DS8 (vB)

Le théorème limite central est l'un des théorèmes fondamentaux des probabilités : il occupe une place centrale aussi bien d'un point de vue théorique que des applications (notamment en statistiques). Le but de ce problème est d'explorer diverses applications de ce théorème. La première partie étudie quelques propriétés, applications simples, et généralisation du théorème limite central. La deuxième partie se concentre sur l'utilisation de ce théorème en statistique, en particulier dans le cadre de sondages électoraux. La troisième partie s'attelle à démontrer le théorème limite central, via une adaptation de la méthode de Lindeberg.
Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour une variable aléatoire X, on notera $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance lorsqu'elles existent.
Pour tout le problème, on se donne une suite de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et de même loi. On supposera qu'elles admettent un moment d'ordre deux et on notera $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ leur espérance commune et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i)$ leur variance commune avec $\sigma > 0$. Enfin, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$$

Première partie : Autour du théorème limite central

1. Soit Z une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire que la loi de Z admet la densité f_Z définie par : $f_Z(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

On note Φ la fonction de répartition de Z définie par : $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\, dt$.

a) Montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction Φ est strictement croissante.

c) Montrer que la fonction Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

2. ***a)*** Énoncer la loi faible des grands nombres pour la suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

b) Rappeler les hypothèses du théorème limite central et en déduire que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) = \Phi(x) \qquad (*)$$

3. Donnons une première application du théorème central limite, pour un joueur de fléchettes. Au $i^{\text{ème}}$ lancer de fléchette, le score est une variable aléatoire X_i qui prend ses valeurs dans $\{0, 2, 5, 10\}$. On suppose que les X_i sont indépendantes et de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}\big([X_i = 0]\big) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}\big([X_i = 2]\big) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\big([X_i = 5]\big) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}\big([X_i = 10]\big) = \frac{1}{10}$$

a) Calculer $\mathbb{E}(X_i)$.

b) Calculer $\mathbb{V}(X_i)$.

c) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie de la manière suivante :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, \tfrac{1}{5}[, \quad f(x) = 2 \text{ si } x \in [\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{10}[, \quad f(x) = 5 \text{ si } x \in [\tfrac{7}{10}, \tfrac{9}{10}[, \quad f(x) = 10 \text{ si } x \in [\tfrac{9}{10}, 1]$$

(i) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $f(U)$ a même loi que X_i.

(ii) Compléter le programme **Python** suivant, qui permet de générer un nombre aléatoire de même loi que X_i. On rappelle que la fonction `rd.random()` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

```
def X():
    U = rd.random()
    ...
```

Après n lancers de fléchettes, le score du joueur est : $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

d) Exprimer Z_n en fonction de S_n et de n.

e) Un joueur lance $n = 200$ fléchettes. En utilisant le théorème limite central, montrer que la probabilité que le score du joueur soit inférieur ou égal à 500 est approximativement $\Phi(-2,5)$. *Cette probabilité vaut environ* $6 \cdot 10^{-3}$.

4. Soit N un entier naturel fixé supérieur ou égal à 1. La fonction $\Phi : \mathbb{R} \to]0,1[$ étant strictement croissante et bijective, pour $k \in \{1, \ldots, 2N-1\}$, on peut définir le réel $x_k = \Phi^{-1}\left(\frac{k}{2N}\right)$. On pose $x_0 = -\infty$ et $x_{2N} = +\infty$, avec par convention : $\Phi(x_0) = 0$ et $\Phi(x_{2N}) = 1$.

a) Montrer qu'il existe un n_0 (qui dépend de N) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\max_{k \in \{0,\ldots,2N\}} \Big(\big|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_k] \big) - \Phi(x_k)\big| \Big) \leqslant \frac{1}{2N}$$

On divise l'ensemble des réels en intervalles $I_k =]x_{k-1}, x_k]$, pour $k \in \{1, \ldots, 2N-1\}$, avec par convention $I_1 =]-\infty, x_1]$ et $I_{2N} =]x_{2N-1}, +\infty[$.

b) Soit $k \in \{1, \ldots, 2N\}$ et x un réel quelconque tel que $x \in I_k$. Soit $n \geqslant n_0$.

(i) Montrer que l'on on : $\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x] \big) - \Phi(x) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_k] \big) - \Phi(x_{k-1})$.

(ii) En déduire : $\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x] \big) - \Phi(x) \leqslant \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \dfrac{1}{2N} = \dfrac{1}{N}$.

