Corrigés des sujets de révisions
Réduction matricielle et endomorphismes

EML 2020 - matrices à paramètres

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) \ = \ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \left\{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} E &= \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot M(1,0) + b \cdot M(0,1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(M(1,0), M(0,1)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- Ici, E est un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Il y a tout lieu de penser que cet ensemble va pouvoir facilement s'écrire comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Cette méthode présente un double avantage. En effet, en plus de démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, on obtient de plus que famille $\big(M(1,0), M(0,1)\big)$ est génératrice de E.

- La famille $\big(M(1,0), M(0,1)\big)$ est :
  - × génératrice de E d'après le point précédent,
  - × libre car uniquement constituée de deux vecteurs (de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$) non colinéaires.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(M(1,0), M(0,1)\big) \text{ est une base de } E.}$$

- De plus :

$$\dim(E) = \mathrm{Card}((M(1,0), M(0,1))) = 2$$

$$\boxed{\dim(E) = 2}$$

Commentaire

Si la rédaction précédente est celle attendue, il arrive parfois qu'on ne puisse pas l'utiliser (dans certains cas, l'ensemble étudié ne s'écrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie). Il est donc important de savoir utiliser la méthode consistant à revenir à la définition de sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $E \subset \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(ii) $E \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$.

(iii) Démontrons que E est stable par combinaison linéaire.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(U_1, U_2) \in E^2$.

× Comme $U_1 \in E$, il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U_1 = M(a_1, b_1)$.

× Comme $U_2 \in E$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U_2 = M(a_2, b_2)$.

Démontrons que $\lambda_1 \cdot U_1 + \lambda_2 \cdot U_2 \in E$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot U_1 + \lambda_2 \cdot U_2 &= \lambda_1 \cdot M(a_1, b_1) + \lambda_2 \cdot M(a_2, b_2) \\
&= \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_1 \\ b_1 & b_1 & b_1 & b_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & a_2 \\ b_2 & b_2 & b_2 & b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & 0 & 0 & \lambda_1 a_1 \\ \lambda_1 a_1 & 0 & 0 & \lambda_1 a_1 \\ \lambda_1 a_1 & 0 & 0 & \lambda_1 a_1 \\ \lambda_1 b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1 b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 a_2 & 0 & 0 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_2 a_2 & 0 & 0 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_2 a_2 & 0 & 0 & \lambda_2 a_2 \\ \lambda_2 b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & 0 & 0 & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & 0 & 0 & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & 0 & 0 & \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où : $\lambda_1 \cdot U_1 + \lambda_2 \cdot U_2 = M(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) \in E$.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).}$$

□

b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

Démonstration.

- On remarque :

$$M(1,0) \times M(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

- $\times$ $M(1,0) \in E$ et $M(0,1) \in E$,
- $\times$ $M(1,0) \times M(0,1) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin E$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } E \text{ n'est donc pas stable par produit.}}$$

□

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

Démonstration.

La matrice $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale.

$\boxed{\text{On en déduit que } M(0,0) \text{ est diagonalisable.}}$ □

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

Démonstration.

- On remarque tout d'abord : $A = a \cdot M(1,0)$. Ainsi :

$$A^2 \; = \; \big(a \cdot M(1,0)\big) \times \big(a \cdot M(1,0)\big) \; = \; a^2 \cdot \big(M(1,0)\big)^2$$

- Or :

$$\big(M(1,0)\big)^2 \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; = \; M(1,0)$$

$\boxed{\text{Finalement : } A^2 = a \cdot A.}$

- On en déduit : $A^2 - a \cdot A = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

$\boxed{\text{Ainsi, le polynôme } Q(X) = X^2 - aX \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$ □

b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $Q(X) = X^2 - aX = X(X-a)$ est un polynôme annulateur de A. D'où : $\text{Sp}(A) \; \subset \; \{\text{racines de } Q\} = \{0, a\}$.

$\boxed{\text{Ainsi : Sp}(A) \subset \{0,a\} \text{ et } 0 \text{ et } a \text{ sont les deux valeurs propres possibles de } A.}$

- La matrice A possède une ligne de 0 donc A n'est pas inversible.

$\boxed{\text{On en déduit que } 0 \text{ est bien une valeur propre de } A.}$

- Démontrons que a est valeur propre de A.

$$A - a \cdot I_4 \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

On remarque : $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ (où on a noté C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de A).
La famille des vecteurs colonnes de $A - a \cdot I_4$ est donc liée.

$\boxed{\text{Ainsi, } A - a \cdot I_4 \text{ est non inversible. On en déduit que } a \text{ est bien une valeur propre de } A.}$

Commentaire

- On démontre que la matrice $A - a \cdot I_4$ est non inversible en exhibant une relation de dépendance linéaire non triviale entre les colonnes de cette matrice. Il est aussi possible d'exhiber une relation de dépendance linéaire non triviale entre les lignes. En l'occurrence, on a : $L_4 = -L_1$.
- Il est aussi possible d'effectuer un calcul du rang. En procédant par opérations élémentaires successives, on obtient une réduite triangulaire de même rang que la matrice initiale. En particulier, matrice initiale et réduite sont toutes les deux inversibles ou toutes les deux non inversibles. La réduite étant triangulaire, elle est non inversible si et seulement si elle possède (au moins) un coefficient diagonal nul, ce qui permet de conclure quant au caractère inversible (ou non) de la matrice initiale.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - a \cdot I_4) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\right) \\ &\underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=}} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a & 0 & -a & a \\ a & -a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a & 0 & -a & a \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

La réduite obtenue, triangulaire (supérieure), possède un coefficient diagonal nul.
Elle (et la matrice initiale $A - a \cdot I_4$) est donc non inversible.

- Déterminons $E_0(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

Soit $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in E_0(A) &\iff A\,X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff a \cdot M(1,0)\,X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff M(1,0)\,X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \qquad \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + t &=& 0 \\ x + t &=& 0 \\ x + t &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} \left\{ \begin{array}{rcl} x + t &=& 0 \\ 0 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \; x = -t \right. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
E_0(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x = -t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid (y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid (y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de $E_0(A)$ (d'après ce qui précède).

× libre.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(A).}$$

Commentaire

- On ne développe pas ici la démonstration de la liberté de la famille $\mathcal{F}_0$ car il ne s'agit pas du cœur de la question. De plus, à la lecture des vecteurs de cette famille, il apparaît assez évident qu'il n'existe pas de relation de dépendance linéaire, autre que la triviale, entre ces vecteurs. Il est toutefois primordial de connaître la rédaction formelle permettant de démontrer la liberté d'une famille. C'est pourquoi on la rappelle ci-dessous.
- Démontrons que la famille $\mathcal{F}_0$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(*)$.

$$\begin{aligned}
\text{Or : } \quad (*) &\iff \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.
\end{aligned}$$

  Ainsi, la famille $\mathcal{F}_0$ est libre.

- Déterminons $E_a(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre a.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_a(A) & \iff & (A - a \cdot I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & (a \cdot M(1,0) - a \cdot I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & a \cdot (M(1,0) - I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & (M(1,0) - I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \qquad \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & & & t & = & 0 \\ x & - & y & & & + & t & = & 0 \\ x & & & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L1 \leftrightarrow L_3}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & & & + & t & = & 0 \\ & & & & & & t & = & 0 \\ & & & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & z & + & t & = & 0 \\ & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & & & & & t & = & 0 \\ & & & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & t & = & z \\ & - & y & & & = & -z \\ & & & & t & = & 0 \\ & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & t & = & z \\ & - & y & & & = & -z \\ & & & & t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & z \\ & - & y & & & = & -z \\ & & & & t & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

  On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_a(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ y = z \ \text{ et } \ t = 0 \} \ = \ \{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \} \\
& = & \{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

La famille $\mathcal{F}_a = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de $E_a(A)$ (d'après ce qui précède).

× libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_a(A).}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = a$.

  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $E_a(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :

  $(M(1,0) - I_4)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ (d'après ce qui précède). Or :

  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 + t \cdot C_4 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $t = 0$. En effet, si t est non nul, les coefficients en $4^{\text{ème}}$ position de la combinaison linéaire sont non nuls. On prend alors $t = 0$.
  La combinaison linéaire restante est nulle si $x - y = 0$ (obligatoire pour éliminer le $2^{\text{ème}}$ coefficient) et $x - z = 0$ (obligatoire pour éliminer le $3^{\text{ème}}$ coefficient). Finalement, il faut nécessairement vérifier $x = y = z$ pour obtenir le vecteur nul.

  En prenant par exemple $x = y = z = 1$, on obtient : $E_a(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

  Et l'égalité est vérifiée car ces deux espaces vectoriels sont de même dimension. □

c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

  × la famille $\mathcal{F}_0$ est une base de $E_0(A)$. Ainsi :

  $$\dim\big(E_0(A)\big) = \text{Card}(\mathcal{F}_0) = 3$$

  × la famille $\mathcal{F}_a$ est une base de $E_a(A)$. Ainsi :

  $$\dim\big(E_a(A)\big) = \text{Card}(\mathcal{F}_a) = 1$$

- On en déduit :
$$\dim\big(E_0(A)\big) + \dim\big(E_a(A)\big) \ = \ 4$$
Or 0 et a sont les seules valeurs propres de A et $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est diagonalisable.}}$$
- Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P\,D\,P^{-1}$. Plus précisément :
  × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A,
  × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

$$\boxed{\text{En posant } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ on a donc : } A = PDP^{-1}.}$$
□

4. **Étude du cas** $a = 0$ **et** $b \neq 0$.
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0, b)$.

a) Déterminer le rang des matrices B et $B - b\,I_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

Démonstration.
- Tout d'abord :
$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{rg}(B) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{pmatrix}\right) & \\
& = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}\right) & \\
& = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}\right) & \\
& = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) & \textit{(car } b \neq 0\textit{)} \\
& = & 1 & \textit{(car la famille } \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \textit{ est libre)}
\end{array}$$
$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{rg}(B) = 1.}$$

- Ensuite :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(B - b \cdot I_4) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \\ b \end{pmatrix}\right) \\ & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \textit{(car } b \neq 0\textit{)} \\ & = & 3 \qquad \textit{(car la famille précédente est libre)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(B - b \cdot I_4) = 3}$$

□

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $\mathrm{rg}(B) = 1 < 4$.
  Ainsi, B est non inversible et donc $0 \in \mathrm{Sp}(B)$.
  De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(E_0(B)\big) + \underbrace{\mathrm{rg}(B)}_{=1} = \underbrace{\dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big)}_{=4}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } 0 \text{ est valeur propre de } B \text{ et : } \dim\big(E_0(B)\big) = 3.}$$

- D'après la question précédente, $\mathrm{rg}(B - b \cdot I_4) = 3 < 4$.
  Ainsi, $B - b \cdot I_4$ est non inversible et donc $b \in \mathrm{Sp}(B)$.
  De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(E_b(B)\big) + \underbrace{\mathrm{rg}(B - b \cdot I_4)}_{=3} = \underbrace{\dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big)}_{=4}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } b \text{ est valeur propre de } B \text{ et : } \dim\big(E_b(B)\big) = 1.}$$

Commentaire

On peut aussi remarquer que la matrice B est triangulaire (inférieure). Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Cela permet de conclure directement :

$$\mathrm{Sp}(B) = \{0, b\}$$

- Comme B est une matrice carrée d'ordre 4, on sait d'après le cours que la somme des dimensions de toutes ses sous-espaces propres est majorée par 4. Or :

$$\dim\big(E_0(B)\big) + \dim\big(E_b(B)\big) = 3 + 1 = 4$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } B \text{ n'admet pas de valeur propre autre que } 0 \text{ et } b.}$$

□

c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\dim(E_0(B)) + \dim(E_b(B)) \ = \ 4$$

Or 0 et b sont les seules valeurs propres de B et $B \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } B \text{ est diagonalisable.}}$$

□

5. Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$.
On pose :

$$v_1 \ = \ (1,1,1,0), \qquad v_2 \ = \ (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T \ = \ \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

- Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On note : $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \\
& \Longleftrightarrow & M(a,b)\, U = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} a\,x & & & & & + & a\,t & = & 0 \\ a\,x & & & & & + & a\,t & = & 0 \\ a\,x & & & & & + & a\,t & = & 0 \\ b\,x & + & b\,y & + & b\,z & + & b\,t & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{a} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{a} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{a} L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{b} L_4}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & + & t & = & 0 \\ x & & & & & + & t & = & 0 \\ x & & & & & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(avec } a \neq 0 \textit{ et } b \neq 0\textit{)} \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & + & t & = 0 \\ & & & & & 0 & = 0 \\ & & & & & 0 & = 0 \\ & & y & + & z & & = 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\, t \\ y & = & -z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -t \ \text{ et } y = -z\} \\ & = & \{(-t,-z,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{t \cdot (-1,0,0,1) + z \cdot (0,-1,1,0) \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((-1,0,0,1),(0,-1,1,0)\right) \end{array}$$

- Ainsi, la famille $((-1,0,0,1),(0,-1,1,0))$ est :
  × génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ (d'après ce qui précède).
  × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{Ainsi, en posant } v_3 = (-1,0,0,1) \text{ et } v_4 = (0,-1,1,0)\text{, on obtient que la famille } (v_3,v_4) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Card}\left((v_3,v_4)\right) = 2}$$

□

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\mathscr{B}'$ est libre.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. Supposons : $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$ $(*)$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Or : } \quad (*) & \iff & \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 + \lambda_4 \cdot v_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \\ & \iff & (\lambda_1 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0,0) \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & - & \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \end{array}\right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & - & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \end{array}\right. \\ & \overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & - & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \\ & \overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ & & & & & - & 2\,\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0\right. \\ & & \textit{(par remontées successives)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}' \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^4.}$$

- On a alors :
  - × la famille $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une famille libre,
  - × $\text{Card}(\mathscr{B}') = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.}$$

□

c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.
Dans la suite, on note :

$$V_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ V_3 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ V_4 = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v_1)\big) &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1) \\ &= M(a,b) \times V_1 \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 3b \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot V_1 + 3b \cdot V_2 \\ &= a \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1) + 3b \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_2) \\ &= \text{Mat}_{\mathscr{B}}(a \cdot v_1 + 3b \cdot v_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement : } \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v_1)\big) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(a \cdot v_1 + 3b \cdot v_2). \\ \text{L'application } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \text{ étant bijective, on en déduit : } f(v_1) = a \cdot v_1 + 3b \cdot v_2. \end{array}}$$

Comme $f(v_1) = a \cdot v_1 + 3b \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(v_1,v_2,v_3,v_4)}\big(f(v_1)\big) = \begin{pmatrix} a \\ 3b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- De même :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v_2)\big) = M(a,b)\,V_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot V_1 + b \cdot V_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(a \cdot v_1 + b \cdot v_2\big)$$

Finalement : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(v_2)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a \cdot v_1 + b \cdot v_2)$.
L'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$ étant bijective, on en déduit : $f(v_2) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$.

Comme $f(v_2) = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$.

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3,v_4)}\big(f(v_2)\big) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- D'après la question ***5.a)*** : $v_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.
Ainsi, par définition : $f(v_3) = 0_{\mathbb{R}^4} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$.

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3,v_4)}\big(f(v_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- De même : $v_4 \in \mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3,v_4)}\big(f(v_4)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On en conclut : $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ consiste à exprimer l'image par f des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4, suivant la base (v_1, v_2, v_3, v_4).
- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à $M(a,b)$, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\text{expression de } f(v_1) \text{ dans } (v_1, v_2, v_3, v_4) \quad \longleftrightarrow \quad \text{expression de } M(a,b)\ V_1 \text{ dans } (V_1, V_2, V_3, V_4)$$

Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme. □

d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Montrer :

$$\begin{array}{c} X \text{ est un vecteur propre de } N \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à} \\ \text{la valeur propre } \lambda \text{ et } z = t = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(N) & \iff \big(N - \lambda I_4\big)\, X = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff \begin{pmatrix} a-\lambda & a & 0 & 0 \\ 3b & b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} (a-\lambda)\, x & + & a\, y & & & & & = & 0 \\ 3b\, x & + & (b-\lambda)\, y & & & & & = & 0 \\ & & & - & \lambda\, z & & & = & 0 \\ & & & & & - & \lambda\, t & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_4}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} (a-\lambda)\, x & + & a\, y & & & & & = & 0 \\ 3b\, x & + & (b-\lambda)\, y & & & & & = & 0 \\ & & & - & z & & & = & 0 \\ & & & & & - & t & = & 0 \end{array} \right. \quad \textit{(avec } \lambda \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda(T) & \iff \big(T - \lambda I_2\big) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff \begin{pmatrix} a-\lambda & a \\ 3b & b-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a-\lambda)\, x & + & a\, y & = & 0 \\ 3b\, x & + & (b-\lambda)\, y & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On reconnaît les deux premières lignes du système précédent.

- Finalement :

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} X \text{ est un vecteur propre de } N \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \end{array} & \Leftrightarrow X \neq 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad X \in E_\lambda(N) \\ & \Leftrightarrow X \neq 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda(T) \quad \text{et} \quad z = t = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\lambda(T) \quad \text{et} \quad z = t = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } \lambda \text{ et } z = t = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien la caractérisation souhaitée.}}$$

Commentaire

Profitons de cette question pour rappeler que, par définition, le vecteur nul n'est `JAMAIS` vecteur propre. On veillera en particulier à ne pas confondre :
× sous-espace propre associé à la valeur propre λ (c'est bien un espace vectoriel et il contient en particulier le vecteur nul),
× et ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ (qui n'est pas un espace vectoriel car ne contient pas le vecteur nul).

Plus précisément, avec les notations de l'énoncé, on a :

$$\boxed{E_\lambda(N) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{vecteurs propres de } N \text{ associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \ \cup \ \{0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\}}$$

□

e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

Démonstration.

- Par définition de T, lorsque $(a, b) = (1, 1)$, on a :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } T & \Leftrightarrow & T - \lambda I_2 \text{ est non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(T - \lambda I_2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (1-\lambda)^2 - 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow & 1 - \lambda = \sqrt{3} \quad \texttt{OU} \quad 1 - \lambda = -\sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 1 - \sqrt{3} \quad \texttt{OU} \quad \lambda = 1 + \sqrt{3} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T \text{ admet deux valeurs propres distinctes : } \lambda_1 = 1 - \sqrt{3} \text{ et } \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}.}$$

- Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ_1.

  Comme $\lambda_1 \neq 0$, alors, d'après la question ***5.d)***, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ_1. On en déduit :

$$E_{\lambda_1}(N) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\left(E_{\lambda_1}(N)\right) \ \geqslant \ \dim\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = 1.}$$

- De même, en notant $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda_2 \neq 0$, on obtient d'après la question ***5.d)*** :

$$E_{\lambda_2}(N) \ \supset \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \dim\big(E_{\lambda_2}(N)\big) \ \geqslant \ 1.}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcll} \dim\big(E_0(N)\big) & = & \dim\big(E_0(f)\big) & \textit{(via la passerelle matrice-endomorphisme)} \\ & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & \textit{(par définition)} \\ & = & 2 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \end{array}$$

- Finalement, on obtient :

$$\dim\big(E_{\lambda_1}(N)\big) + \dim\big(E_{\lambda_2}(N)\big) + \dim\big(E_0(N)\big) \geqslant 1 + 1 + 2 = 4$$

  Or, comme N est une matrice carrée d'ordre 4, on sait d'après le cours que la somme des dimensions de tous ses sous-espaces propres est majorée par 4. On en déduit que N n'admet pas d'autres valeurs propres et :

$$\dim\big(E_{\lambda_1}(N)\big) + \dim\big(E_{\lambda_2}(N)\big) + \dim\big(E_0(N)\big) = 4$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } N \text{ est diagonalisable.}}$$

- La matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ est diagonalisable.
  On en déduit que l'endomorphisme f est diagonalisable.

$$\boxed{\text{On en conclut alors que } M(1,1) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}}$$

□

f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?

Démonstration.
On raisonne comme en question précédente.

- Par définition de T, lorsque $(a, b) = (1, -1)$, on a :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } T & \Leftrightarrow & T - \lambda I_2 \text{ est non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(T - \lambda I_2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (1-\lambda)(-1-\lambda) + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow & -(1-\lambda)(1+\lambda) + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow & -(1-\lambda^2) + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda^2 + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda^2 = -2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T \text{ n'admet pas de valeurs propres réelles.}}$$

- On démontre alors que N n'admet pas de valeur propre non nulle.
  Pour ce faire, on procède par l'absurde.
  Supposons que N admet une valeur propre λ non nulle.
  Il existe donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ vecteur propre de N associé à cette valeur propre.
  D'après la question ***5.d)***, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est alors un vecteur propre de T associé à cette valeur propre λ.
  C'est impossible puisque T n'admet pas de valeur propre.

  $\boxed{\text{On en conclut que la matrice } N \text{ n'admet pas de valeur propre non nulle.}}$

Commentaire

La propriété de la question ***5.d)*** est axée sur les vecteurs propres. Elle affirme en particulier que l'existence d'un vecteur propre de N assure l'existence d'un vecteur propre de T (associé à la même valeur propre) et inversement. De cet énoncé on peut tirer une propriété sur les valeurs propres. En effet, si $\lambda \neq 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } N & \Leftrightarrow & \text{il existe } X \neq 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \text{ vecteur propre de } N \\ & & \text{associé à la valeur propre } \lambda \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \text{ vecteur propre de } T \\ & & \text{associé à la valeur propre } \lambda \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est valeur propre de } T \end{array}$$

Ainsi, les valeurs propres non nulles de T sont exactement les valeurs propres non nulles de N. C'est d'ailleurs toute l'idée de la question : en déterminant les valeurs propres de $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on récupère les valeurs propres de $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- On en déduit que 0 est l'unique valeur propre de N. Or :

$$\dim\big(E_0(N)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) = 2 \neq 4$$

  $\boxed{\text{On en déduit que } N \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

- Comme $N = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ n'est pas diagonalisable, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable non plus.

  $\boxed{\text{On en conclut alors que } M(1,-1) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ n'est pas diagonalisable.}}$ □

g) Montrer l'équivalence :

$$M(a,b) \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow\ a^2 + 10\,ab + b^2 > 0$$

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} M(a,b) \text{ diagonalisable} & \Leftrightarrow & f \text{ diagonalisable} & \textit{(car } M(a,b) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & N \text{ diagonalisable} & \textit{(car } N = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\textit{)} \end{array}$$

- L'idée est alors de relier la diagonalisabilité de N à celle de T, comme cela est fait dans les questions ***5.e)*** et ***5.f)*** qui précèdent.

  Remarquons tout d'abord que d'après la question ***5.d)***, la propriété suivante est vérifiée :

  $$\boxed{\text{Les matrices } N \text{ et } T \text{ ont exactement les mêmes valeurs propres non nulles.}} \qquad (*)$$

  On peut alors démontrer les proprités suivantes :

  × en adaptant ***5.e*** : si l'une des deux matrices possède deux valeurs propres non nulles, il en est de même de l'autre (d'après $(*)$). On démontre alors que les matrices N et T sont toutes les deux diagonalisables.

  × en adaptant ***5.f*** : si l'une des deux matrices ne possède aucune valeur propre non nulle, il en est de même de l'autre (d'après $(*)$). On démontre alors que les matrices N et T sont toutes les deux non diagonalisables.

  Il est à noter que T ne peut avoir plus de deux valeurs propres non nulles en tant que matrice carrée d'ordre 2. Il en est donc de même de N en vertu de la propriété $(*)$. Il reste donc à traiter le cas où N et T possèdent une seule valeur propre non nulle.

- Supposons que N et T possède une seule valeur propre λ non nulle.
  Étudions alors leur diagonalisabilité.

