DS8 (vB) ESSEC II 2022 - Barème

Le théorème limite central est l'un des théorèmes fondamentaux des probabilités : il occupe une place centrale aussi bien d'un point de vue théorique que des applications (notamment en statistiques). Le but de ce problème est d'explorer diverses applications de ce théorème. La première partie étudie quelques propriétés, applications simples, et généralisation du théorème limite central. La deuxième partie se concentre sur l'utilisation de ce théorème en statistique, en particulier dans le cadre de sondages électoraux. La troisième partie s'attelle à démontrer le théorème limite central, via une adaptation de la méthode de Lindeberg.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour une variable aléatoire X, on notera $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance lorsqu'elles existent.

Pour tout le problème, on se donne une suite de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et de même loi. On supposera qu'elles admettent un moment d'ordre deux et on notera $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ leur espérance commune et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i)$ leur variance commune avec $\sigma > 0$. Enfin, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires :

$$\overline{X}_n \ = \ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad Z_n \ = \ \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$$

Première partie : Autour du théorème limite central

1. Soit Z une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire que la loi de Z admet la densité f_Z définie par : $f_Z(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

On note Φ la fonction de répartition de Z définie par : $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\, dt$.

a) Montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}$.

- **3 pt : Z est à densité donc sa fonction de répartition est continue**

b) Montrer que la fonction Φ est strictement croissante.

- **1 pt : Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$**
- **2 pt : $\Phi'(x) = f_Z(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} > 0$**

c) Montrer que la fonction Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

- **1 pt : continuité et stricte croissance**
- **1 pt : limites en $-\infty$ et en $+\infty$**

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

- **1 pt : changement de variable $\boxed{u = -t}$**
- **1 pt : f_Z est paire**
- **1 pt : fin du calcul**

2. *a)* Énoncer la loi faible des grands nombres pour la suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

- **1 pt : les v.a.r. de la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$:**
  - × **sont indépendantes,**
  - × **admettent toutes la même espérance μ,**

× **admettent toutes la même variance σ^2.**

- **1 pt :** $\forall \varepsilon > 0, \ \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$

b) Rappeler les hypothèses du théorème limite central et en déduire que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x] \big) \ = \ \Phi(x) \qquad (*)$$

- **1 pt : les v.a.r. de la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont :**
  × **indépendantes,**
  × **de même loi,**
  × **de même espérance μ,**
  × **et de même variance σ^2 non nulle.**
- **1 pt :** $\overline{X}_n^* \ = \ \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ = \ \sqrt{n} \left(\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \ = \ Z_n$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x] \big) \ = \ \mathbb{P}\big([Z \leqslant x] \big) \ = \ \Phi(x)$

3. Donnons une première application du théorème central limite, pour un joueur de fléchettes. Au $i^{\text{ème}}$ lancer de fléchette, le score est une variable aléatoire X_i qui prend ses valeurs dans $\{0, 2, 5, 10\}$. On suppose que les X_i sont indépendantes et de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}\big([X_i = 0] \big) \ = \ \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}\big([X_i = 2] \big) \ = \ \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\big([X_i = 5] \big) \ = \ \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}\big([X_i = 10] \big) \ = \ \frac{1}{10}$$

a) Calculer $\mathbb{E}(X_i)$.

- **1 pt : la v.a.r. X_i admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_i) = 3$

b) Calculer $\mathbb{V}(X_i)$.

- **1 pt : la v.a.r. X_i admet une variance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_i) = 8$

c) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie de la manière suivante :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, \tfrac{1}{5}[, \quad f(x) = 2 \text{ si } x \in [\tfrac{1}{5}, \tfrac{7}{10}[, \quad f(x) = 5 \text{ si } x \in [\tfrac{7}{10}, \tfrac{9}{10}[, \quad f(x) = 10 \text{ si } x \in [\tfrac{9}{10}, 1]$$

(i) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $f(U)$ a même loi que X_i.

- **1 pt :** $\big(f(U)\big)(\Omega) = \{0, 2, 5, 10\}$
- **2 pt : calcul des quatre probabilités**

(ii) Compléter le programme **Python** suivant, qui permet de générer un nombre aléatoire de même loi que X_i. On rappelle que la fonction `rd.random()` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

```
def X():
    U = rd.random()
    ...
```

- **2 pt : structure conditionnelle et `return` corrects**
- **4 pt : conditions correctes**

```python
def X():
    U = rd.random()
    if U < 1/5:
        return 0
    elif U < 7/10:
        return 2
    elif U < 9/10:
        return 5
    else:
        return 10
```

Après n lancers de fléchettes, le score du joueur est : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

d) Exprimer Z_n en fonction de S_n et de n.

