    return - (2/3) * np.exp(-2*t) + 2 * np.exp(-t)
                - (7/3) * np.exp(t) + (-t+2)*np.exp(2*t)
```

□

***c)*** Dire, parmi les quatre représentations graphiques de fonctions ci-dessous, laquelle correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$. On expliquera son raisonnement en notant $\psi_i$ la fonction associée au tracé numéro $i$.

*Démonstration.*

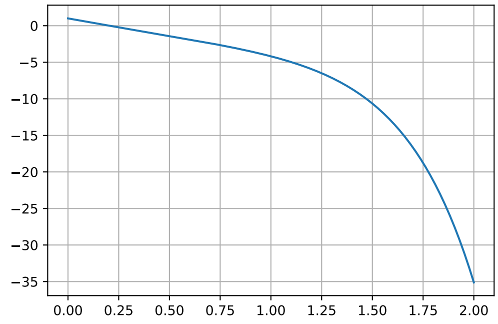



**Fig. 1** Tracé 1

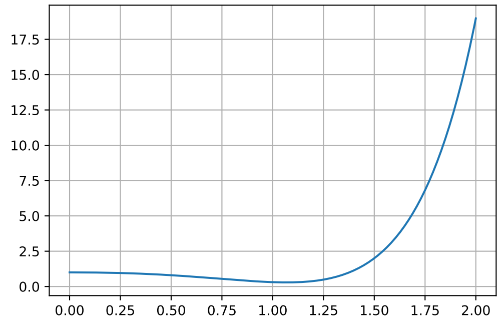



**Fig. 2** Tracé 2

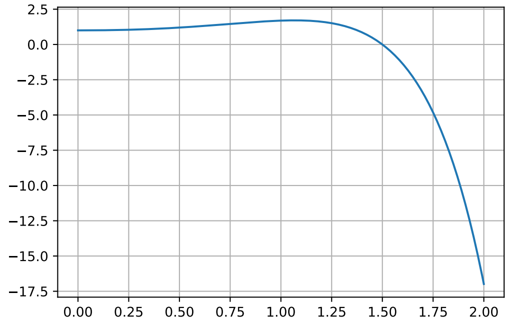



**Fig. 3** Tracé 3

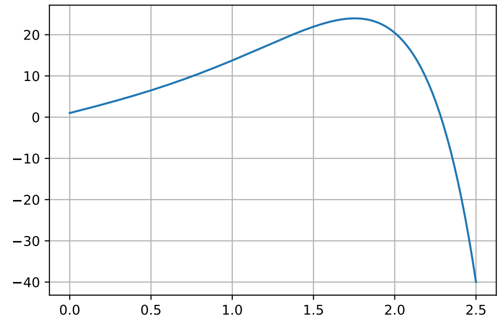



**Fig. 4** Tracé 4

- La fonction $\psi_2$ vérifie : $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi_2(t) = +\infty$. Ainsi, d'après la question ***6.b)***, le tracé numéro 2 ne correspond pas à $\varphi_{0,1}$.
- Par définition, $\varphi'_{0,1}(0) = 0$. Or, on remarque que $\psi'_1(0) < 0$ et $\psi'_4(0) > 0$. Donc les tracés numéros 1 et 4 ne peuvent pas correspondre à $\varphi_{0,1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que c'est le tracé numéro 3 qui correspond au graphe de } \varphi_{0,1}.}$$

□

***d)*** Montrer : $\varphi_{0,1}(2) = \mathrm{e}^2 \left( \dfrac{6 - 7\mathrm{e}^4}{3\mathrm{e}^4} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)$. En déduire qu'il existe $t \in ]0, 2[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,1}(2) &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{-2} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^2 \\
&= \mathrm{e}^2 \left( -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} + 2\mathrm{e}^{-4} - \frac{7}{3} \right) \\
&= \mathrm{e}^2 \left( \frac{2}{\mathrm{e}^4} - \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right) \\
&= \mathrm{e}^2 \left( \frac{6 - 7\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)
\end{aligned}$$

- Par définition, $\varphi_{0,1}(0) = 1 > 0$.