  × Étude de T

  Remarquons tout d'abord :

  $$\det(T) = \det\left(\begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}\right) = ab - 3ab = -2ab \neq 0 \qquad \textit{(car } a \neq 0 \textit{ et } b \neq 0\textit{)}$$

  On en déduit que T est inversible. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de T.
  La matrice T possède donc λ pour seule valeur propre.

  Démontrons alors que T n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que T est diagonalisable. Il existe donc :

  ▸ une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

  ▸ une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de T,

  telles que $T = PDP^{-1}$.

  Or λ est la seule valeur propre de T. Ainsi $D = \lambda\, I_2$ et :

  $$T \ = \ P\,(\lambda\, I_2)\, P^{-1} \ = \ P\,(\lambda\, I_2)\, P^{-1} \ = \ \lambda\, I_2$$

  Absurde !

  $$\boxed{\text{Si } T \text{ admet une seule valeur propre non nulle, alors } T \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

  × Étude de N

  La matrice N possède alors deux valeurs propres : $\lambda \neq 0$ et 0. De plus, on a déjà démontré : $\dim\big(E_0(N)\big) = 2$.
  Démontrons alors que N n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que N est diagonalisable. On a alors :

  $$\dim\big(E_\lambda(N)\big) \ + \ \underset{\displaystyle 2}{\underset{\shortparallel}{\dim\big(E_0(N)\big)}} \ = \ \underset{\displaystyle 4}{\underset{\shortparallel}{\dim\big(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\big)}}$$

Ainsi : $\dim\big(E_\lambda(N)\big) = 4 - 2 = 2$. On en déduit qu'il existe :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

tels que (X_1, X_2) est une base de $E_\lambda(N)$. D'après la question ***5.d)***, on a alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E_\lambda(T) \quad , \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in E_\lambda(T) \quad \text{et ainsi} \quad E_\lambda(T) \supseteq \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

On en déduit :

$$\dim\big(E_\lambda(T)\big) \geqslant \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right) = 2$$

En effet, la famille (X_1, X_2) étant libre, il en est de même de la famille $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$.
On en déduit : $\dim\big(E_\lambda(T)\big) = 2 = \dim\big(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big)$. Ainsi, la matrice T est diagonalisable. Impossible ! (d'après l'étude précédente, si T admet une seule valeur propre non nulle elle n'est pas diagonalisable).

$$\boxed{\text{Si } N \text{ admet une seule valeur propre non nulle, alors } N \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- Finalement, N et T sont toutes deux diagonalisables à la même condition qu'elles possèdent deux valeurs propres non nulles distinctes. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} M(a,b) \text{ diagonalisable} & \Leftrightarrow & N \text{ diagonalisable} & \\ & \Leftrightarrow & N \text{ admet deux valeurs propres non nulles distinctes} & \\ & \Leftrightarrow & T \text{ admet deux valeurs propres non nulles distinctes} & \\ & \Leftrightarrow & T \text{ admet deux valeurs propres distinctes} & \textit{(car 0 n'est pas valeur propre de } T\textit{)} \end{array}$$

Or, on a :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } T & \Leftrightarrow & T - \lambda\, I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(T - \lambda\, I_2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & a \\ 3b & b-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (a-\lambda)(b-\lambda) - 3\,ab = 0 \\ & \Leftrightarrow & -2\,ab - (a+b)\,\lambda + \lambda^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \text{ est racine du polynôme } Q(X) = -2\,ab - (a+b)\,X + X^2 \end{array}$$

Le discriminant du polynôme Q est :

$$\Delta = (a+b)^2 - 4\,(-2\,ab) = (a^2 + 2\,ab + b^2) + 8\,ab = a^2 + 10\,ab + b^2$$

Finalement :

$$\begin{array}{rcl} M(a,b) \text{ diagonalisable} & \Leftrightarrow & T \text{ admet deux valeurs propres distinctes} \\ & \Leftrightarrow & \Delta > 0 \end{array}$$

$$\boxed{M(a,b) \text{ diagonalisable} \ \Leftrightarrow \ a^2 + 10\,ab + b^2 > 0.}$$

□

EML 2019 - matrices semblables, matrices inversibles, matrices et endomorphismes nilpotents, endomorphismes de $\mathbb{R}^3$

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$B = P^{-1} A P$$

Commentaire

On peut noter que cette égalité est équivalente à l'égalité : $A = P B P^{-1}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

PARTIE A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
Justifier que A est inversible et diagonalisable.

Démonstration.

- La matrice A est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}}$$

- Le réel 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible.}}$$

- On a :
  - × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,
  - × A possède trois valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

2. Déterminer une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que : $A = P D P^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1}.

Démonstration.

- Déterminons $E_{\frac{1}{2}}(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_{\frac{1}{2}}(A) \quad & \Longleftrightarrow \quad \left(A - \frac{1}{2}\, I_3\right) X = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{2}\, x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & \frac{3}{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}\, L_3}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}\, x & - & y & = & 0 \\ & & \frac{3}{2}\, z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\, y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_{\frac{1}{2}}(A)$ suivante :

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2}}(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \tfrac{1}{2}\,X\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 2y \ \text{ et } \ z = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} = \{y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_{\frac{1}{2}}(A)$,

× est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est uniquement constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F} \text{ est une base de } E_{\frac{1}{2}}(A).}$$

- Déterminons $E_1(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_1(A) &\iff (A - I_3)\,X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} - & y & + & z & = 0 \\ - & \frac{1}{2}\,y & & & = 0 \\ & & & z & = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rrl} y & & = 0 \\ & z & = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_1(A)$ suivante :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \ \text{ et } \ z = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{\text{Par un raisonnement analogue au précédent, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(A).}$$

- Déterminons $E_2(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \iff & (A - 2\,I_3)\,X = 0 \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[4mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & - & \frac{3}{2}\,y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & z \\ & - & \frac{3}{2}\,y & = & 0 \end{array} \right. \\[4mm]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3} L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_2(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(A) & = & \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2\,X\} \ = \ \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \ \text{ et } \ y = 0\} \\[4mm]
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \{z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

$$\boxed{\text{Par un raisonnement analogue au précédent, la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_2(A).}$$

- D'après la question ***1.***, la matrice A est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.
  Plus précisément :
  - × la matrice P est obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres de A,
  - × la matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans le même ordre d'apparition que les vecteurs propres).

  Comme $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ sont des bases respectives de $E_{\frac{1}{2}}(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } A = P\,D\,P^{-1}.}$$

- La matrice D est inversible car elle est diagonale et à coefficients diagonaux tous non nuls.

$$\boxed{\text{Enfin : } D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$.
- Illustrons la méthode avec la matrice de l'exercice et $\lambda = \frac{1}{2}$.
  On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_{\frac{1}{2}}(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que :
  $(A - \frac{1}{2}\, I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :
  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $z = 0$. En effet, si z est non nul, les coefficients en $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ position de la combinaison linéaire sont non nuls. On prend alors $z = 0$.
  La combinaison linéaire restante est nulle si $\frac{1}{2}\, x - y = 0$, c'est-à-dire si $x = 2y$.
  En prenant par exemple $y = 1$, on obtient : $E_{\frac{1}{2}}(A) \ \supset \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
  Et l'égalité est vérifiée car ces deux espaces vectoriels sont de même dimension.
- Explicitons maintenant la construction de la matrice P.
  Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et introduisons l'endomorphisme f dont la représentation dans la base canonique est $\mathscr{B}$ (cet endomorphisme est unique par bijectivité de l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)$). Notons aussi : $v_1 = (2, 1, 0)$, $\ v_2 = (1, 0, 0)$, et $v_3 = (1, 0, 1)$.
  La famille $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$:
  × est libre car est la concaténation de familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme f.
  × de cardinal $\text{Card}(\mathscr{B}') = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.
  On en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de vecteurs propres de f.
  Notons alors $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Par la formule du changement de base on a :
  $$\begin{array}{ccccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P & \times & D & \times & P^{-1} \end{array}$$
  On obtient bien la formule annoncée.
- Rappelons que si Δ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux a, b, c tous non nuls
  $$\text{alors} \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \quad \text{puisque} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ □

3. On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et $Q\,D\,Q$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q^2 = Q \times Q = I_3. \text{ On en déduit que la matrice } Q \text{ est inversible d'inverse } Q^{-1} = Q.}$$

- Ensuite :
$$Q\,D\,Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Q\,D\,Q = D^{-1}}$$

Commentaire

- Les coefficients de la matrice Q sont tous dans $\{0, 1\}$. De plus, la matrice Q admet un seul 1 par ligne et par colonne. Une telle matrice est appelée **matrice de permutation**.
- Ces matrices permettent de formaliser les opérations élémentaires permettant d'échanger des lignes (resp. des colonnes) lors de l'algorithme du pivot de Gauss. Plus précisément, multiplier une matrice A à gauche (resp. à droite) par une matrice de permutation permet d'échanger des lignes (des colonnes). Dans notre exemple, la matrice Q permet d'échanger les éléments en $1^{\text{ère}}$ et $3^{\text{ème}}$ position. Ainsi :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  (on échange les lignes 1 et 3 de A) *(on échange les colonnes 1 et 3 de A)*

  On peut retenir l'idée développée dans le paragraphe par la forme :
$$L\ A\ C$$
  qui signifie qu'avec une multiplication à gauche, on effectue une opération sur les (L)ignes, tandis qu'avec une multiplication à droite, on effectue une multiplication sur les (C)olonnes.
- L'écriture $Q\,D\,Q^{-1} = D^{-1}$ réfère à un changement de base. Pour bien comprendre ce point, introduisons la famille $\mathscr{B}'' = (w_1, w_2, w_3)$ définie par : $w_1 = u_3$, $w_2 = u_2$, et $w_3 = u_1$.
  La famille (w_1, w_2, w_3) est :
  × génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisque : $\text{Vect}\,(w_1, w_2, w_3) = \text{Vect}\,(u_3, u_2, u_1) = \text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$.
  × de cardinal $\text{Card}\,\big((w_1, w_2, w_3)\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.
  Ainsi, la famille $\mathscr{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  Remarquons alors : $Q^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$ (matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}''$). Ainsi :
$$\begin{aligned} D^{-1} &= Q \times D \times Q^{-1} \\ &= P_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \end{aligned}$$
  (par formule de changement de base)

  Ainsi, la matrice D^{-1} apparaît comme matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$. □

4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Démonstration.

- D'après la question **2.** : $A = P\,D\,P^{-1}$. On en déduit :
  - × $P^{-1}\,A = D\,P^{-1}$ puis $P^{-1}\,A\,P = D$.
  - × $A^{-1} \;=\; \Big(P\,\big(D\,P^{-1}\big)\Big)^{-1} \;=\; \big(D\,P^{-1}\big)^{-1}\,P^{-1} \;=\; \big(P^{-1}\big)^{-1}\,D^{-1}\,P^{-1} \;=\; P\,D^{-1}\,P^{-1}$.
- En combinant ce résultat avec ce qui précède :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= P\,D^{-1}\,P^{-1} \\ &= P\,\big(Q\,D\,Q^{-1}\big)\,P^{-1} && \textit{(d'après la question précédente, en remarquant } Q = Q^{-1}\textit{)} \\ &= P\,Q\,\big(P^{-1}\,A\,P\big)\,Q^{-1}\,P^{-1} \\ &= \big(P\,Q\,P^{-1}\big)\,A\,\big(P\,Q^{-1}\,P^{-1}\big) \\ &= \big(P\,Q\,P^{-1}\big)\,A\,\big(P\,Q\,P^{-1}\big)^{-1} \end{aligned}$$

  La dernière ligne est obtenue en remarquant :

$$\big(P\,Q\,P^{-1}\big)^{-1} \;=\; \big(Q\,P^{-1}\big)^{-1}\,P^{-1} \;=\; \big(P^{-1}\big)^{-1}\,Q^{-1}\,P^{-1} \;=\; P\,Q^{-1}\,P^{-1}$$

En posant $H = P\,Q\,P^{-1}$, on obtient $A^{-1} = H\,A\,H^{-1}$ ou encore $A = H^{-1}\,A^{-1}\,H$.
Les matrices A et A^{-1} sont donc semblables.