- **1 pt :** $Z_n = \dfrac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$
- **1 pt :** $Z_n = \dfrac{S_n - 3\,n}{2\,\sqrt{2\,n}}$

e) Un joueur lance $n = 200$ fléchettes. En utilisant le théorème limite central, montrer que la probabilité que le score du joueur soit inférieur ou égal à 500 est approximativement $\Phi(-2,5)$. *Cette probabilité vaut environ* $6 \cdot 10^{-3}$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[Z_n \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[S_n \leqslant 600 + 40\,x]\,\big)$
- **1 pt :** $600 + 40\,x = 500 \quad \Leftrightarrow \quad 40\,x = -100 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{100}{40} = -\dfrac{5}{2}$

4. Soit N un entier naturel fixé supérieur ou égal à 1. La fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \,]0,1[$ étant strictement croissante et bijective, pour $k \in \{1, \dots, 2N-1\}$, on peut définir le réel $x_k = \Phi^{-1}\left(\frac{k}{2N}\right)$. On pose $x_0 = -\infty$ et $x_{2N} = +\infty$, avec par convention : $\Phi(x_0) = 0$ et $\Phi(x_{2N}) = 1$.

a) Montrer qu'il existe un n_0 (qui dépend de N) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\max_{k \in \{0,\dots,2N\}} \Big(\big|\mathbb{P}\big(\,[Z_n \leqslant x_k]\,\big) - \Phi(x_k)\big| \Big) \;\leqslant\; \frac{1}{2N}$$

- **1 pt : cas** $k = 0$
- **1 pt : cas** $k \in [\![1, 2N-1]\!]$
- **1 pt : cas** $k = 2N$

On divise l'ensemble des réels en intervalles $I_k = \,]x_{k-1}, x_k]$, pour $k \in \{1, \dots, 2N-1\}$, avec par convention $I_1 = \,]-\infty, x_1]$ et $I_{2N} = \,]x_{2N-1}, +\infty[$.

b) Soit $k \in \{1, \dots, 2N\}$ et x un réel quelconque tel que $x \in I_k$. Soit $n \geqslant n_0$.

(i) Montrer que l'on on : $\mathbb{P}\big(\,[Z_n \leqslant x]\,\big) - \Phi(x) \leqslant \mathbb{P}\big(\,[Z_n \leqslant x_k]\,\big) - \Phi(x_{k-1})$.

- **3 pt :**

(ii) En déduire : $\mathbb{P}\big(\,[Z_n \leqslant x]\,\big) - \Phi(x) \leqslant \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \dfrac{1}{2N} = \dfrac{1}{N}$.

- **3 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[Z_n \leqslant x]\,\big) - \Phi(x) \leqslant \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \dfrac{1}{2N}$
- **1 pt :** $\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \dfrac{1}{2N} \;=\; \dfrac{1}{N}$

(iii) De même, montrer que l'on a : $\Phi(x) - \mathbb{P}\big(\,[Z_n \leqslant x]\,\big) \leqslant \dfrac{1}{N}$.

- **2 pt : reprise de la preuve précédente**

c) En déduire que, pour tout réel x et tout $n \geqslant n_0$, on a : $\left|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) - \Phi(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{N}$.

- **1 pt : comme $I_1, \ldots, I_{2N-1}, I_{2N}$ forment une partition de $\mathbb{R}$, alors il existe $k \in [\![1, 2N]\!]$ tel que : $x \in I_k$**
- **1 pt : $\left|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) - \Phi(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{N}$**

d) Soit $(M_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de majorants des fonctions D_n définies pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$D_n(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) - \Phi(x)$$

c'est-à-dire tels que $\left|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) - \Phi(x)\right| \leqslant M_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrer que l'on peut choisir la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} M_n \ = \ 0 \qquad (**)$$

Notons que $(**)$ est une version plus forte que $(*)$.

- **3 pt : toute tentative raisonnable de construction de la suite sera valorisée**

5. Soit x un réel fixé.

a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(i) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)$.

- **2 pt : la fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$.**

(ii) En appliquant le résultat $(**)$ de la question ***4.d)***, démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_n]\big) - \Phi(x_n)\right| = 0$$

- **2 pt : $\left|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_n]\big) - \Phi(x_n)\right| \ \leqslant \ M_n$**
- **2 pt : thm d'encadrement**

(iii) En conclure que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_n]\big) = \Phi(x)$.

- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt :**
  - × **d'après *5.a)(ii)* : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_n]\big) - \Phi(x_n)\right| = 0$,**
  - × **d'après *5.a)(i)* : $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\Phi(x_n) - \Phi(x)\right| = 0$.**
- **1 pt : thm d'encadrement**

b) (i) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant x - \dfrac{1}{n}\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n < x]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big)$.

- **1 pt : $\left[Z_n \leqslant x - \dfrac{1}{n}\right] \ \subset \ [Z_n < x] \ \subset \ [Z_n \leqslant x]$**
- **1 pt : croissance de $\mathbb{P}$**

(ii) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n < x]\big) = \Phi(x)$.

- **1 pt : on pose $x_n \ = \ x - \dfrac{1}{n}$**
- **1 pt :**

- × **comme** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$**, d'après la question *5.a)(iii)* :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x_n]\big) = \Phi(x)$**.**
- × **d'après *2.b)* :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) = \Phi(x)$**.**

- **1 pt : thm d'encadrement**

c) Montrer que, pour tous réels a, b qui vérifient $a < b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \in [a,b]]\big) \ = \ \Phi(b) - \Phi(a)$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Z_n \in [a,b]]\big) = \mathbb{P}\big([a \leqslant Z_n \leqslant b]\big) = \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant b]\big) - \mathbb{P}\big([Z_n < a]\big)$
- **2 pt :**
  - × **d'après la question précédente appliquée à** $x = a$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n < a]\big) = \Phi(a)$**.**
  - × **d'après la question *2.b)* appliquée à** $x = b$ **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant b]\big) = \Phi(b)$**.**

Deuxième partie : Applications en statistique

Dans toute cette partie, on suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p, où $p \in \,]0,1[$. On se servira de ces variables aléatoires pour modéliser une élection entre les candidats A et B : $X_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ personne vote pour le candidat A et $X_i = 0$ si la $i^{\text{ème}}$ personne vote pour le candidat B. Le paramètre p représente la proportion des voix qu'obtient le candidat A.
Les sondages cherchent à estimer le paramètre p inconnu pour anticiper le résultat de l'élection. On sélectionne n personnes (dans la population totale) et on note comme précédemment $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, qui correspond à la proportion des personnes (parmi celles sélectionnées) qui votent pour le candidat A.

6. *a)* *Démontrer* : $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\mathbb{V}(X_i) = p\,(1-p)$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_i) = p$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(X_i) = p\,(1-p)$

b) On notera dans la suite $\sigma = \sqrt{p\,(1-p)}$. Démontrer : $\sigma \leqslant \dfrac{1}{2}$.

- **3 pt : par équivalence ou par étude de fonction**

c) Démontrer : $\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big) = p$.

- **1 pt : la v.a.r.** $\overline{X}_n$ **admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

d) Démontrer : $\mathbb{V}\big(\overline{X}_n\big) = \dfrac{1}{n}\,\sigma^2$.

- **1 pt : la v.a.r.** $\overline{X}_n$ **admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt :** $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)$
- **1 pt : indépendance**

7. On peut construire un intervalle de confiance pour p en appliquant le théorème limite central.

a) Montrer que pour tout $a > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,\big(\overline{X}_n - p\big) \in [-a,a]\right]\right) \ = \ \Phi(a) - \Phi(-a)$$

- **2 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \in [-a, a]] \big) \ = \ \Phi(a) - \Phi(-a)$
- **1 pt :** $Z_n = \sqrt{n} \ \dfrac{\overline{X}_n - p}{\sigma}$

b) En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[p \in \left[\overline{X}_n - a \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{X}_n + a \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right] \right) \ = \ 2\,\Phi(a) - 1$$

- **2 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma} \ \big(\overline{X}_n - p\big) \in [-a, a] \right] \right) = \mathbb{P}\left(\left[p \in \left[\overline{X}_n - a \ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{X}_n + a \ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right] \right)$
- **1 pt :** $\Phi(a) - \Phi(-a) \ = \ \Phi(a) - \big(1 - \Phi(a)\big) \ = \ 2\,\Phi(a) - 1$

c) Une table des valeurs de Φ donne : $\Phi(1,96) \approx 0,975$. En déduire que pour n grand, le paramètre p a approximativement 95% de chances d'appartenir à l'intervalle $\left[\overline{X}_n - 1,96 \ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \overline{X}_n + 1,96 \ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$.