- D'après le calcul précédent, en utilisant le fait que $e^4 > 2 > \frac{6}{7}$, on a également $\varphi_{0,1}(2) < 0$.

De plus, la fonction $\varphi_{0,1}$ est continue sur $[0, 2]$.

$$\boxed{\text{D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel } t \in ]0, 2[ \text{ tel que } \varphi_{0,1}(t) = 0.}$$

$\square$

*e)* Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée d'un zéro de la fonction $\varphi_{0,1}$ à `eps` près en appliquant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(eps):
    a = _____
    b = _____
    while ______________ :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
            _________
        else:
            _________
    return (a+b)/2
```

*Démonstration.* On propose de compléter le programme de la manière suivante :

```
def dichotomie(eps):
    a = 0
    b = 2
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

$\square$

## Partie IV : Etude d'une fonction de deux variables

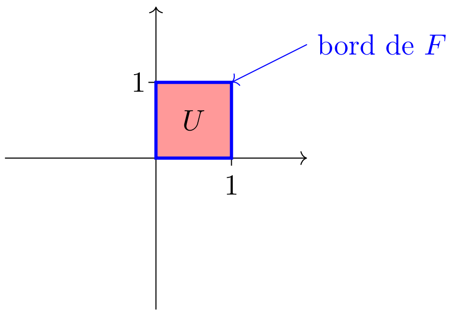
On considère le fermé $F = [0, 1]^2$ et l'ouvert $U = ]0, 1[^2$.
On note $f$ la fonction de deux variables définies sur $F$ par :

$$\forall (x, y) \in F,\ f(x, y) = \varphi_{x,y}(1)$$

*(On s'intéresse ici à l'évolution au temps* 1 *des solutions des problèmes de Cauchy étudiés à la partie précédente.)*

***8.*** Représenter l'ouvert $U$ ainsi que le bord de $F$ sur un même graphique, dans un repère orthonormé.

*Démonstration.* On représente $U$ en rouge et le bord de $F$ en bleu.




$\square$

***9.*** Montrer qu'il existe trois constantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ (que l'on explicitera) telles que :

$$\forall (x,y) \in F,\ f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

*Démonstration.* Soit $(x,y) \in F$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \varphi_{x,y}(1) \\ &= \left(\frac{1}{3}y - 1\right) \mathrm{e}^{-2} + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{1} + (-1+2)\mathrm{e}^{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) x + \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) y - \mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathrm{e} + \mathrm{e}^{2} \\ &= \alpha x + \beta y + \gamma \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) \\ \beta &= \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) \\ \gamma &= -\mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathrm{e} + \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

$\square$

***10.*** Démontrer que $f$ admet un maximum global sur $F$.

*Démonstration.* La fonction $f$ est continue sur $F$ (car polynomiale) et $F$ est un fermé borné.

$$\boxed{\text{D'après le cours, on en déduit que } f \text{ admet un maximum global sur } F.}$$

$\square$

***11.*** ***a)*** Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$.

*Démonstration.* La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$ car polynomiale (d'après la question ***9***). $\square$

***b)*** La fonction $f$ admet-elle des points critiques sur $U$ ? Si oui, les donner.

*Démonstration.* Soit $(x,y) \in U$.

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ est un point critique de } f \quad &\Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $\alpha \neq 0$ (car $\mathrm{e} > 2$ donc $\mathrm{e} \neq \mathrm{e}^{-1}$) donc $f$ n'admet aucun point critique sur $U$. $\square$

***c)*** En déduire que le maximum global de $f$ sur $F$ ne peut pas être atteint sur $U$.
*(Il est donc nécessairement atteint sur le bord de $F$.)*

*Démonstration.*
Notons $(x_0, y_0) \in F$ un point où $f$ atteint son maximum global sur $F$.
Supposons que $(x_0, y_0) \in U$.