Commentaire

- D'après le cours :

Deux matrices $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	Les matrices A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes

  Cela revient à démontrer que toute matrice inversible peut être considérée comme une matrice de changement de base.
- On peut illustrer ce point à l'aide de la question. On démontre : $A^{-1} = H\,A\,H^{-1}$, ce qui signifie que A et A^{-1} sont semblables. On peut aussi faire apparaître H et H^{-1} comme des matrices de changement de base ce qui permettra d'interpréter cette égalité comme une formule de changement de base. Pour ce faire, introduisons la famille $\mathscr{B}''' = (z_1, z_2, z_3)$ définie par : $z_1 = e_1$, $z_2 = -e_1 + e_3$, et $z_3 = e_1 + e_2$.
  Cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$ (car génératrice de $\mathbb{R}^3$ et de cardinal 3).
  Remarquons alors : $H^{-1} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'''}$ (matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'''$). Ainsi :

$$\begin{array}{ccccccccl} A^{-1} & = & H & \times & A & \times & H^{-1} & & \\ & = & P_{\mathscr{B}''',\mathscr{B}} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & \times & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'''} & = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'''}(f) & \textit{(par formule de changement de base)} \end{array}$$

  Ainsi, les matrices A et A^{-1} représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes.
- Notons que si A est une représentation matricielle d'un endomorphisme f alors A^{-1} représente naturellement l'endomorphisme f^{-1}. En effet :

$$\text{si} \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \qquad \text{alors} \qquad A^{-1} = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f^{-1}\big)$$

  On a ainsi trouvé une base $\mathscr{B}'''$ dans laquelle A^{-1} est une représentation de f et une base $\mathscr{B}$ dans laquelle A^{-1} est une représentation de f^{-1}. On ne peut conclure pour autant : $f \cancel{=} f^{-1}$.
  (cela sera vrai si les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'''$ étaient égales) □

PARTIE B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) \ = \ (x, -z, y+2z)$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

Démonstration.
Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,0) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(e_2) = f(0,1,0) = (0,0,1) = e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $f(e_3) = f(0,0,1) = (0,-1,2) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

- D'autre part :

$$\mathrm{rg}(M) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \ \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux non nuls.
  Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale M.

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est inversible.}}$$

□

6. a. Vérifier que 1 est valeur propre de f et (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associée.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M - I_3) \ &= \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{rg}\left(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(M - I_3\right) \ = \ 1.}$$

- Or, par théorème du rang :

$$\begin{array}{lcccccc} & \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\Big(\text{Ker}\left(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}\right)\Big) & + & \text{rg}\left(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}\right) \\ \text{donc} & \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\left(E_1(f)\right) & + & \text{rg}\left(M - I_3\right) \\ & \shortparallel & & & & \shortparallel \\ & 3 & & & & 1 \end{array}$$

On en déduit : $\dim\left(E_1(f)\right) \ = \ 3 - 1 \ = \ 2$.

$$\boxed{\dim\left(E_1(f)\right) \ = \ 2}$$

- D'autre part :
  × $f(u_1) = f(1,0,0) = (1,0,0) = u_1 = 1 \cdot u_1$.
  × $f(u_2) = f(0,1,-1) = (0,1,1-2) = u_2 = 1 \cdot u_2$.

$\boxed{\text{Ainsi } u_1 \text{ et } u_2 \text{ sont deux vecteurs propres de } f \text{ associés à la valeur propre } 1.}$

- Ainsi, $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est une famille d'éléments de $E_1(f)$ qui est :
  × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
  × de cardinal $\text{Card}\left(\mathcal{F}\right) = 2 = \dim\left(E_1(f)\right)$.

On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $E_1(f)$, sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.

Commentaire

- La formulation de l'énoncé, à savoir « **Vérifier** que 1 est valeur propre » oriente vers une méthode directe consistant généralement en un calcul simple. Il ne s'agit donc pas de mettre en place une démonstration théorique. Ici, il serait malvenu de chercher toutes les valeurs propres en effectuant le calcul de $\text{rg}(M - \lambda\, I_3)$.
- L'énoncé demande de démontrer que la famille (u_1, u_2) est une base de $E_1(f)$.
  En démontrant que u_1 et u_2 sont deux vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1, on démontre :
  $$E_1(f) \ \supset \ \text{Vect}\,(u_1, u_2)$$
  On conclut à l'égalité de ces deux espaces vectoriels à l'aide d'un argument de dimension fournit par le théorème du rang.
- On peut aussi rédiger tout autrement. On ne démontre pas que 1 est valeur propre mais on détermine directement, par la méthode usuelle $E_1(f)$. Détaillons cette méthode.
  Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in E_1(f) & \Longleftrightarrow & U \in E_1(M) \\ & \Longleftrightarrow & (M - I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ -\ y & - & z & = & 0 \\ y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ -\ y & - & z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Commentaire

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} E_1(f) & = & \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ y = -z\ \} \\ & = & \{\ (x,-z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\ \} \\ & = & \{\ x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,-1,1) \mid\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\ \} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\ (1,0,0),\ (0,-1,1)\ \right) \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\ (1,0,0),\ (0,1,-1)\ \right)\ =\ \mathrm{Vect}\left(u_1,u_2\right) \end{array}$$

Comme : $E_1(f) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, le réel 1 est bien valeur propre de f et $E_1(f)$ est le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

☐

b. Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.

Démonstration.

Soit $u_3 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} f(u_3) - u_3 = u_2 & \Longleftrightarrow & \big(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\big)(u_3) = u_2 \\ & \Longleftrightarrow & (M - I_3)\, U_3 = U_2 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & & & 0 & = & 0 \\ - & y & - & z & & = & 1 \\ & y & + & z & & = & -1 \end{array} \right. \\ & \underset{}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & & & 0 & = & 0 \\ - & y & - & z & & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\boxed{\text{En prenant } x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ (par exemple), on obtient } u_3 = (0,0,-1).}$$

Commentaire

On démontre ici que tous les vecteurs (x,y,z) vérifiant $y+z = -1$ sont solutions de l'équation énoncée. Autrement dit, tous les vecteurs s'écrivant sous la forme $(x,-1-z,z)$, où x et y sont des réels quelconques, sont solutions. On a choisi $x = 0$ et $z = -1$ (ou $y = 0$) par simplicité. Mais on aurait très bien pu faire d'autres choix comme :

$$(1,0,-1),\ (1,-2,1),\ (1,-3,2),\ (0,-2,1),\ (0,-1,0)\ldots$$

☐

c. Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

  Les équivalences suivantes sont vérifiées.

$$\begin{array}{cl} & \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \iff & (\lambda_1,\ \lambda_2,\ -\lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0) \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & & = & 0 \\ & & - \ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ \iff & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- On a alors :
  × la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre,
  × $\mathrm{Card}\big((u_1, u_2, u_3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, u_3) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\mathrm{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3$).
- $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, u_3). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, u_3) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\mathrm{Card}\big(\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)\big)}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens ! □

On admet que $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

Commentaire

Ce résultat se démontre sans pein. En effet, la famille $\mathscr{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est :
× génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisque : $\mathrm{Vect}\,(u_1, -u_2, u_3) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$.
× de cardinal $\mathrm{Card}\big((u_1, -u_2, u_3)\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}^3\big)$.
Ainsi, la famille $\mathscr{B}_2$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

7. a. Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathscr{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathscr{B}_2$.

Démonstration.
Déterminons tout d'abord $M_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$.

- $f(u_1) = u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(u_2) = u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(u_3) = u_2 + u_3 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$.
  Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } M_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- Cette écriture permet de démontrer que 1 est l'unique valeur propre de l'endomorphisme f. En effet, comme M_1 est une matrice triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi :
  $$\text{Sp}(f) \ = \ \text{Sp}(M_1) \ = \ \{1\}$$
  Ainsi, l'endomorphisme f possède une unique valeur propre. On en déduit, en procédant par l'absurde, que f n'est pas diagonalisable. En effet, si on suppose f diagonalisable, $M_1 = \text{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ l'est aussi. Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M_1 (ainsi $D = I_3$) telles que $M_1 = P\,D\,P^{-1} = P\,I_3\,P^{-1} = I_3$. Ce qui est absurde.
- L'endomorphisme f n'étant pas diagonalisable, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f est triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) l'endomorphisme f.
- Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre E_{λ_i} et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cet énoncé. Ici, f n'a qu'une valeur propre. Le sous-espace propre $E_1(f)$ a pour base la famille $\big(u_1, u_2\big)$. On complète alors cette famille en ajoutant u_3. La matrice représentant f dans la base $\mathscr{B}_1$ ainsi formée est bien triangulaire supérieure.

Déterminons maintenant $M_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$.

- $f(u_1) = u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot (-u_2) + 0 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(-u_2) = -u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot (-u_2) + 0 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(-u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(u_3) = u_2 + u_3 = 0 \cdot u_1 - 1 \cdot (-u_2) + 1 \cdot u_3$.

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } M_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

b. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

Démonstration.

- Les matrices M_1 et M_2 sont semblables car elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes.
- Par ailleurs :

$$M_1\, M_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi : } M_1\, M_2 = I_3. \text{ On en déduit que les matrices } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont inversibles} \\ \text{et inverses l'une de l'autre.}\end{array}}$$

□

8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Démonstration.
Notons $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}$ et $Q = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_2}$.

- D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) & \times & P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M & = & P & \times & M_1 & \times & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } M^{-1} = P\, M_1^{-1}\, P^{-1}.}$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} M^{-1} & = & P\, M_1^{-1}\, P^{-1} & \\ & = & P\, M_2\, P^{-1} & \textit{(d'après la question }\textbf{\textit{7.b)}}\textit{)} \\ & = & P\left(Q\, M\, Q^{-1}\right) P^{-1} & \textit{(d'après la question }\textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\ & = & \big(P\, Q\big)\, M\, \big(P\, Q\big)^{-1} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ et } M^{-1} \text{ sont semblables.}}$$

□

PARTIE C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice T est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T) = \{1\}}$$

- Le réel 0 n'est pas valeur propre de T.

$$\boxed{\text{On en déduit que } T \text{ est inversible.}}$$

- Démontrons que T n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que T est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de T telles que $T = PDP^{-1}$.
  Or 1 est la seule valeur propre de T. Ainsi $D = I_3$ et :

$$T \;=\; P\, I_3\, P^{-1} \;=\; P\, I_3\, P^{-1} \;=\; I_3$$

Absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } T \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

10. a. Calculer N^3 puis $(I_3 + N)\,(I_3 - N + N^2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$N^3 \;=\; (T - I_3)^3 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } N^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} (I_3 + N)\,(I_3 - N + N^2) &= (I_3 - \cancel{N} + \cancel{N^2}) + (\cancel{N} - \cancel{N^2} + N^3) \\ &= I_3 - N^3 \;=\; I_3 \qquad \textit{(car } N^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{(I_3 + N)\,(I_3 - N + N^2) = I_3}$$

□

b. En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

Démonstration.
Par définition : $T = I_3 + N$. Ainsi, d'après ce qui précède :

$$T\,(I_3 - N + N^2) = I_3$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T \text{ est inversible d'inverse } T^{-1} = I_3 - N + N^2.}$$

□

11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***10.a)*** : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
- Or :

$$\begin{array}{rcll} N^2 \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow & g^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} & \textit{(par isomorphisme de représentation)} \\ & \Leftrightarrow & \exists u \in \mathbb{R}^3,\ g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3} & \\ & \Leftrightarrow & \exists u \in \mathbb{R}^3,\ g \circ g(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.}$$

- Enfin, comme $N^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$, on a : $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ (toujours par isomorphisme de représentation).

$$\boxed{\text{On en déduit : } g \circ g \circ g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.}$$

□

b. Montrer que la famille $\mathscr{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $(g \circ g(u), g(u), u)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot g \circ g(u) + \lambda_2 \cdot g(u) + \lambda_3 \cdot u = 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$.
  - × Par linéarité de g^2, on obtient, en appliquant g^2 de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 \cdot \cancel{g^4(u)} + \lambda_2 \cdot \cancel{g^3(u)} + \lambda_3 \cdot g^2(u) & = & g^2\big(0_{\mathbb{R}^3}\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \lambda_3 \cdot g^2(u) & & 0_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

  En effet, comme $g^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ alors $g^4 = g \circ 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
  Et en particulier : $g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g^4(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{Comme } \lambda_1 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et } g^2(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ alors : } \lambda_3 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_1 \cdot g^2(u) + \lambda_2 \cdot g(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
  En appliquant g de part et d'autre, on obtient alors :

$$\lambda_1 \cdot \cancel{g^3(u)} + \lambda_2 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, comme ci-dessus : } \lambda_2 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_1 \cdot g^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{On en conclut une nouvelle fois : } \lambda_3 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (g^2(u), g(u), u) \text{ est bien libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = (g^2(u), g(u), u)$ est :
  - $\times$ libre.
  - $\times$ de cardinal : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$ □

c. Écrire la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_3$.