- **2 pt :** $\Phi(1,96) - 1 = 0,95$
- **1 pt : conclusion**

Un problème est que σ dépend de p, donc l'intervalle ci-dessus dépend encore de p, qui est inconnu.

d) Montrer que pour n grand, le paramètre p a approximativement plus de 95% de chances d'appartenir à l'intervalle $\left[\overline{X}_n - \dfrac{0,98}{\sqrt{n}}, \ \overline{X}_n + \dfrac{0,98}{\sqrt{n}} \right]$.

- **2 pt :** $\left[\overline{X}_n - 1,96 \ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant \overline{X}_n + 1,96 \ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \ \subset \ \left[\overline{X}_n - 1,96 \ \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant \overline{X}_n + 1,96 \ \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \right]$
- **1 pt : croissance de $\mathbb{P}$**

Une autre solution est d'utiliser les observations $X_1, \ldots, X_n$ pour estimer σ.

8. On pose, pour $n \geqslant 1$: $V_n = \overline{X}_n \big(1 - \overline{X}_n\big) + \dfrac{1}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Démontrer : $V_n - \sigma^2 - \dfrac{1}{n} = \big(\overline{X}_n - p\big) \big(1 - \overline{X}_n - p\big)$.

- **1 pt :** $V_n - \sigma^2 - \dfrac{1}{n} = \overline{X}_n - \overline{X}_n^2 - p + p^2$
- **1 pt :** $\big(\overline{X}_n - p\big) \big(1 - \overline{X}_n - p\big) = \overline{X}_n - \overline{X}_n^2 - p + p^2$

b) En déduire : $|V_n - \sigma^2| \leqslant 2\,|\overline{X}_n - p| + \dfrac{1}{n}$.

- **1 pt :** $|V_n - \sigma^2| \leqslant \big|\overline{X}_n - p\big| \, \big|1 - p - \overline{X}_n\big| + \dfrac{1}{n}$
- **1 pt :** $\big|1 - p - \overline{X}_n\big| \ \leqslant \ |1 - p| + \big|\overline{X}_n\big|$
- **1 pt :** $|1 - p| + \big|\overline{X}_n\big| \leqslant 2$

c) Démontrer : $\mathbb{P}\big(\, [|V_n - \sigma^2| > \varepsilon] \, \big) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|\overline{X}_n - p| > \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2n} \right] \right)$.

- **1 pt :** $\big[|V_n - \sigma^2| > \varepsilon\big] \ \subset \ \left[2\,\big|\overline{X}_n - p\big| + \dfrac{1}{n} > \varepsilon \right]$
- **1 pt : croissance de $\mathbb{P}$**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[2\,\big|\overline{X}_n - p\big| + \dfrac{1}{n} > \varepsilon \right] \right) = \mathbb{P}\left(\left[\big|\overline{X}_n - p\big| > \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2\,n} \right] \right)$

d) Démontrer, pour n assez grand : $\mathbb{P}\left(\left[|\overline{X}_n - p| > \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2n} \right] \right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|\overline{X}_n - p| > \dfrac{\varepsilon}{4} \right] \right)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- **1 pt : pour** n **assez grand** $\dfrac{\varepsilon}{4} < \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2n}$
- **1 pt :** $\left[|\overline{X}_n - p| > \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{1}{2n}\right] \ \subset\ \left[|\overline{X}_n - p| > \dfrac{\varepsilon}{4}\right]$
- **1 pt : croissance de** $\mathbb{P}$

e) Conclure que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\left[|V_n - \sigma^2| > \varepsilon\right]\big) = 0$.

- **1 pt : LfGN**
- **1 pt : thm d'encadrement**

9. On pose maintenant : $W_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}}\left(\overline{X}_n - p\right) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{V_n}}\, Z_n$. On se fixe un réel x.

a) (i) Démontrer : $\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant (1+\varepsilon)\,x]\big) + \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant \dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\, x\right]\right)$
- **1 pt : FPT avec le SCE** $\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right],\ \left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} \leqslant 1+\varepsilon\right]\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant \dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\, x\right] \cap \left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leqslant \dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\, x\right] \cap \left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} \leqslant 1+\varepsilon\right]\right) \ \leqslant\ \mathbb{P}\left([Z_n \leqslant (1+\varepsilon)\,x]\right)$

(ii) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right) = 0$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right) = \mathbb{P}\big(\left[V_n - \sigma^2 > \sigma^2\,(2\varepsilon + \varepsilon^2)\right]\big)$
- **1 pt :** $\left[V_n - \sigma^2 > \sigma^2\,(2\varepsilon+\varepsilon^2)\right] \quad \subset \quad \left[|V_n - \sigma^2| > \sigma^2\,(2\varepsilon+\varepsilon^2)\right]$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\left[|V_n - \sigma^2| > \sigma^2\,(2\varepsilon+\varepsilon^2)\right]\big) \ = \ 0$ **+ thm d'encadrement pour conclure**

(iii) Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant (1+\varepsilon)\,x]\big) = \Phi\big((1+\varepsilon)\,x\big)$.