L'ensemble $U$ étant un ouvert et $f$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, le point $(x_0, y_0)$ est nécessairement un point critique de $f$. Or, d'après la question ***11.b)***, $f$ n'admet aucun point critique sur $U$. C'est absurde.

$$\boxed{\text{On peut conclure que } (x_0, y_0) \notin U \text{ et donc } (x_0, y_0) \in F \setminus U \text{ (c'est-à-dire le bord de } F\text{).}}$$

□

***12. a)*** Montrer : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

*Démonstration.*

- On sait que $\mathrm{e} > 2$ et donc $\mathrm{e}^{-1} < 1 < \mathrm{e}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) > 0.}$$

- On remarque que :

$$\beta = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2 + \mathrm{e}^3 - 3\mathrm{e}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2 + \mathrm{e}(\mathrm{e}^2 - 3)\right)$$

Or, $\mathrm{e}^2 > 4 > 3$.

$$\boxed{\text{D'où : } \beta > 0.}$$

□

***b)*** En déduire que le maximum global de $f$ sur $F$ est atteint en un unique point $(x_0, y_0)$ dont on explicitera les coordonnées.

*Démonstration.* Soit $(x, y) \in F$. On a $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \alpha x \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant \beta y \leqslant \beta$.
En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$\alpha x + \beta y \leqslant \alpha + \beta$$

D'où

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \leqslant \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve que } f \text{ atteint son maximum global sur } F \text{ au point } (1, 1).}$$

De plus, si $x < 1$ ou $y < 1$, alors

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma < \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve que le maximum global de } f \text{ sur } F \text{ est atteint uniquement en } (1, 1).}$$

□

***c)*** Parmi les deux tracés de lignes de niveaux ci-dessous, lequel correspond à la fonction $f$ ?

*Démonstration.* Il s'agit du tracé numéro 2, car on remarque que la valeur inscrite sur les lignes de niveaux augmente lorsque l'on se rapproche du point $(1, 1)$, contrairement à ce que l'on peut observer sur le tracé numéro 1. □

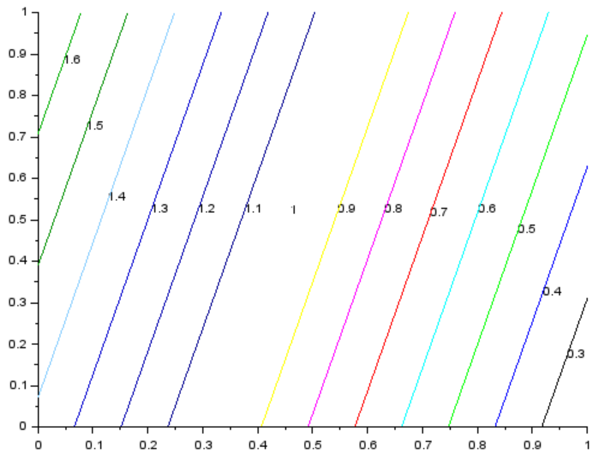


**Fig. 5** Tracé 1

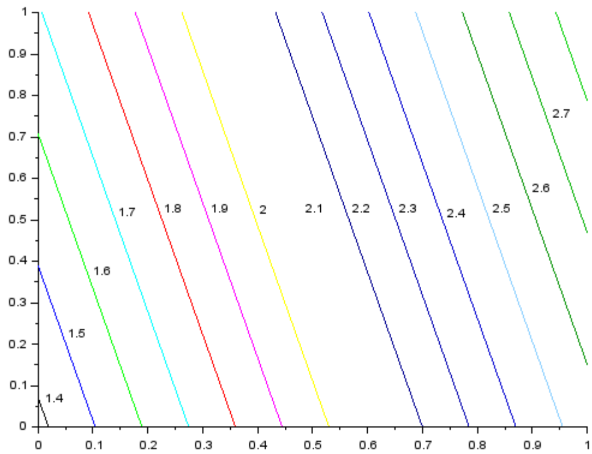


**Fig. 6** Tracé 2