Démonstration.

- $g\big(g^2(u)\big) = g^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3} = 0 \cdot g^2(u) + 0 \cdot g(u) + 0 \cdot u$.

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}\Big(g\big(g^2(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $g\big(g(u)\big) = g^2(u) = 1 \cdot g^2(u) + 0 \cdot g(u) + 0 \cdot u$.

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}\Big(g\big(g(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $g\big(u\big) = g(u) = 0 \cdot g^2(u) + 1 \cdot g(u) + 0 \cdot u$.

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}\big(g(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$ □

d. Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } N^2 - N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(g).}$$

- Or, d'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_3} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}(g) & \times & P_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ N & = & R & \times & (N^2 - N) & \times & R^{-1} \end{array} \quad \textit{(en notant } R = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_3}\textit{)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les matrices } N \text{ et } N^2 - N \text{ sont semblables.}}$$ □

12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Démonstration.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} R\,T^{-1}\,R^{-1} &= R\,\big(I_3 - N + N^2\big)\,R^{-1} && \textit{(d'après la question \textbf{10.a)})} \\ &= R\,I_3\,R^{-1} + R\,\big(N^2 - N\big)\,R^{-1} = I_3 + N = T \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } T = R\,T^{-1}\,R^{-1} \text{ et les matrices } T \text{ et } T^{-1} \text{ sont semblables.}}$$ □

EDHEC 2019 - commutant

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. a) Déterminer $(A - I)^2$.

Démonstration.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

Démonstration.

- Calculons tout d'abord :

$$(A-I)^2 = A^2 - 2\,A + I$$

(car la matrice I commute avec A, matrice de même ordre)

- Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rrcl} & A^2 - 2\,A + I & = & 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} & -A^2 + 2\,A & = & I \\ \text{et} & A\,(-A + 2\,I) & = & I \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -A + 2\,I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

2. On pose $A = N + I$.

Commentaire

Autrement dit, on note $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $N = A - I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

Démonstration.

- On a démontré en question ***1.a)*** : $N^2 = \big(A - I\big)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  (ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = N^2\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\ N^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

- Les matrices I et N commutent (car I commute avec toutes les matrices du même ordre).
- Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
A^n & = & (N+I)^n \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, (I)^{n-k} \, (N)^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, I \, N^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(car : } \forall j \in \mathbb{N}, \ I^j = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \, N^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2, \ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} \, N^0 + \binom{n}{1} \, N^1 & \\
& = & I + n\,N &
\end{array}$$

- De plus : $I - 0 \cdot N = I$ et $A^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \ A^n = I + n\,N.}$$

Commentaire

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la somme la plus à droite est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2, \ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ et $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$).

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n \ = \ I + n\,N \ = \ I + n\,(A - I) \ = \ (1-n)\,I + n\,A$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n \ = \ (1-n)\,I + n\,A}$$

□

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^{-1} = 2\,I - A$ d'après la question ***1.b)***.
- D'autre part : $(1 - (-1))\,I + (-1)\,A = 2\,I - A$.

$$\boxed{\text{La formule précédente est aussi valable pour } n = -1.}$$

□

3. a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{1\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(A) \subset \{1\} \text{ et 1 est l'unique valeur propre possible de } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\,Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :
  $$(\alpha\,Q)(A) \;=\; \alpha\,Q(A) \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
  $$R(A) \;=\; (A - 5\,I)\,Q(A) \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Démontrons que 1 est valeur propre de A.

$$A - I \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_2 = -C_1$).

$$\boxed{\text{On en déduit que 1 est l'unique valeur propre de } A.}$$

□

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

Démonstration.
Démontrons que A n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
Supposons que A est diagonalisable.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de A. Ainsi $D = I$ et :

$$A \; = \; P\, I_3\, P^{-1} \; = \; P\, I_3\, P^{-1} \; = \; I_3$$

Absurde !

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) \;&=\; \mathrm{rg}(A - I) \\
&=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \;=\; 1
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vérifié car la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre (constituée uniquement d'un vecteur non nul).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = 1.}$$

□

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Démonstration.
Notons $E_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1)$, $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2)$.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) \;&=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((f - \mathrm{id})(e_1)\big) \\
&=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f - \mathrm{id}\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) \\
&=\; \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id})\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1) \qquad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot)\textit{)} \\
&=\; \big(A - I\big)\; E_1 \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&=\; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((-1, -2, 1)\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation, } u_1 = (-1, -2, 1).}$$

Puis : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\Big((f-\text{id})(u_1)\Big) = \big(A-I\big)\, U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big((0,0,0)\big).$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (f-\text{id})(u_1) = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ c'est-à-dire : } u_1 \in \text{Ker}(f-\text{id}).}$$

Commentaire

On pouvait ici opter pour une présentation plus élégante :

$$\begin{array}{rcll} (f-\text{id})\,(u_1) & = & (f-\text{id})\Big((f-\text{id})(e_1)\Big) & \\ & = & (f-\text{id})^2\,(e_1) \ = \ 0_{\mathbb{R}^3} & \textit{(car } (f-\text{id})^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \\ & & & \textit{puisque } (A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \end{array}$$

La présentation choisie est plus calculatoire. Cela a un intérêt : on obtient la valeur de u_1.

- Ensuite :

$$\begin{array}{rcl} \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big((f-\text{id})(u_2)\big) & = & \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f-\text{id}\big) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u_1\big) \\ & = & (A-I)\,(E_1+E_3) \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\big((0,0,0)\big) \end{array}$$

On en déduit, par isomorphisme de représentation : $(f-\text{id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } u_2 \in \text{Ker}(f-\text{id}).}$$

Commentaire

- L'énoncé ne donne pas directement accès à f mais à A, sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$. La base $\mathscr{B}$ étant fixée, l'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$, appelée parfois isomorphisme de représentation, permet de traduire les propriétés énoncées dans le monde des espaces vectoriels en des propriétés énoncées dans le monde matriciel.
  Voici quelques correspondances dans le cas général :

$$\begin{array}{rcl} E \text{ espace vectoriel de dimension } n & \longleftrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ f : E \to E \text{ endomorphisme} & \longleftrightarrow & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \text{ bijectif} & \longleftrightarrow & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ inversible} \end{array}$$

  Ou encore, dans le cas précis de l'exercice :

$$\begin{array}{rcl} f & \longleftrightarrow & A \\ f-\text{id} & \longleftrightarrow & A-I \\ (f-\text{id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3} & \longleftrightarrow & (A-I)\times U_2 = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

  Il est très fréquent que les énoncés de concours requièrent de savoir traduire une propriété d'un monde à l'autre. Il est donc indispensable d'être à l'aise sur ce mécanisme.

- Enfin, par théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\left(\mathbb{R}^3\right) & = & \dim\Big(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right)\Big) & + & \operatorname{rg}\left(f-\mathrm{id}\right) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 1 \end{array}$$

On en déduit : $\dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right)\big) \ = \ 3-1 \ = \ 2$.

$$\boxed{\dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right)\big) \ = \ 2}$$

- La famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est :
  - × libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires ($(-1,-2,1)$ et $(1,0,1)$).
  - × de cardinal $\operatorname{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 2 = \dim\big(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{F} \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right).}$$

Commentaire

- On peut aussi déterminer le noyau de $f-\mathrm{id}$ par résolution de systèmes. Détaillons cette méthode.
- Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} u \in \operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right) & \iff & \left(f-\mathrm{id}\right)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \iff & (A-I)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2\,x & + & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \ x \ = \ y \ + \ z \right. \end{array}$$

Finalement, on obtient l'expression de $\operatorname{Ker}(f)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{id}\right) & = & \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y+z\} \\ & = & \{(y+z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y \cdot (1,\,1,\,0) + z \cdot (1,\,0,\,1) + \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \operatorname{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right) \end{array}$$

- On remarque que la famille génératrice trouvée n'est pas celle qui est présente dans l'énoncé. Cependant, comme : $(-1,-2,1) = -2 \cdot (1,1,0) + (1,0,1)$, on a :

$$\operatorname{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right) \ = \ \operatorname{Vect}\left((-1,-2,1),(1,0,1)\right) \ = \ \operatorname{Vect}\left(u_1,u_2\right)$$

□

5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Montrons que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$ $(*)$.
  - × Par linéarité de $f - \mathrm{id}$, on obtient, en appliquant $f - \mathrm{id}$ de part et d'autre de l'égalité :

$$\lambda_1 \cdot \cancel{(f-\mathrm{id})(u_1)} + \lambda_2 \cdot \cancel{(f-\mathrm{id})(u_2)} + \underbrace{\lambda_3 \cdot (f-\mathrm{id})(e_1)}_{= \ \lambda_3 \cdot u_1} \ = \ \underbrace{(f-\mathrm{id})\big(0_{\mathbb{R}^3}\big)}_{= \ 0_{\mathbb{R}^3}}$$

    En effet, comme u_1 et u_2 sont deux éléménts de $\mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{id}\big)$ alors :

$$(f-\mathrm{id})(u_1) \ = \ 0_{\mathbb{R}^3} \ = \ (f-\mathrm{id})(u_2)$$

$$\boxed{\text{Comme } \lambda_3 \cdot u_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \ \text{ et } \ u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ alors : } \lambda_3 = 0.}$$

  - × L'égalité $(*)$ se réécrit alors : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
    Or, d'après la question précédente, la famille (u_1, u_2) est libre.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda_1 = \lambda_2 = 0.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ et la famille } (u_1, u_2, e_1) \text{ est bien libre.}}$$

Commentaire

- Il était une nouvelle fois possible de procéder par résolution de système.
  Détaillons ce point.
- Montrons que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 \ = \ 0_{\mathbb{R}^3}$.

  Les équivalences suivantes sont vérifiées.

$$\begin{array}{cl}
 & \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & \lambda_1 \cdot (-1, -2, 1) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\iff & (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ -2\,\lambda_1, \ \lambda_1 + \lambda_2) \ = \ (0, 0, 0) \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\,\lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & - & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 2\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff & \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\
 & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_1, u_2, e_1) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3.}$$

- On a alors :
  - × la famille (u_1, u_2, e_1) est une famille libre,
  - × $\text{Card}\big((u_1, u_2, e_1)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_1, u_2, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, e_1) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}((u_1, u_2, e_1)) = 3$).
- $\text{Vect}\,(u_1, u_2, e_1)$ est l'espace vectoriel constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, e_1). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, e_1) d'un espace vectoriel, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}\big(\text{Vect}\,(u_1, u_2, e_1)\big)}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, e_1))}$ n'ont aucun sens !

□

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

Démonstration.