(iii) De même, montrer que l'on a : $\Phi(x) - \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x] \big) \leqslant \dfrac{1}{N}$.

c) En déduire que, pour tout réel x et tout $n \geqslant n_0$, on a : $\big|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x] \big) - \Phi(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{N}$.

d) Soit $(M_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de majorants des fonctions D_n définies pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$D_n(x) = \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x] \big) - \Phi(x)$$

c'est-à-dire tels que $\big|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x] \big) - \Phi(x)\big| \leqslant M_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrer que l'on peut choisir la suite $(M_n)_{n \geqslant 1}$ telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = 0 \qquad (**)$$

Notons que $(**)$ *est une version plus forte que* $(*)$.

5. Soit x un réel fixé.

a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(i) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)$.

(ii) En appliquant le résultat $(**)$ de la question ***4.d)***, démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_n]\big) - \Phi(x_n)\right| = 0$$

(iii) En conclure que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_n]\big) = \Phi(x)$.

b) (i) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant x - \dfrac{1}{n}\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n < x]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big)$.

(ii) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n < x]\big) = \Phi(x)$.

c) Montrer que, pour tous réels a, b qui vérifient $a < b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \in [a,b]]\big) \ = \ \Phi(b) - \Phi(a)$$

Deuxième partie : Applications en statistique

Dans toute cette partie, on suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p, où $p \in \,]0,1[$. On se servira de ces variables aléatoires pour modéliser une élection entre les candidats A et B : $X_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ personne vote pour le candidat A et $X_i = 0$ si la $i^{\text{ème}}$ personne vote pour le candidat B. Le paramètre p représente la proportion des voix qu'obtient le candidat A.
Les sondages cherchent à estimer le paramètre p inconnu pour anticiper le résultat de l'élection. On sélectionne n personnes (dans la population totale) et on note comme précédemment $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, qui correspond à la proportion des personnes (parmi celles sélectionnées) qui votent pour le candidat A.

6. ***a)*** *Démontrer* : $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\mathbb{V}(X_i) = p\,(1-p)$.

b) On notera dans la suite $\sigma = \sqrt{p\,(1-p)}$. Démontrer : $\sigma \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c) Démontrer : $\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big) = p$.

d) Démontrer : $\mathbb{V}\big(\overline{X}_n\big) = \dfrac{1}{n}\,\sigma^2$.

7. On peut construire un intervalle de confiance pour p en appliquant le théorème limite central.

a) Montrer que pour tout $a > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,\big(\overline{X}_n - p\big) \in [-a,a]\right]\right) \ = \ \Phi(a) - \Phi(-a)$$

b) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[p \in \left[\overline{X}_n - a\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_n + a\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right]\right) \ = \ 2\,\Phi(a) - 1$$

c) Une table des valeurs de Φ donne : $\Phi(1,96) \approx 0,975$. En déduire que pour n grand, le paramètre p a approximativement 95% de chances d'appartenir à l'intervalle $\left[\overline{X}_n - 1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_n + 1,96\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Un problème est que σ dépend de p, donc l'intervalle ci-dessus dépend encore de p, qui est inconnu.

d) Montrer que pour n grand, le paramètre p a approximativement plus de 95% de chances d'appartenir à l'intervalle $\left[\overline{X}_n - \dfrac{0,98}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_n + \dfrac{0,98}{\sqrt{n}}\right]$.

Une autre solution est d'utiliser les observations $X_1, \ldots, X_n$ pour estimer σ.

8. On pose, pour $n \geqslant 1$: $V_n = \overline{X}_n \left(1 - \overline{X}_n\right) + \dfrac{1}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Démontrer : $V_n - \sigma^2 - \dfrac{1}{n} = \left(\overline{X}_n - p\right)\left(1 - \overline{X}_n - p\right)$.

b) En déduire : $|V_n - \sigma^2| \leqslant 2\,|\overline{X}_n - p| + \dfrac{1}{n}$.

c) Démontrer : $\mathbb{P}\big(\left[|V_n - \sigma^2| > \varepsilon\right]\big) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|\overline{X}_n - p| > \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2n}\right]\right)$.

d) Démontrer, pour n assez grand : $\mathbb{P}\left(\left[|\overline{X}_n - p| > \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2n}\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|\overline{X}_n - p| > \dfrac{\varepsilon}{4}\right]\right)$.

e) Conclure que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\left[|V_n - \sigma^2| > \varepsilon\right]\big) = 0$.

9. On pose maintenant : $W_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}}\left(\overline{X}_n - p\right) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{V_n}}\,Z_n$. On se fixe un réel x.

a) (i) Démontrer : $\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant (1+\varepsilon)\,x]\big) + \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1 + \varepsilon\right]\right)$.

(ii) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1 + \varepsilon\right]\right) = 0$.