- **2 pt : conséquence directe de la question *2.b)***

(iv) En déduire qu'il existe un entier n_ε tel que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$, on a :

$$\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) \leqslant \Phi\big((1+\varepsilon)\,x\big) + \varepsilon$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) \ \leqslant\ \mathbb{P}\left([Z_n \leqslant (1+\varepsilon)\,x]\right) + \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right)$
- **1 pt : pour** n **assez grand,** $\mathbb{P}\left([Z_n \leqslant (1+\varepsilon)\,x]\right) \leqslant \Phi\big((1+\varepsilon)\,x\big) + \dfrac{\varepsilon}{2}$
- **1 pt : pour** n **assez grand,** $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right]\right) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

b) On admettra que, de manière symétrique, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$, on a : $\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) \geqslant \Phi\big((1+\varepsilon)\,x\big) - \varepsilon$. En conclure que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) = \Phi(x)$.

- **2 pt : IAF bien utilisée et justifiée**

- **1 pt : définition de la limite bien écrite**

10. ***a)*** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \overline{X}_n - x\,\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right]\right) = \Phi(x)$.

- **2 pt :** $\mathbb{P}\big([W_n \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\left(\left[\overline{X}_n - x\,\dfrac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}} \leqslant p\right]\right)$
- **1 pt : conclusion**

b) Le candidat A remporte effectivement l'élection si on a : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Une semaine avant l'élection, un sondage réalisé auprès de $n = 1000$ personnes donne pour $\overline{X}_n$ la valeur $0,52$ (et donc pour V_n la valeur $0,2506$). Montrer que la probabilité pour que le candidat A remporte l'élection est approximativement $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}}\left(0,52 - \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

On a $\dfrac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}}\left(0,52 - \dfrac{1}{2}\right) \approx 1,27$ *et une table donne* $\Phi(1,27) \approx 0,9$. *Il y a donc environ* 1 *chance sur* 10 *d'avoir* $p < \dfrac{1}{2}$, *c'est-à-dire que le candidat* B *remporte l'élection.*

- **2 pt : choix** $x_0 = \dfrac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0,2506}}\left(0,52 - \dfrac{1}{2}\right)$ **bien expliqué**

11. Lors des dernières élections, on s'est rendu compte que les électeurs pouvaient mentir lors du sondage (ou bien simplement changer d'avis entre le sondage et l'élection) : avec une probabilité q déterminée, un électeur votera pour B alors qu'il avait déclaré qu'il voterait pour A.
La réponse enregistrée par l'institut de sondage est $Y_i = X_i + (1 - X_i)\,T_i$ où $T_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ personne change d'avis en faveur de B et $T_i = 0$ sinon. On suppose que les variables aléatoires T_i sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre q et qu'elles sont indépendantes des X_i.

a) Montrer que Y_i est une variable aléatoire de Bernoulli dont on déterminera le paramètre r.

- **1 pt :** $Y_i(\Omega) \subset \{0,1\}$
- **1 pt : FPT avec le sce** $\big([X_i = 1], [X_i = 0]\big)$
- **1 pt :** $r = p\,(1 - q) + q$

On définit $\overline{Y}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$, qui est la mesure effectuée par le sondage et on pose : $U_n = \overline{Y}_n\big(1 - \overline{Y}_n\big) + \dfrac{1}{n}$. De la même manière que dans la question ***9.***, on admet qu'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{U_n}}\,\big(\overline{Y}_n - r\big) \leqslant x\right]\right) \;=\; \Phi(x)$$

b) Démontrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{1-q}\left(\overline{Y}_n - x\,\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}} - q\right)\right]\right) = \Phi(x)$.

- **2 pt :** $\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{U_n}}\,\big(\overline{Y}_n - r\big) \leqslant x\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{1}{1-q}\left(\overline{Y}_n - q - x\,\dfrac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}}\right) \leqslant p\right]\right)$

c) On suppose que le sondage sur n personnes a donné à $\overline{Y}_n$ la valeur $\overline{y}_n$, et donc pour U_n la valeur $u_n = \overline{y}_n\,(1 - \overline{y}_n) + \dfrac{1}{n}$. Montrer que la probabilité que le candidat A remporte effectivement l'élection, c'est-à-dire que $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, vaut approximativement $\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\overline{y}_n - \dfrac{1}{2}\,(1+q)\right)\right)$.