- $f(u_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot e_1$ car $u_1 \in \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- $f(u_2) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot e_1$ car $u_2 \in \text{Ker}(f - \text{id}) = E_1(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Rappelons que par définition : $u_1 = (f - \text{id})(e_1) = f(e_1) - e_1$.
  On en déduit : $f(e_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot e_1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}\big(f(e_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.}$$

Commentaire

- Rappelons tout d'abord que déterminer la matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, e_1) consiste à exprimer l'image par f des vecteurs u_1, u_2, e_1 suivant cette même base (u_1, u_2, e_1).
- Pour résoudre la question, on se sert ici une nouvelle fois de la correspondance entre le monde des espaces vectoriels et le monde matriciel.
  Ou peut ajouter la correspondance suivante à celle déjà évoquée :

$$\text{expression de } f(u_1) \text{ dans } (u_1, u_2, e_1) \quad \longleftrightarrow \quad \text{expression de } AU_1 \text{ dans } (U_1, U_2, E_1)$$

Commentaire

- Comme on l'a vu dans la question ***3.b)***, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérer un espace vectoriel E de dimesnion finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cette question. Ici, f n'a qu'une valeur propre. Le sous-espace propre $E_1(f)$ a pour base la famille (u_1, u_2). On complète alors cette famille en ajoutant e_1. La matrice représentative de f dans la base (u_1, u_2, e_1) obtenue est triangulaire supérieure. □

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

Démonstration.

- Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. Rappelons tout d'abord :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1), \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_2), \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1)$$

  On en conclut que $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

$$\boxed{\text{Comme } P \text{ est une matrice de passage, } P \text{ est inversible.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi effectuer un calcul de rang plus classique.

- 1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$\mathrm{rg}(P) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \;=\; \mathrm{rg}\left(U_1, U_2, E_2\right) \;=\; 3$$

  En effet, la famille (U_1, U_2, E_2) est libre car la famille (u_1, u_2, e_2) l'est en tant que base de $\mathbb{R}^3$.

- 2$^{\text{ème}}$ méthode :

$$\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \underset{}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=}} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux tous non nuls.
  Elle est donc inversible et il en est de même de la matrice initiale P.

- Notons $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ A & = & P & \times & T & \times & P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } A = P\,T\,P^{-1}.}$$

□

7. On note $(E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,1},\ E_{2,2},\ E_{2,3},\ E_{3,1},\ E_{3,2},\ E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

Commentaire

Le concepteur a décidé ici de décrire les ensembles dont on doit démontrer l'égalité avec des phrases mathématiques plutôt qu'avec des symboles. Il faut savoir lire l'égalité souhaitée si elle est énoncée sous la forme suivante :

$$\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MT = TM\} \;=\; \mathrm{Vect}\left(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\right)$$

Démonstration.

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe donc $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$.

- On a alors :

$$\begin{aligned} MT = TM \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1 + a_3 \\ a_4 & a_5 & a_4 + a_6 \\ a_7 & a_8 & a_7 + a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_7 & a_2 + a_8 & a_3 + a_9 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_1 + a_7 \\ a_2 & = & a_2 + a_8 \\ a_1 + a_3 & = & a_3 + a_9 \\ a_4 + a_6 & = & a_6 \\ a_7 + a_9 & = & a_9 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_7 & = & 0 \\ a_8 & = & 0 \\ a_1 & = & a_9 \\ a_4 & = & 0 \\ a_7 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi poser $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que : $T = I + R$. On a alors :

$$MT = TM \;\Leftrightarrow\; M\,(I + R) = (I + R)\,M \;\Leftrightarrow\; \cancel{M} + MR = \cancel{M} + RM \;\Leftrightarrow\; MR = RM$$

Cela permet d'obtenir plus rapidement les équations au-dessus.

On en conclut :

$$\begin{aligned}
& \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MT = TM\} \\
= \ & \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix} \mid a_1 = a_9 \quad \text{et} \quad a_4 = a_7 = a_8 = 0 \right\} \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} a_9 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix} \mid (a_2, a_3, a_5, a_6, a_9) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\
= \ & \{a_9 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + a_2 \cdot E_{1,2} + a_3 \cdot E_{1,3} + a_5 \cdot E_{2,2} + a_6 \cdot E_{2,3} \mid (a_2, a_3, a_5, a_6, a_9) \in \mathbb{R}^5\} \\
= \ & \text{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})
\end{aligned}$$

$$\boxed{E = \text{Vect}\,(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})}$$

- Montrons que la famille $\mathcal{F} = \big(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$.
  Supposons : $\lambda_1 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Ce qui se réécrit :

  $$\lambda_1 \cdot E_{1,1} + \lambda_1 \cdot E_{3,3} + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

  Or, la famille $\big(E_{1,1},\ E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$ est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ (qui est elle-même libre). On en déduit :

  $$\lambda_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

  $$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est :
  × libre.
  × génératrice de E.
  On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de E.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \dim(E) = \text{Card}\,(\mathcal{F}) = 5.}$$

□

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big)\,T \ = \ T\,\big(P^{-1}NP\big)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& NA = AN \\
\Leftrightarrow \ & N\,\big(PTP^{-1}\big) = \big(PTP^{-1}\big)\,N && \textit{(d'après la question \textbf{6.})} \\
\Leftrightarrow \ & P^{-1}\,N\,PTP^{-1} = \big(P^{-1}P\big)\,TP^{-1}\,N && \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\
\Leftrightarrow \ & P^{-1}\,N\,PT\,\big(P^{-1}P\big) = TP^{-1}\,N\,P && \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\
\Leftrightarrow \ & \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{NA = AN \ \Leftrightarrow \ \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big)}$$

□

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)$.

Commentaire

Ici aussi, le concepteur a préféré décrire les ensembles plutôt que de les écrire avec des symboles mathématiques. On aurait pu écrire l'égalité souhaitée sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} F &= \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid NA = AN\} \\ &= \operatorname{Vect}\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& N \in F \\
\Leftrightarrow\ & NA = AN && \textit{(par définition de } F\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \big(P^{-1}NP\big)\,T = T\,\big(P^{-1}NP\big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
\Leftrightarrow\ & P^{-1}NP \in E = \operatorname{Vect}(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}) && \textit{(par définition de } E \textit{ et question } \textbf{\textit{7.a)}}\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, \\
& P^{-1}NP = \lambda_1\cdot(E_{1,1}+E_{3,3}) + \lambda_2\cdot E_{1,2} + \lambda_3\cdot E_{1,3} + \lambda_4\cdot E_{2,2} + \lambda_5\cdot E_{2,3} \\
\Leftrightarrow\ & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, \\
& N = P\,\Big(\lambda_1\cdot(E_{1,1}+E_{3,3}) + \lambda_2\cdot E_{1,2} + \lambda_3\cdot E_{1,3} + \lambda_4\cdot E_{2,2} + \lambda_5\cdot E_{2,3}\Big)\,P^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5, \\
& N = \lambda_1\cdot P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1} + \lambda_2\cdot P\,E_{1,2}\,P^{-1} + \lambda_3\cdot P\,E_{1,3}\,P^{-1} + \lambda_4\cdot P\,E_{2,2}\,P^{-1} + \lambda_5\cdot P\,E_{2,3}\,P^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & N \in \operatorname{Vect}\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } F = \operatorname{Vect}\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big).}$$

Commentaire

- Résumons le procédé mis en place lors de la question ***7***. On souhaite déterminer l'ensemble F des matrices qui commutent avec A (cet ensemble s'appelle le **commutant de** A). Pour ce faire, on commence par déterminer E, l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice triangulaire supérieure T (question ***7.a)***.
  Puis, en question ***7.b)***, on établit un lien entre E et F : $N \in F \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big) \in E$.
  Cela permet enfin de déterminer F en ***7.a)***.
- Cette question ***7*** illustre un procédé fréquent en mathématiques. Déterminer F de manière directe est difficile. Procéder comme en ***7.a)*** n'est pas judicieux. En effet, si l'on essaie de déterminer par équivalence les contraintes que la propriété $AN = NA$ impose sur les coefficients d'une matrice N quelconque, on obtient un système qui est difficile à résoudre. Il faut noter que la complexité de cette résolution provient de l'aspect de la matrice A. Déterminer le commutant d'une matrice diagonale est plutôt simple. On se pose donc la question de savoir si la matrice A admet un représentant sous forme diagonale. Plus formellement, on cherche s'il existe une base dans laquelle l'endomorphisme f est diagonalisable. Ici, on seulement réussi à exhibé une base dans laquelle la matrice représentative T de f est particulièrement simple ($T = I + R$). On peut donc déterminer le commutant de T. Et en déduire, par les étapes décrites dans le point précédent, le commutant de A.
- On retiendra cette idée générale : lorsqu'on cherche des propriétés sur f, il est souvent préférable d'utiliser la représentation de f la plus simple à manipuler. □

EML 2017 - endomorphismes de polynômes

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)\ P'$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Commentaire

L'énoncé prend partie de noter indifféremment P et $P(X)$, ce qui permet d'alléger les notations. En contrepartie, ce choix peut amener à des confusions sur les objets manipulés. Afin d'éviter ces confusions, on évitera, dans ce corrigé, d'utiliser l'abus de notation autorisé par l'énoncé.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Montrons que a est une application linéaire.
  Soit $(P_1, P_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl}
\big(a(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2)\big)(X) & = & \big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big)(X) - X\ \big(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2\big)'(X) \\
& = & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot P_2(X) - X\ \big(\lambda_1 \cdot P_1'(X) + \lambda_2 \cdot P_2'(X)\big) \\
& = & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot P_2(X) - \lambda_1 \cdot XP_1'(X) - \lambda_2 \cdot XP_2'(X) \\
& = & \lambda_1 \cdot (P_1(X) - XP_1'(X)) + \lambda_2 \cdot (P_2(X) - XP_2'(X)) \\
& = & \lambda_1 \cdot (a(P_1))(X) + \lambda_2 \cdot (a(P_2))(X) \\
& = & \big(\lambda_1 \cdot a(P_1) + \lambda_2 \cdot a(P_2)\big)(X)
\end{array}$$

  Et ainsi : $a(\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2) = \lambda_1 \cdot a(P_1) + \lambda_2 \cdot a(P_2)$.

- Montrons que $a(E) \subset E$. Autrement dit, montrons que pour tout $P \in E$, $a(P) \in E$.
  Soit $P \in E$. Alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. Donc :

$$\begin{array}{rcl}
(a(P))(X) & = & P(X) - XP'(X) \\
& = & \alpha + \beta X + \gamma X^2 - X(\beta + 2\gamma X) \\
& = & -\gamma X^2 + \alpha
\end{array}$$

  Ainsi, $a(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 : $a(P) \in E$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } a \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

2. a) Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Pour éviter les confusions, on notera $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad P_2(X) = X^2$$

- $\big(a(P_0)\big)(X) = P_0(X) - X \times P_0'(X) = 1 - 0 = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$a(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\big(a(P_1)\big) = P_1(X) - X \times P_1'(X) = X - X = 0$. On en déduit :

$$a(P_1) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\big(a(P_2)\big)(X) = P_2(X) - X \times P_2'(X) = X^2 - 2X^2 = -X^2 = -P_2(X)$. On en déduit :

$$a(P_2) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Déterminer le rang de la matrice A.

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2}$$

□

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\dim(\mathrm{Im}(a)) = \mathrm{rg}(A) = 2 \neq 3 = \dim(E)$.
  Donc $\mathrm{Im}(A) \neq E$. Ainsi l'endomorphisme a n'est pas surjectif.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } a \text{ n'est pas bijectif.}}$$

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim(\mathrm{Ker}(a)) & + & \mathrm{rg}(a) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

  D'où : $\dim(\mathrm{Ker}(a)) = 1$.

D'après la question précédente : $a(P_1) = 0$. Ainsi $P_1 \in \text{Ker}(a)$.
La famille (P_1) est une famille libre, car elle est constituée d'un polynôme non nul.
Comme $\text{Card}((P_1)) = 1 = \dim(\text{Ker}(a))$, on en déduit que (P_1) est une base de $\text{Ker}(a)$.

$$\boxed{\text{Ker}(a) = \text{Vect}\,(P_1)}$$

- Par caractérisation de l'image d'une application linéaire :

$$\text{Im}(a) = \text{Vect}\,(a(P_0),\ a(P_1),\ a(P_2)) = \text{Vect}\,(P_0,\ 0,\ -P_2) = \text{Vect}\,(P_0,\ P_2)$$

Ainsi :

× la famille (P_0, P_2) engendre $\text{Im}(a)$.