(iii) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant (1+\varepsilon)\,x]\big) = \Phi\big((1+\varepsilon)\,x\big)$.

(iv) En déduire qu'il existe un entier n_ε tel que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$, on a :

$$\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) \leqslant \Phi\big((1+\varepsilon)\,x\big) + \varepsilon$$

b) On admettra que, de manière symétrique, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$, on a : $\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) \geqslant \Phi\big((1+\varepsilon)\,x\big) - \varepsilon$. En conclure que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) = \Phi(x)$.

10. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \overline{X}_n - x\,\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right]\right) = \Phi(x)$.

b) Le candidat A remporte effectivement l'élection si on a : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Une semaine avant l'élection, un sondage réalisé auprès de $n = 1000$ personnes donne pour $\overline{X}_n$ la valeur $0,52$ (et donc pour V_n la valeur $0,2506$). Montrer que la probabilité pour que le candidat A remporte l'élection est approximativement $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}}\left(0,52 - \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

On a $\dfrac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}}\left(0,52 - \dfrac{1}{2}\right) \approx 1,27$ *et une table donne* $\Phi(1,27) \approx 0,9$. *Il y a donc environ* 1 *chance sur* 10 *d'avoir* $p < \dfrac{1}{2}$, *c'est-à-dire que le candidat* B *remporte l'élection.*

11. Lors des dernières élections, on s'est rendu compte que les électeurs pouvaient mentir lors du sondage (ou bien simplement changer d'avis entre le sondage et l'élection) : avec une probabilité q déterminée, un électeur votera pour B alors qu'il avait déclaré qu'il voterait pour A.
La réponse enregistrée par l'institut de sondage est $Y_i = X_i + (1 - X_i)\, T_i$ où $T_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ personne change d'avis en faveur de B et $T_i = 0$ sinon. On suppose que les variables aléatoires T_i sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre q et qu'elles sont indépendantes des X_i.

a) Montrer que Y_i est une variable aléatoire de Bernoulli dont on déterminera le paramètre r.

On définit $\overline{Y}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, qui est la mesure effectuée par le sondage et on pose : $U_n = \overline{Y}_n \left(1 - \overline{Y}_n\right) + \dfrac{1}{n}$. De la même manière que dans la question ***9.***, on admet qu'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{U_n}}\, \left(\overline{Y}_n - r\right) \leqslant x\right]\right) \;=\; \Phi(x)$$

b) Démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \dfrac{1}{1-q}\left(\overline{Y}_n - x\, \dfrac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}} - q\right)\right]\right) = \Phi(x)$.

c) On suppose que le sondage sur n personnes a donné à $\overline{Y}_n$ la valeur $\overline{y}_n$, et donc pour U_n la valeur $u_n = \overline{y}_n \left(1 - \overline{y}_n\right) + \dfrac{1}{n}$. Montrer que la probabilité que le candidat A remporte effectivement l'élection, c'est-à-dire que $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, vaut approximativement $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\overline{y}_n - \dfrac{1}{2}\,(1+q)\right)\right)$.

d) Prenons les mêmes données que plus haut : le sondage de $n = 1000$ personnes donne $\overline{y}_n = 0,52$. Si $q = 0,04$, montrer que la probabilité que le candidat A remporte effectivement l'élection n'est plus que de $\dfrac{1}{2}$.

Troisième partie : Démonstration du théorème limite central

Dans cette partie, on suppose que les X_i admettent un moment d'ordre 3, donc $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(X^3)$ existent. Sous cette condition, on va démontrer le théorème limite central, c'est-à-dire le résultat $(*)$.
On supposera aussi pour simplifier :

$$\mu = \mathbb{E}(X_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sigma^2 = \mathbb{V}(X_i) = 1$$

de sorte que $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Soit x un réel fixé dans toute la suite de cette partie.

On rappelle que $\mathcal{C}^k$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont k fois dérivables et de dérivée $k^{\text{ème}}$ continue sur $\mathbb{R}$. Pour f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, on notera M_f un majorant de $|f|$, c'est-à-dire un réel tel que $|f(t)| \leqslant M_f$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

12. ***a) (i)*** Montrer, grâce à des intégrations par parties successives : $\displaystyle\int_0^1 u^3\,(1-u)^3\, du = \frac{1}{20} \int_0^1 u^6\, du$.

(ii) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 u^3\,(1-u)^3\, du \;=\; \frac{1}{140}$.

On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manière suivante. Pour $z \in \mathbb{R}$, on pose :

$$h(z) = \begin{cases} 0 & si\ z \leqslant 0 \\ 140 \displaystyle\int_0^z u^3\,(1-u)^3\, du & si\ z \in \,]0,1[\\ 1 & si\ z \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant h(z) \leqslant 1$.

