Rappels de cours

1. Il faut connaître par cœur les limites au bord de l'ensemble de définition des fonctions usuelles :
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
   - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
   - pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ et donc
   $$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$
   (remarque : $x^0 = 1$)
   - pour tout $\alpha > 0$, $\alpha^x = e^{x \ln(\alpha)}$ et donc
   $$\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \alpha^x = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$
   (remarque : $1^x = 1$)
2. Il faut connaître par cœur les équivalents usuels :
   - $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$
   - $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
   - $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$
3. Il faut connaître par cœur les développements limités usuels :
   - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$
   - $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$
   - $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$

1 Exercices

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes.

Méthode : appliquer les règles d'opérations algébriques usuelles sur les limites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+e^x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+\ln(x)$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} e^x+\ln(x)$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} -\frac{1}{x}+\ln(x)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^x$
7. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2+1}{2+\frac{1}{\ln(x)}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}+e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes.

Méthode : appliquer une croissance comparée.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}$ (poser $y=x^2$)
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}$ (poser $y=\sqrt{x}$)
7. $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x)$
8. $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln(x)$

Exercice 3 : Calculer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x\to+\infty$ et lorsque $x\to0$.

Méthode : trouver le terme dominant, éventuellement en utilisant une croissance comparée.

1. $f(x)=x+e^x$
2. $f(x)=x+\ln(x)$
3. $f(x)=x^4+e^x$
4. $f(x)=\ln(x)+\ln(x)^2$
5. $f(x)=\ln(x)+e^x$
6. $f(x)=e^x+e^{2x}$
7. $f(x)=\frac{1}{x}+e^x$
8. $f(x)=x^4+\frac{1}{x^2}$

Exercice 4 : Peut-on trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque $x\to+\infty$ qui soit plus simple que l'expression initiale ? Si oui, le donner.

Méthode : utiliser la compatibilité de l'équivalent avec le produit et le quotient.

1. $f(x)=(x+x^2)e^x$
2. $f(x)=x\ln(x)$
3. $f(x)=x^3e^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x)=\frac{x+1}{x+3}e^x$
5. $f(x)=\ln\left(\frac{2x^2+2}{x^2-1}\right)\ln(x)$
6. $f(x)=e^x\ln(x)$
7. $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$
8. $f(x)=x^3e^x$

Exercice 5 : Calculer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x\to0$.

Méthode : utiliser des équivalents usuels et les règles de calcul sur les équivalents.

1. $f(x)=\ln(1+x)x^2$
2. $f(x)=\frac{e^x-1}{x\ln(1+x)}$
3. $f(x)=(\sqrt{1+x}-1)e^{2x}$
4. $f(x)=\frac{2x^2}{e^x-1}$
5. $f(x)=\frac{(1+x)^3-1}{x^2\ln(1+x)}$
6. $f(x)=\ln(1+x)((1+x)^7-1)$

Exercice 6 : Calculer le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 2.

1. $f(x)=e^x+x^2$
2. $f(x)=e^x-1-x$
3. $f(x)=xe^x-x$
4. $f(x)=\ln(1+x)-x$
5. $f(x)=x\ln(1+x)$
6. $f(x)=\ln(1+x)+e^x$
7. $f(x)=\sqrt{1+x}-1-x$
8. $f(x)=\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}\ln(1+x)$

Exercice 7 : Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Méthode : si il n'y a pas de F.I., conclure directement. En cas de F.I. et si une croissance comparée ne suffit pas à conclure, calculer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$. En cas de somme, calculer un DL en 0 pour obtenir l'équivalent.

1. $f(x) = \dfrac{e^x + x^2}{1+x}\ln(x)$
2. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{(e^x - 1)^2}{x}$
4. $f(x) = x^4 \ln(1+x)$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$
8. $f(x) = \dfrac{(e^x - 1)\ln(1+x)}{x^2}$
9. $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$

Exercice 8 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. (a) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - e^x + xe^x}{x^2}$.
4. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exercice 9 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. (a) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$.
4. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exercice 10 : On définit la fonction $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. (a) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{x - \ln(1+x) - x\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.
4. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exercice 11 : On définit la fonction $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. (a) Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Montrer que, pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{\ln(1+x) + x\ln(1+x) - x}{(1+x)\ln(1+x)^2}$.
4. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

2 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. $+\infty$
4. $-\infty$
5. $-\infty$
6. $+\infty$
7. $\frac{1}{2}$
8. 1

Réponses de l'exercice 2 :

1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. 0
4. 0
5. $+\infty$
6. 0
7. 0
8. 0

Réponses de l'exercice 3 :

1. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 1$
2. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \ln(x)$
3. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 1$
4. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)^2$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \ln(x)^2$
5. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \ln(x)$
6. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{2x}$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 2$
7. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x}$
8. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^4$ et $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x^2}$

Réponses de l'exercice 4 :

1. Oui, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2e^x$
2. Non
3. Oui, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$
4. Oui, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$
5. Oui, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(2)\ln(x)$
6. Non
7. Oui, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$
8. Non

Réponses de l'exercice 5 :