- **2 pt : choix** $y_0 = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\overline{y}_n - \dfrac{1}{2}\,(1+q)\right)$ **justifié**

d) Prenons les mêmes données que plus haut : le sondage de $n = 1000$ personnes donne $\overline{y}_n = 0,52$. Si $q = 0,04$, montrer que la probabilité que le candidat A remporte effectivement l'élection n'est plus que de $\frac{1}{2}$.

- **2 pt :** $y_0 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}} \left(\overline{y}_n - \frac{1}{2}\,(1+q) \right) = 0$
- **1 pt :** $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

Troisième partie : Démonstration du théorème limite central

Dans cette partie, on suppose que les X_i admettent un moment d'ordre 3, donc $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(X^3)$ existent. Sous cette condition, on va démontrer le théorème limite central, c'est-à-dire le résultat $(*)$.

On supposera aussi pour simplifier :

$$\mu = \mathbb{E}(X_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sigma^2 = \mathbb{V}(X_i) = 1$$

de sorte que $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Soit x un réel fixé dans toute la suite de cette partie.

On rappelle que $\mathcal{C}^k$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont k fois dérivables et de dérivée $k^{\text{ème}}$ continue sur $\mathbb{R}$. Pour f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, on notera M_f un majorant de $|f|$, c'est-à-dire un réel tel que $|f(t)| \leqslant M_f$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

12. ***a)*** ***(i)*** Montrer, grâce à des intégrations par parties successives : $\displaystyle\int_0^1 u^3\,(1-u)^3\,du = \frac{1}{20} \int_0^1 u^6\,du$.

- **4 pt : calculs (3 IPP)**
- **1 pt : IPP est valide car les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0,1]$**

(ii) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 u^3\,(1-u)^3\,du = \frac{1}{140}$.

- **3 pt :**

On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manière suivante. Pour $z \in \mathbb{R}$, on pose :

$$h(z) = \begin{cases} 0 & si\ z \leqslant 0 \\ 140 \displaystyle\int_0^z u^3\,(1-u)^3\,du & si\ z \in\ ]0,1[\\ 1 & si\ z \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : continuité sur** $]0,1[$
- **1 pt : continuité sur** $]-\infty,0[$ **et** $]1,+\infty[$
- **1 pt : continuité en** 0 **et en** 1

c) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant h(z) \leqslant 1$.

- **2 pt :**

On admettra que h', h'' et h''' sont aussi continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

13. On pose $a_n = n^{-\frac{1}{12}}$ et $g_n(z) = 1 - h\left(\frac{1}{a_n}\,(z-x)\right)$.

a) (i) Montrer que g_n est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant g_n(z) \leqslant 1$.

- **1 pt : la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la transformée affine $g_n = 1 - h \circ u_n$ où h et $u_n : z \mapsto \frac{1}{a_n}\,(z-x)$ sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$**
- **2 pt : $\forall z \in \mathbb{R}$, $g_n(z) = 1 - h\big(u_n(z)\big) \in [0,1]$**

On admettra que g_n', g_n'' et g_n''' sont aussi continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que l'on peut choisir un majorant $M_{g_n'''}$ de g_n''' tel que : $M_{g_n'''} \leqslant n^{\frac{1}{4}}\ M_{h'''}$.

- **2 pt : $g_n'''(z) = -\left(\dfrac{1}{a_n}\right)^3\ h'''\big(u_n(z)\big)$**
- **1 pt : $|\,g_n'''(z)\,| \leqslant n^{\frac{1}{4}}\ M_{h'''}$**

b) (i) Montrer que $g_n(z) = 1$ si $z \leqslant x$ et $g_n(z) = 0$ si $z > x + a_n$.

- **1 pt : pour tout $z \leqslant x$, $g_n(z) = 1$**
- **1 pt : pour tout $z > x + a_n$, $g_n(z) = 0$**

Pour un événement A, on définit la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ par $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}$.

(ii) Montrer que pour toute variable aléatoire X on a : $\mathbb{1}_{[X \leqslant x]} \leqslant g_n(X) \leqslant \mathbb{1}_{[X \leqslant x + a_n]}$.

- **1 pt : fixer ω**
- **1 pt : $\mathbb{1}_{[X \leqslant x]} \leqslant g_n(X)$**
- **1 pt : $g_n(X) \leqslant \mathbb{1}_{[X \leqslant x + a_n]}$**

c) Montrer que l'on a : $\mathbb{E}\big(g_n(Z_n + a_n)\big) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n \leqslant x]\big) \leqslant \mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big)$.