× $\text{Card}\big((P_0, P_2)\big) = 2 = \dim\big(\text{Im}(a)\big)$.

La famille (P_0, P_2) est donc une base de $\text{Im}(a)$.

$$\boxed{\text{Im}(a) = \text{Vect}\,(P_0, P_2)}$$

Commentaire

- On peut aussi utiliser le spectre de A pour déterminer si a est bijectif.
  Détaillons cette méthode.

  La matrice A est diagonale. Ainsi, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux et : $\text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Or, comme A est la matrice représentative de l'endomorphisme a dans la base $\mathscr{B}$:

  $$\text{Sp}(a) = \text{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$$

  Le réel 0 étant valeur propre de a, l'endomorphisme a n'est pas bijectif.

- Il est possible de déterminer $\text{Ker}(a)$ par le calcul. Détaillons cette méthode.

  Soit $P \in E$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2$.

  Ainsi $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et :

  $$P \in \text{Ker}(a) \ \Leftrightarrow\ a(P) = 0_E \ \Leftrightarrow\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & 0 & & = & 0 \\ & & -\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

  Donc :

  $$\begin{array}{rcl} \text{Ker}(a) & = & \{x \cdot P_0 + y \cdot P_1 + z \cdot P_2 \in E \mid x = 0 \text{ et } z = 0\} \\ & = & \{y \cdot P_1 \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect}\,(P_1) \end{array}$$

□

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

Démonstration.

- Notons $g : E \to E$ l'endomorphisme de E qui à tout $Q \in E$ associe $g(Q) = Q + Q' + Q''$.
  Il s'agit de démontrer que b est bijective, de réciproque g. Pour ce faire, on démontre :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad g \circ b = \mathrm{id}_E$$

- Soit $P \in E$.

$$\begin{array}{rcll}
(b \circ g)(P) & = & b\big(g(P)\big) & \\
 & = & b(P + P' + P'') & \\
 & = & b(P) + b(P') + b(P'') & \textit{(par linéarité de } b\textit{)} \\
 & = & (P - \cancel{P'}) + (\cancel{P'} - \cancel{P''}) + (\cancel{P''} - P''') & \\
 & = & P - P''' & \\
 & = & P & \textit{(}P''' = 0 \textit{ car } P \textit{ est un polynôme de degré au plus } 2\textit{)}
\end{array}$$

  On en déduit : $b \circ g = \mathrm{id}_E$.
  De même :

$$\begin{array}{rcl}
(g \circ b)(P) & = & g\big(P - P'\big) \\
 & = & (P - P') + (P - P')' + (P - P')'' \\
 & = & P - P' + P' - P'' + P'' - P''' \ = \ P - P''' \ = \ P
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les applications } g \text{ et } b \text{ sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.} \\ \text{On en déduit notamment : } \forall Q \in E,\ b^{-1}(Q) = g(Q) = Q + Q' + Q''.\end{array}}$$

Commentaire

- Rigoureusement, tant que l'on n'a pas démontré que b est bijective, on ne peut utiliser la notation b^{-1}. C'est pourquoi on introduit l'application g en début de démonstration.
- L'énoncé fournit explicitement l'endomorphisme g. Dans ce cas, pour démontrer que b est bijectif et que $b^{-1} = g$, il suffit de vérifier les égalités :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad g \circ b = \mathrm{id}_E$$

- L'espace vectoriel E étant de dimension finie, il est même possible de ne démontrer qu'une des deux égalités précédentes. Plus précisément, si b et g sont des endomorphismes d'un espace vectoriel **de dimension finie** E :

$$b \circ g = \mathrm{id}_E \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \text{ et } g \text{ sont bijectives,} \\ b^{-1} = g \ \text{ et } \ g^{-1} = b \end{array} \right.$$

  (la propriété réciproque est évidemment vérifiée)
- On peut énoncer un résultat similaire dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Plus précisément, si A et B sont des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$AB = I_n \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \text{ et } B \text{ sont inversibles,} \\ A^{-1} = B \ \text{ et } \ B^{-1} = A \end{array} \right.$$

□

5. a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

Démonstration.

- Comme B est la matrice représentative de b dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Sp}(b) \ = \ \mathrm{Sp}(B)$$

On commence donc par déterminer cette matrice B.

× $\big(b(P_0)\big)(X) = P_0(X) - P_0'(X) = 1 = P_0(X)$. On en déduit :

$$b(P_0) = 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_1)\big)(X) = P_1(X) - P_1'(X) = X - 1 = -P_0(X) + P_1(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× $\big(b(P_2)\big)(X) = P_2(X) - P_2'(X) = X^2 - 2X = -2\ P_1(X) + P_2(X)$. On en déduit :

$$b(P_1) = 0 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$$

Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice B est triangulaire supérieure.
  Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux et $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(b) = \mathrm{Sp}(B) = \{1\}.}$$

□

b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Démonstration.
Montrons par l'absurde que b n'est pas diagonalisable.
Supposons que b est diagonalisable, alors $B = \mathrm{Mat}_B(b)$ l'est aussi.
Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B telles que $B = PDP^{-1}$.
Or 1 est la seule valeur propre de B. Ainsi $D = I$ et :

$$B = PDP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que } b \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :
  - × montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,
  - × montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

□

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- $(c(P_0))(X) = 2X \times P_0(X) - (X^2-1) \times P_0'(X) = 2X = 0 \cdot P_0(X) + 2 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $(c(P_1))(X) = 2X \times P_1(X) - (X^2-1) \times P_1'(X) = X^2+1 = 1 \cdot P_0(X) + 0 \cdot P_1(X) + 1 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $(c(P_2))(X) = 2X \times P_2(X) - (X^2-1) \times P_2'(X) = 2X = 0 \cdot P_0(X) + 2 \cdot P_1(X) + 0 \cdot P_2(X)$

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

Démonstration.

$$\mathrm{rg}(c) = \mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

On en déduit $\dim(\mathrm{Im}(c)) = \mathrm{rg}(c) = 2 \neq 3 = \dim(E)$.
Donc : $\mathrm{Im}(c) \neq E$, ce qui implique que l'endomorphisme c n'est pas surjectif.

$$\boxed{\text{Ainsi l'endomorphisme } c \text{ n'est pas bijectif.}}$$

□

8. a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

Démonstration.

- Déterminons les valeurs propres de C.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  On cherche les réels λ tels que la matrice $C - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est-à-dire tels que $\text{rg}(C - \lambda I_3) < 3$.

$$\begin{aligned}
\text{rg}(C - \lambda\, I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 + \lambda L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda^2) L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & q(\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

  où $q(\lambda) = 2\lambda + \lambda(2 - \lambda^2) = \lambda(2 + (2 - \lambda^2)) = \lambda(4 - \lambda^2) = \lambda(2 - \lambda)(2 + \lambda)$.
  La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
  Elle est non inversible ssi l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\text{rg}(C - \lambda\, I_3) < 3 \;\Leftrightarrow\; q(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \{0, 2, -2\}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : Sp}(C) = \{-2, 0, 2\}.}$$

- Déterminons $E_0(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre 0.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_0(C) &\Leftrightarrow CX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} y & = & 0 \\ x & = & -z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E_0(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = 0 \text{ et } x = -z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

- Déterminons $E_2(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre 2.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
X \in E_2(C) &\iff (C - 2\, I_3)\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & 2z \end{array} \right. \\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & & & = & -2z \\ & & y & = & 2z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & z \\ y & = & 2z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
E_2(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = 2z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

- Déterminons $E_{-2}(C)$, le sous-espace propre de C associé à la valeur propre -2.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-2}(C) & \iff & (C + 2\,I_3)X = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\[2mm]
& \iff & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & -2z \end{array} \right. \\[2mm]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & 2z \\ & & y & = & -2z \end{array} \right. \\[2mm]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & z \\ y & = & -2z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(C) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = -2z \right\} \\[2mm]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \; = \; \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[2mm]
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

- En résumé :

  × $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

  × C admet 3 valeurs propres **distinctes** : -2, 0, 2.

  On en déduit que la matrice C est diagonalisable.
  Il existe donc une matrice $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible (R est la concaténation des vecteurs bases des sous-espaces propres de C), et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de C, telles que $C = RDR^{-1}$.

  $$\boxed{\text{En posant } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient bien : } C = RDR^{-1}.}$$

  □

b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Démonstration.

- D'après la question ***8.a)***, la matrice C est diagonalisable.
  Or c'est une matrice représentative de c dans la base $\mathscr{B}$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } c \text{ est diagonalisable.}}$$

- Une base de E constituée de vecteurs propres est alors la concaténation des bases des sous-espaces propres de c que l'on a déterminés à la question précédente.
  De plus :

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2),$$

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2),$$

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 \cdot P_0 - 2 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2)$$

  Donc :

  $$E_0(c) = \mathrm{Vect}\,(P_0 - P_2)\,, \qquad E_2(c) = \mathrm{Vect}\,(P_0 + 2P_1 + P_2)\,, \qquad E_{-2}(c) = \mathrm{Vect}\,(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Une base de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } c \text{ est alors} \\ (P_0 - 2 \cdot P_1 + P_2, P_0 - P_2, P_0 + 2 \cdot P_1 + P_2).\end{array}}$$

□

Partie IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E,\ f(P) = P'$.

Démonstration.
Soit $P \in E$.

$$\begin{array}{rcl}
(f(P))(X) & = & (b \circ a(P))(X) - (a \circ b(P))(X) \\
& = & b(P(X) - XP'(X)) - a(P(X) - P'(X)) \\
& = & (P(X) - XP'(X)) - (P(X) - XP'(X))' - \Big((P(X) - P'(X)) - X\ (P(X) - P'(X))'\Big) \\
& = & \cancel{P(X)} - XP'(X) - \Big(\cancel{P'(X)} - (\cancel{P'(X)} + XP''(X))\Big) \\
& & - \Big(\cancel{P(X)} - P'(X) - XP'(X) + XP''(X)\Big) \\
& = & -\cancel{XP'(X)} + \cancel{XP''(X)} + P'(X) + \cancel{XP'(X)} - \cancel{XP''(X)} \\
& = & P'(X)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in E,\ f(P) = P'.}$$

□

10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$.

Démonstration.
Soit $P \in E$.
Tout d'abord, d'après la question ***9*** : $f(P) = P'$.
De plus, comme P est un polynôme de degré au plus 2, on en déduit : $(f \circ f \circ f)(P) = P''' = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $P \in E$, on en déduit : $f \circ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
en passant à l'écriture matricielle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(E)}) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^3) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^3 = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(b \circ a - a \circ b))^3 = (BA - AB)^3$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (BA - AB)^3 = 0.}$$

□

EDHEC 2020 - matrices antisymétriques, endomorphisme de matrices

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En effet : ${}^t0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = -0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

(iii) Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$.

× Comme $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, M vérifie : ${}^tM = -M$.

× Comme $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, N vérifie : ${}^tN = -N$.