1. $f(x) \underset{x\to0}{\sim} x^3$
2. $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x}$
3. $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{2}$
4. $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$
5. $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{3}{x^2}$
6. $f(x) \underset{x\to0}{\sim} 7x^2$

Réponses de l'exercice 6 :

1. $f(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$
2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$
3. $f(x) = x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$
4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$
5. $f(x) = x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$
6. $f(x) = 1 + 2x + \underset{x\to0}{o}(x^2)$
7. $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$
8. $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$

Réponses de l'exercice 7 :

1. $f(x) = -\infty$
2. $f(x) = 1$
3. $f(x) = 0$
4. $f(x) = 0$
5. $f(x) = 0$
6. $f(x) = -\frac{1}{2}$
7. $f(x) = \frac{1}{2}$
8. $f(x) = 1$
9. $f(x) = 0$

3 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

Correction détaillée de l'exercice 2 :

Correction détaillée de l'exercice 3 :

Correction détaillée de l'exercice 4 :

Correction détaillée de l'exercice 5 :

Correction détaillée de l'exercice 6 :

Correction détaillée de l'exercice 7 :

Correction détaillée de l'exercice 8 :

1. La fonction f est de la forme $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
   - $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$
   - $f_2 : x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$

   donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. On sait que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-1}{x}\\ &= \frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}\end{aligned}$$

   Or, $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $\mathrm{e}^x - 1 - x = \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ ce qui permet de conclure que

$$\mathrm{e}^x - 1 - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

   On en déduit que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$ et donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x x - (\mathrm{e}^x - 1)}{x^2}\\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x}{x^2}\end{aligned}$$

4. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc

$$\begin{aligned}1 - e^x + xe^x &= 1 - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) + x(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2))\\ &= -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + x + x^2\\ &= \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$1 - e^x + xe^x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2} = f'(0)$. On en déduit que f' est continue en 0 et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Correction détaillée de l'exercice 9 :

1. La fonction f est de la forme $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ où :
   - $f_1 : x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$
   - $f_2 : x \mapsto e^x - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$

   donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. On sait que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x}\\ &= \frac{\frac{x - (e^x - 1)}{e^x - 1}}{x}\\ &= \frac{1 + x - e^x}{x(e^x - 1)}\end{aligned}$$

   Or, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $1 + x - e^x = -\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ ce qui permet de conclure que

$$1 + x - e^x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

   De plus, $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{2}$ et donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}\\ &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}\end{aligned}$$

4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc

$$\begin{aligned} e^x - 1 - xe^x &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) - 1 - x(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x - x^2 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$e^x - 1 - xe^x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$. On en déduit que f' est continue en 0 et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Correction détaillée de l'exercice 10 :

1. La fonction f est de la forme $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :
   - $f_1 : x \mapsto \ln(1 + x)$ est de la forme $f_1 = \ln \circ g$ où
     — ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$
     — $g : x \mapsto 1 + x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ car polynomiale et vérifie $g(]-1, +\infty[\setminus\{0\}) \subset]0, +\infty[$
   - $f_2 : x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ car polynomiale et ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$

   donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$.
2. On sait que $\ln(1 + x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.
3. (a) Soit $x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{\ln(1 + x)}{x} - 1}{x} \\ &= \frac{\ln(1 + x) - x}{x \ln(1 + x)} \end{aligned}$$

   - Tout d'abord, $x \ln(1 + x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.
   - Ensuite, $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $\ln(1 + x) - x = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ ce qui permet de conclure que

$$\ln(1 + x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

   On en déduit que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$ et donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

(b) Soit $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}}{x^2} \\ &= \frac{x - \ln(1+x) - x\ln(1+x)}{(1+x)x^2} \end{aligned}$$

4. • Tout d'abord,

$$(1+x)x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

• Ensuite, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc

$$\begin{aligned} x - \ln(1+x) - x\ln(1+x) &= x - (x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) - x(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) \\ &= \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x^2 \\ &= -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$x - \ln(1+x) - x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$. On en déduit que f' est continue en 0 et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Correction détaillée de l'exercice 11 :

1. La fonction f est de la forme $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :
   - $f_1 : x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ car polynomiale
   - $f_2 : x \mapsto \ln(1+x)$ est de la forme $f_2 = \ln \circ g$ où
     — ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
     — $g : x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ car polynomiale et vérifie $g(]-1,+\infty[\setminus\{0\}) \subset]0,+\infty[\setminus\{1\}$

   et f_2 ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$

   donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.
2. On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.
3. (a) Soit $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x} \\ &= \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} \end{aligned}$$

   • Tout d'abord, $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

- Ensuite, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ ce qui permet de conclure que

$$x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

On en déduit que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{2}$ et donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Soit $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln(1+x) - x\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)^2} \\ &= \frac{\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{1+x}}{\ln(1+x)^2} \\ &= \frac{\ln(1+x) + x\ln(1+x) - x}{(1+x)\ln(1+x)^2} \end{aligned}$$

4. - Tout d'abord, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc

$$(1+x)\ln(1+x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

- Ensuite, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc

$$\begin{aligned} \ln(1+x) + x\ln(1+x) - x &= x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x \\ &= \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$\ln(1+x) + x\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Ainsi,

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$. On en déduit que f' est continue en 0 et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.