- **1 pt : choisir $X = Z_n$ puis $X = Z_n + a_n$**
- **1 pt : croissance de l'espérance**

Il suffit alors de montrer que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\big(g_n(Z_n + a_n)\big) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big) = \Phi(x)$$

On va se concentrer sur la dernière égalité.

14. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

a) Par des intégrations par parties successives, montrer que pour tout z, $u \in \mathbb{R}$ fixés, on a :

$$\frac{1}{2} \int_z^{z+u} (z+u-t)^2\ g'''(t)\ dt = -\frac{1}{2}\,u^2\,g''(z) - u\,g'(z) + g(z+u) - g(z)$$

- **3 pt : deux IPP**
- **1 pt : justification IPP**

b) En déduire que pour tous u, v, z réels, on a :

$$g(z+u) - g(z+v) = g'(z)\,(u-v) + \frac{1}{2}\ g''(z)\,(u^2 - v^2) + R(z,u,v)$$

où $R(z,u,v) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_z^{z+u} (z+u-t)^2\,g'''(t)\ dt - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_z^{z+v} (z+v-t)^2\,g'''(t)$.

- **2 pt : $g(z+u) = u\,g'(z) + \dfrac{1}{2}\,u^2\,g''(z) + g(z) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_z^{z+u} (z+u-t)^2\ g'''(t)\ dt$**

  et $g(z+v) = v\,g'(z) + \dfrac{1}{2}\,v^2\,g''(z) + g(z) + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_z^{z+v} (z+v-t)^2\ g'''(t)\ dt$

- **2 pt : soustraction et simplification**

c) Montrer que si g''' est bornée alors pour tous réels z, u, v on a : $|R(z,u,v)| \leqslant \dfrac{1}{6}\, M_{g'''}\big(|u|^3+|v|^3\big)$.

- **1 pt :** $\big|R(z,u,v)\big| \leqslant \left| \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_z^{z+u} (z+u-t)^2\ g'''(t)\ dt \right| + \left| \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_z^{z+v} (z+v-t)^2\ g'''(t)\ dt \right|$
- **1 pt :** $\left| \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_z^{z+u} (z+u-t)^2\ g'''(t)\ dt \right| \leqslant \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_z^{z+u} \big(z+u-t\big)^2\ M_{g'''}\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_z^{z+u} \big(z+u-t\big)^2\ dt = \dfrac{u^3}{3}$ **(cas** $u \geqslant 0$**)**

15. Soit $\big(Y_i\big)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose les variables Y_i indépendantes entre elles et indépendantes des variables X_j.

a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(i) Justifier que la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ est une loi normale.

- **1 pt : indépendance**
- **1 pt : thm de stabilité des lois normales**

(ii) On pose $T_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. Déterminer la loi de T_n.

- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \ \hookrightarrow\ \mathcal{N}(0,n)$
- **1 pt :** T_n **suit une loi normale comme transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale**
- **1 pt :** $T_n \ \hookrightarrow\ \mathcal{N}(0,1)$

b) Pour $k \in \{2,\dots,n-1\}$, on pose $W_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, \big(Y_1+\ldots+Y_{k-1}+X_{k+1}+\ldots+X_n\big)$,

avec $W_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=2}^{n} X_i$ et $W_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n-1} Y_i$.

(i) Montrer que pour tout $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$: $W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k = W_{k+1} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_{k+1}$.

- **1 pt : cas** $k \in \{2,\dots,n-2\}$
- **1 pt : cas extrémaux**

(ii) En déduire : $g_n(Z_n) - g_n(T_n) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{n} \left(g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_k\right) - g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right)$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_k\right) - g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right) = g_n\left(W_1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_1\right) - g_n\left(W_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_n\right)$
- **1 pt :** $W_1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_1 \ = \ \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=2}^{n} X_i\right) + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_1 \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \ = \ Z_n$
- **1 pt :** $W_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_n \ = \ \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n-1} Y_i\right) + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_n \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \ = \ T_n$

On va maintenant calculer l'espérance de chacun des termes de la somme.

c) (i) Montrer : $\mathbb{E}\Big((X_k - Y_k)\ g_n'(W_k)\Big) = 0$.