On admettra que h', h'' et h''' sont aussi continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

13. On pose $a_n = n^{-\frac{1}{12}}$ et $g_n(z) = 1 - h\left(\dfrac{1}{a_n}\,(z-x)\right)$.

a) (i) Montrer que g_n est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant g_n(z) \leqslant 1$.

On admettra que g_n', g_n'' et g_n''' sont aussi continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que l'on peut choisir un majorant $M_{g_n'''}$ de g_n''' tel que : $M_{g_n'''} \leqslant n^{\frac{1}{4}}\, M_{h'''}$.

b) (i) Montrer que $g_n(z) = 1$ si $z \leqslant x$ et $g_n(z) = 0$ si $z > x + a_n$.

Pour un événement A, on définit la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ par $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}$.

(ii) Montrer que pour toute variable aléatoire X on a : $\mathbb{1}_{[X \leqslant x]} \leqslant g_n(X) \leqslant \mathbb{1}_{[X \leqslant x + a_n]}$.

c) Montrer que l'on a : $\mathbb{E}\big(g_n(Z_n + a_n)\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) \leqslant \mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big)$.

Il suffit alors de montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big(g_n(Z_n + a_n)\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big) = \Phi(x)$$

On va se concentrer sur la dernière égalité.

14. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

a) Par des intégrations par parties successives, montrer que pour tout z, $u \in \mathbb{R}$ fixés, on a :

$$\frac{1}{2}\int_z^{z+u} (z+u-t)^2\, g'''(t)\, dt = -\frac{1}{2}\, u^2\, g''(z) - u\, g'(z) + g(z+u) - g(z)$$

b) En déduire que pour tous u, v, z réels, on a :

$$g(z+u) - g(z+v) = g'(z)\,(u-v) + \frac{1}{2}\, g''(z)\,(u^2 - v^2) + R(z,u,v)$$

où $R(z,u,v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_z^{z+u} (z+u-t)^2\, g'''(t)\, dt - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_z^{z+v} (z+v-t)^2\, g'''(t)$.

c) Montrer que si g''' est bornée alors pour tous réels z, u, v on a : $|R(z,u,v)| \leqslant \dfrac{1}{6}\, M_{g'''}\big(|u|^3 + |v|^3\big)$.

15. Soit $\big(Y_i\big)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose les variables Y_i indépendantes entre elles et indépendantes des variables X_j.

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(i) Justifier que la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ est une loi normale.

(ii) On pose $T_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. Déterminer la loi de T_n.

b) Pour $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, on pose $W_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\big(Y_1 + \ldots + Y_{k-1} + X_{k+1} + \ldots + X_n\big)$,

avec $W_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=2}^{n} X_i$ et $W_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n-1} Y_i$.

(i) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$: $W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k = W_{k+1} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_{k+1}$.

(ii) En déduire : $g_n(Z_n) - g_n(T_n) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \left(g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_k\right) - g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right)$.

On va maintenant calculer l'espérance de chacun des termes de la somme.

c) (i) Montrer : $\mathbb{E}\Big((X_k - Y_k)\ g_n'(W_k)\Big) = 0$.

(ii) Montrer : $\mathbb{E}\Big(\big(X_k^2 - Y_k^2\big)\ g_n''(W_k)\Big) = 0$.

(iii) En déduire : $\mathbb{E}\left(g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_k\right) - g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right) \;=\; \mathbb{E}\left(R\left(W_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right)$.

d) Montrer que l'on a : $\big|\mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big) - \mathbb{E}\big(g_n(T_n)\big)\big| \;\leqslant\; \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\left|R\left(W_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right|\right)$.

e) Conclure que l'on a :

$$\big|\mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big) - \mathbb{E}\big(g_n(T_n)\big)\big| \;\leqslant\; \frac{1}{6\sqrt{n}}\ M_{g_n'''}\ \big(\mathbb{E}\big(|X_1|^3\big) + \mathbb{E}\big(|Y_1|^3\big)\big)$$

f) En déduire que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ \big|\mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big) - \mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big)\big| \;=\; 0$.

16. ***a)*** Montrer que l'on a : $\mathbb{P}\big(\,[T_n \leqslant x]\,\big) \;\leqslant\; \mathbb{E}\Big(g_n(T_n)\Big) \;\leqslant\; \mathbb{P}\big(\,[T_n \leqslant x + a_n]\,\big)$.

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(g_n(T_n)\Big) \;=\; \Phi(x)$.

c) Conclure que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(g_n(Z_n)\Big) \;=\; \Phi(x)$.