Sujets de révisions
Réduction matricielle et endomorphismes

EML 2020 - matrices à paramètres

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. ***a)*** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.

b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas** $a = 0$ **et** $b = 0$.
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas** $a \neq 0$ **et** $b = 0$.
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas** $a = 0$ **et** $b \neq 0$.
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

a) Déterminer le rang des matrices B et $B - b\,I_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. **Étude du cas** $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$.
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$.
On pose :

$$v_1 = (1,1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$.

d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer :

$$\begin{array}{c} X \text{ est un vecteur propre de } N \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à} \\ \text{la valeur propre } \lambda \\ \text{et} \\ z = t = 0 \end{array} \right.$$

e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?

g) Montrer l'équivalence :

$$M(a, b) \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow a^2 + 10\, ab + b^2 > 0$$

EML 2019 - matrices semblables, matrices inversibles, matrices et endomorphismes nilpotents, endomorphismes de $\mathbb{R}^3$

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$B \ = \ P^{-1} A\, P$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

PARTIE A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
Justifier que A est inversible et diagonalisable.

2. Déterminer une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que : $A \ = \ P\,D\,P^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1}.

3. On note $Q \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et $Q\,D\,Q$.

4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

PARTIE B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) \ = \ (x, -z, y + 2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.
On note enfin $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

6. ***a.*** Vérifier que 1 est valeur propre de M et (U_1, U_2) est une base du sous-espace propre $E_1(M)$.

b. Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.

c. Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

7. ***a.*** Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathscr{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathscr{B}_2$.

b. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

PARTIE C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

10. ***a.*** Calculer N^3 puis $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.

b. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

b. Montrer que la famille $\mathscr{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Écrire la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_3$.

d. Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

EDHEC 2019 - commutant

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. ***a)*** Déterminer $(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. ***a)*** Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose $u_1 = (f - \text{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \text{id}$ est égal à 1.

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$.

5. ***a)*** Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}NP\right) T \ = \ T \left(P^{-1}NP\right)$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\right)$.

EML 2017 - endomorphismes de polynômes

On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(x)$.
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma x$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - xP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2xP - (x^2 - 1)\ P'$$

Par exemple : $a(x^2) = x^2 - x(2x) = -x^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

2. ***a)*** Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer le rang de la matrice A.

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

5. ***a)*** Montrer que B admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

b) La matrice B est-elle diagonalisable ?

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

8. ***a)*** Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

b) On note R_1, R_2 et R_3 les colonnes de la matrice R. Expliciter trois polynômes Q_1, Q_2, Q_3 de E tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q_1) = R_1$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q_2) = R_2$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q_3) = R_3$ puis montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de E.

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E$, $f(P) = P'$.

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

EDHEC 2020 - matrices antisymétriques, endomorphisme de matrices

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \;=\; ({}^tA)\,M + M\,A$$

2. ***a)*** Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ *et on choisit :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

4. ***a)*** Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5. ***a)*** Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

b) Déterminer les valeurs propres de F.

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \mathrm{id}$ et dire si F est ou n'est pas diagonalisable.

ECRICOME 2015 - endomorphisme de matrices

On désigne par $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

3. Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On note $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

5. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de la matrice T.

7. La matrice T est-elle diagonalisable ?

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

8. Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :

$$\varphi_A(M) \;=\; \lambda M$$

Montrer par un raisonnement par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

9. Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.
On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.
Montrer que $\varphi_A(N) = \mu N$ et $\varphi_A(N') = \mu N'$.

HEC 2018 - images itérées d'un endomorphisme nilpotent, dénombrement (vraiment très dur à partir de la question 3)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et : $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}}$

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.

c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :

$$F_j = \mathrm{Im}(f^j) \quad \text{et} \quad r_j = \dim(F_j)$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est à dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$.

a) Calculer r_0 et r_n.

b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

(i) Déterminer le rang de g_j.

(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

c) Établir les inégalités : $n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$.

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H, noté $\mathrm{Card}(H)$, est le nombre de ses éléments.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers naturels tels que :

$$\sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$

c'est à dire : $P(k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k\}$.
On pose $p(k) = \mathrm{Card}\big(P(k)\big)$.

3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_i = \mathrm{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}\right) \qquad (*)$.

a) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $P(n)$.

b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

(i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

(iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $(*)$.

4. Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant \ell\}$ et $q(\ell, k) = \text{Card}(Q(\ell, k))$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

(ii) Pour tout entier $\ell \geqslant k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

b) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geqslant 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = \text{Card}\left(\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\}\right)$$

c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

(ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$?

5. La fonction **Python** suivante dont le script est incomplet (lignes 5 et 6), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(\ell, k)$.

```
1  def qmatrix(n):
2      q = np.ones([n,n])
3      for L in range(1,n):
4          for K in range(1,n):
5              if K < L :
6                  q[L,K] = ................
7              elif K==L :
8                  q[L,K] = ..............
9              else :
10                 q[L,K] = q[L-1,K] + q[L,K-(L+1)]
11     return q
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)
    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    2.    2.    3.    3.    4.    4.    5.    5.
    1.    2.    3.    4.    5.    7.    8.   10.   12.
    1.    2.    3.    5.    6.    9.   11.   15.   18.
    1.    2.    3.    5.    7.   10.   13.   18.   23.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   14.   20.   26.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   21.   28.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   29.
    1.    2.    3.    5.    7.   11.   15.   22.   30.
```

a) Compléter les lignes 5 et 6 du script de la fonction `qmatrix`.

b) Donner un script **Python** permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

c) Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geqslant 1$, puis la démontrer.

ESSEC I 2010 - Ensemble de matrices vérifiant une propriété, matrices nilpotentes, noyaux itérés

Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M+\alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

4. *a)* Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle.
Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

a) Montrer les inclusions $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et $\ker(u^2) \subset \ker(u^3)$.

b) Montrer que les noyaux $\ker(u^2)$ et $\ker(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

c) Montrer que les noyaux $\ker(u)$ et $\ker(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.