- **1 pt : lemme des coalitions**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\Big(\big(X_k - Y_k\big)\ g_n'\big(W_k\big)\Big) = \mathbb{E}\big(X_k - Y_k\big)\ \mathbb{E}\Big(g_n'\big(W_k\big)\Big)$

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(Y_k) = 0$

(ii) Montrer : $\mathbb{E}\Big(\big(X_k^2 - Y_k^2\big)\ g_n''(W_k)\Big) = 0$.

- **1 pt : lemme des coalitions**
- **1 pt : fin du calcul avec** $\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(Y_k^2) = 1$

(iii) En déduire : $\mathbb{E}\left(g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ X_k\right) - g_n\left(W_k + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ Y_k\right)\right) \ = \ \mathbb{E}\left(R\left(W_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right)$.

- **1 pt : question *14.b)*, en considérant :**
  - × $g = g_n$ **qui est une fonction de classe** $\mathcal{C}^3$ **sur** $\mathbb{R}$**.**
  - × $z = W_k(\omega) \in \mathbb{R}$**.**
  - × $u = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ X_k(\omega) \in \mathbb{R}$**.**
  - × $v = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ Y_k(\omega) \in \mathbb{R}$**.**
- **2 pt : fin du calcul**

d) Montrer que l'on a : $\big|\mathbb{E}(g_n(Z_n)) - \mathbb{E}(g_n(T_n))\big| \ \leqslant \ \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\left|R\left(W_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, X_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, Y_k\right)\right|\right)$.

- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt : reste**

e) Conclure que l'on a :

$$\big|\mathbb{E}(g_n(Z_n)) - \mathbb{E}(g_n(T_n))\big| \ \leqslant \ \frac{1}{6\sqrt{n}}\ M_{g_n'''}\ \big(\mathbb{E}(|X_1|^3) + \mathbb{E}(|Y_1|^3)\big)$$

- **1 pt : question *14.c)*, en considérant :**
  - × $g = g_n$ **qui est une fonction telle que** g_n''' **est bornée (hypothèse admise dans l'énoncé).**
  - × $z = W_k(\omega) \in \mathbb{R}$**.**
  - × $u = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ X_k(\omega) \in \mathbb{R}$**.**
  - × $v = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ Y_k(\omega) \in \mathbb{R}$**.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(\left|\ R\left(W_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ X_k, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ Y_k\right)\ \right|\right) \leqslant \dfrac{1}{6}\ \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\ M_{g'''}\left(\ \mathbb{E}\left(|\, X_1\,|^3\right) + \mathbb{E}\left(|\, Y_1\,|^3\right)\ \right)$
- **1 pt : sommation**

f) En déduire que l'on a : $\lim\limits_{n \to +\infty}\ \big|\mathbb{E}(g_n(Z_n)) - \mathbb{E}(g_n(T_n))\big| \ = \ 0$.

- **1 pt :** $0 \ \leqslant\ \big|\mathbb{E}(g_n(Z_n)) - \mathbb{E}(g_n(Z_n))\big| \ \leqslant\ \dfrac{1}{6\, n^{\frac{1}{4}}}\ M_{h'''}\ \Big(\mathbb{E}(|X_1|^3) + \mathbb{E}(|Y_1|^3)\Big)$
- **1 pt : thm d'encadrement**

16. a) Montrer que l'on a : $\mathbb{P}(\, [T_n \leqslant x]\,) \ \leqslant\ \mathbb{E}\Big(g_n(T_n)\Big) \ \leqslant\ \mathbb{P}(\, [T_n \leqslant x + a_n]\,)$.

- **1 pt : En appliquant la question *13.b)(ii)* à la v.a.r.** $X = T_n$**, on obtient :**

$$\mathbb{1}_{[T_n \leqslant x]} \ \leqslant\ g_n(T_n) \ \leqslant\ \mathbb{1}_{[T_n \leqslant x + a_n]}$$

- **1 pt : croissance de l'espérance**

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(g_n(T_n)\Big) \ = \ \Phi(x)$.

- **1 pt :** $\Phi(x) \ \leqslant \ \mathbb{E}\Big(g_n(T_n)\Big) \ \leqslant \ \Phi(x+a_n)$
- **1 pt : thm d'encadrement**

c) Conclure que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(g_n(Z_n)\Big) \ = \ \Phi(x)$.

- **1 pt : inégalité triangulaire**
$\Big| \ \mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big) - \Phi(x) \ \Big| \leqslant \Big| \ \mathbb{E}\big(g_n(Z_n)\big) - \mathbb{E}\big(g_n(T_n)\big) \ \Big| + \Big| \ \mathbb{E}\big(g_n(T_n)\big) - \Phi(x) \ \Big|$
- **1 pt : thm d'encadrement**