Démontrons : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) = -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)$) . On a :

$$\begin{aligned} {}^t\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) &= \lambda \cdot {}^tM + \mu \cdot {}^tN \\ &= \lambda \cdot (-M) + \mu \cdot (-N) \qquad \textit{(car } (M,N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2 \\ &= -\lambda \cdot M - \mu \cdot N \\ &= -\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big) \end{aligned}$$

On a bien : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$ □

On considère une matrice A fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) \ = \ ({}^tA)\, M + M\, A$$

2. a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer : $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t\big(f(M)\big) = -f(M)$).

$$\begin{aligned} {}^t\big(f(M)\big) &= {}^t\left(({}^tA)\, M + M\, A\right) \\ &= {}^t(({}^tA)M) + {}^t(M\,A) \qquad \textit{(par linéarité de la transposée)} \\ &= ({}^tM)\big({}^t({}^tA)\big) + ({}^tA)\,({}^tM) \\ &= (-M)A + ({}^tA)\,(-M) \qquad \textit{(car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\textit{)} \\ &= -MA - ({}^tA)\, M = -f(M) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$ □

b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire
  Soit $(M, N) \in \left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) & = & ({}^tA)\,(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) + (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)\,A \\ & = & \lambda \cdot ({}^tA)M + \mu \cdot ({}^tA)N + \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA \\ & = & \lambda \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) + \mu \cdot \big(({}^tA)M + MA\big) \\ & = & \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est bien une application linéaire.}}$$

- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
  D'après la question précédente, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien à valeurs dans } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).}$$

□

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Il existe donc $(a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9$ tel que : $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & {}^tM = -M \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -a \\ d & = & -b \\ g & = & -c \\ b & = & -d \\ e & = & -e \\ h & = & -f \\ c & = & -g \\ f & = & -h \\ i & = & -i \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ \middle|\ a = 0,\ d = -b,\ g = -c,\ e = 0,\ h = -f,\ i = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ b \cdot J + c \cdot K + f \cdot L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\,(J, K, L)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ains, } \mathscr{B} = (J, K, L) \text{ est bien une famille génératrice de } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

- On présente ici $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sous la forme d'un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Cette forme permet de pouvoir écrire $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Il est relativement fréquent dans les sujets d'avoir à étudier des ensembles paramétrés. La méthode illustrée ci-dessus possède un double avantage. En effet, l'écriture $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\,(J, K, L)$ permet de conclure :
  - × que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
  - × que la famille (J, K, L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- Ce dernier point est important pour exhiber une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  - × si la famille (J, K, L) est libre, c'est alors une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
  - × sinon, si la famille (J, K, L) est liée, on peut extraire de (J, K, L) une base $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. La famille $\mathcal{G}$ n'est autre que la famille (J, K, L) dans laquelle on a retiré tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de (J, K, L).

$\square$

b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot J + \lambda_2 \cdot K + \lambda \cdot L = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. $(*)$

$$\begin{aligned}
\text{Or :} \quad (*) &\iff \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \iff \{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } (J, K, L) \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est :
  - $\times$ génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ (d'après la question précédente).
  - $\times$ libre.

  On en déduit que c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3.}$$

□

4. a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

Démonstration.

- On a :
$$\begin{aligned} f(J) &= ({}^tA)\,J + J\,A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(J) = -J - L}$$

- On a :
$$\begin{aligned} f(K) &= ({}^tA)\,K + K\,A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

- On a :
$$\begin{aligned} f(L) &= ({}^tA)\,L + L\,A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(L) = -L}$$

□

b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a démontré précédemment que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et (J, K, L) est en une base. Par caractérisation de l'image d'une application linéaire, on a :

$$\begin{array}{rcll}
\text{Im}(f) & = & \text{Vect}\left(f(J), f(K), f(L)\right) & \\
& = & \text{Vect}\left(-J-L, 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}, -L\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \text{Vect}\left(-J-L, -L\right) & \\
& = & \text{Vect}\left(-J, -L\right) & \textit{(on met à jour le } 1^{er} \textit{ vecteur en lui ajoutant l'opposé du } 2^{ème}\textit{)} \\
& = & \text{Vect}\left(J, L\right) & \textit{(on met à jour les deux vecteurs en les multipliant tous les deux par } -1\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(J, L\right)}$$

- Ainsi la famille (J, L) :
  × engendre $\text{Im}(f)$,
  × est libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

  On en conclut que la famille (J, L) est une base de $\text{Im}(f)$.

$$\boxed{\text{On en déduit finalement : } \dim\left(\text{Im}(f)\right) = \text{Card}\left((J, L)\right) = 2.}$$

Commentaire

- Comme $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(-J-L, -L\right)$, la famille $(-J-L, -L)$ est génératrice de $\text{Im}(f)$. On aurait ainsi pu terminer la question avec cette famille. Cependant, c'est plutôt un bon réflexe que de simplifier la famille génératrice obtenue. Pour se faire, il est primordial de connaître précisément les opérations qui ne modifient pas l'espace vectoriel engendré par la famille étudiée.
- L'énoncé stipule que la base obtenue ne doit que contenir des matrices de $\mathscr{B}$. C'est donc certainement la forme (J, L) qui était attendue ici.
- Notons enfin que l'on pouvait démontrer le caractère libre en rappelant que (J, L) est une sous-famille de la famille (J, K, L) qui est libre en tant que base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

□

c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc}
\dim(E) & = & \dim\left(\text{Ker}(f)\right) & + & \dim\left(\text{Im}(f)\right) \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
3 & & & & 2
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim\left(\text{Ker}(f)\right) = 3 - 2 = 1.}$$

- De plus, d'après ce qui précède : $f(K) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{D'où : } K \in \text{Ker}(f).}$$

- Ainsi, la famille (K) est :
  - × une famille libre de $\text{Ker}(f)$, car constituée uniquement d'une matrice non nulle,
  - × telle que : $\text{Card}\big((K)\big) = 1 = \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$.

  On en déduit que la famille (K) est une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(K).}$$

□

5. a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.

Démonstration.

- D'après ce qui précède : $f(J) = (-1) \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L$.

  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- D'après ce qui précède : $f(K) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + 0 \cdot L$.

  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(K)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- D'après ce qui précède : $f(L) = 0 \cdot J + 0 \cdot K + (-1) \cdot L$.

  On en conclut : $\text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f(J)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F = \text{Mat}_{(J,K,L)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) En déduire les valeurs propres de f.

Démonstration.
La matrice F étant triangulaire (inférieure), ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. Ainsi : $\text{Sp}(F) = \{-1, 0\}$.

$$\boxed{\text{Comme } F = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\text{, on en conclut : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(F) = \{-1, 0\}.}$$

□

c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer le rang de $f + \text{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \text{rg}(f + \text{id}) & = & \text{rg}(F + I) & \textit{(car F et I sont les représentations matricielles dans la base $\mathscr{B}$ des endomorphismes f et id)} \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) & \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \; = \; 2 & \end{array}$$

La dernière égalité est vérifiée car la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre (constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires).

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{rg}(f + \mathrm{id}) = 2.}$$

- Comme $f + \mathrm{id}$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on a, d'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f + \mathrm{id})\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \dim\big(E_{-1}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})\big) = 3 - 2 = 1.}$$

- On a démontré précédemment : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0\}$. Or :

$$\dim\big(E_0(f)\big) + \dim\big(E_{-1}(f)\big) = 1 + 1 = 2 \neq \dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Dans cette dernière question, on démontre que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. Il n'existe donc pas de base dans laquelle la matrice représentant f est diagonale.
- Dans ce cas, on se rabat sur une propriété plus faible : existe-t-il une base dans laquelle la représentation matricielle de f serait triangulaire supérieure ? Cette propriété est beaucoup plus simple à obtenir, notamment si l'on accepte d'utiliser des matrices dont les coefficients sont complexes (hors de notre portée en ECE).
  On parle alors de **trigonaliser** (on dit aussi **triangulariser**) la matrice A.
- Considérons un espace vectoriel E de dimension finie.
  Si un endomorphisme $f : E \to E$ est triangularisable, comment le triangularise-t-on ?
  Notons λ_1, ..., λ_m les valeurs propres distinctes de f. On cherche alors une base de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et on considère la famille obtenue en concaténant toutes ces bases.
  Cette famille `N'EST PAS` une base de E. Si tel était le cas, on aurait formé une base de vecteurs prores et donc E serait diagonalisable.
  Par contre, cette famille est libre. On peut alors la compléter en une base de E.
  Sans entrer dans les détails, on peut faire en sorte (en choisissant correctement les vecteurs qu'on ajoute) que la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.
- C'est la méthode développée dans cet exercice, même si elle est un peu cachée. Ici, f a deux valeurs propres : 0 et -1. De plus :
  × le sous-espace propre $E_0(f)$ a pour base la famille (K).
  × le sous-espace propre $E_{-1}(f)$ a pour base la famille (L).
  En effet, comme $f(L) = -L$, on a : $L \in E_{-1}(f)$ et ainsi : $\mathrm{Vect}\,(L) \subset E_{-1}(f)$.
  On conclut : $\mathrm{Vect}\,(L) = E_{-1}(f)$ par égalité des dimensions de ces deux espaces vectoriels (puisqu'on a démontré : $\dim\big(E_{-1}(f)\big) = 1$).

  La famille (K, L) est une famille libre de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ car elle est constituée de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.
  On complète alors cette famille en une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ en lui adjoignant le vecteur J. La matrice représentative de f dans la base (J, K, L) obtenue est triangulaire (inférieure). □

ECRICOME 2015 - endomorphisme de matrices

On désigne par $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

3. Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On note $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

5. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de la matrice T.

7. La matrice T est-elle diagonalisable ?

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

8. Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :

$$\varphi_A(M) \; = \; \lambda M$$

Montrer par un raisonnement par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

9. Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.
On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.
Montrer que $\varphi_A(N) = \mu N$ et $\varphi_A(N') = \mu N'$.

HEC 2018 - images itérées d'un endomorphisme nilpotent, dénombrement (vraiment très dur à partir de la question 3)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

- On note $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ et $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.
- On pose $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et : $\forall j \in \mathbb{N},\ f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$: $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}}$

1. Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le spectre de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0_{\mathbb{R}}\}}$$

- Raisonnons par l'absurde. On suppose que la matrice M est diagonalisable.
  Alors il existe $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale contenant les valeurs propres de M telles que $M = PDP^{-1}$.
  Or $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. Donc :

$$M \ = \ PDP^{-1} \ = \ P\,0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}\,P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

  ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation ou d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

× montrer qu'une suite `N`'est `PAS` majorée,

× montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre `N`'est `PAS` diagonalisable.

□

b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{rg}(M) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}\right)$$

  La famille $\left(\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée de 2 vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{rg}(M) = 2.}$$

- Ensuite :

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{rg}(M^2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{rg}(M^2) = 1.}$$

□

c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

Démonstration.
On cherche à déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3$ tel que $P(X) = a\,X^3 + b\,X^2 + c\,X + d$ est un polynôme annulateur de M.
(insistons sur l'hypothèse $a \neq 0$: elle est nécessaire car on cherche les polynômes annulateurs de degré 3)

- On a déjà calculé M^2. Calculons maintenant M^3.

$$M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

- Ainsi, P est un polynôme annulateur de M si et seulement si :

$$\begin{aligned} & P(M) = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow \quad & a \cdot M^3 + b \cdot M^2 + c \cdot M + d \cdot I_4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow \quad & a \cdot 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow \quad & \{b = c = d = 0 \end{aligned}$$

- On obtient donc que l'ensemble des polynômes annulateurs de M de degré 3 est :

$$\{\, a \cdot X^3 + b \cdot X^2 + c \cdot X + d \mid a \in \mathbb{R}^* \ \text{ et } \ b = c = d = 0\} = \{a \cdot X^3 \mid a \in \mathbb{R}^*\}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \{a \cdot X^3 \mid a \in \mathbb{R}^*\} \text{ est l'ensemble des polynômes annulateurs de } M \text{ de degré égal à 3.}}$$

□

2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang :

$$F_j = \mathrm{Im}(f^j) \quad \text{et} \quad r_j = \dim(F_j)$$

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on note g_j la restriction de f à F_j, c'est à dire l'application linéaire de F_j dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $\forall x \in F_j,\ g_j(x) = f(x)$.

a) Calculer r_0 et r_n.

Démonstration.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- Tout d'abord : $r_0 = \mathrm{rg}(f^0) = \mathrm{rg}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.
  Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = I_n$. De plus : $\mathrm{rg}(I_n) = n$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } r_0 = n.}$$

- Ensuite, d'après l'énoncé : $r_n = \mathrm{rg}(f^n) = \mathrm{rg}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)})$.
  Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. De plus : $\mathrm{rg}(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}) = 0$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } r_n = 0.}$$

□

b) Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

(i) Déterminer le rang de g_j.

Démonstration.
Dans la suite, on note $f_{|F_j}$ la restriction de f à l'ensemble F_j.
Le but de la question est de déterminer : $\mathrm{rg}(g_j) = \dim(\mathrm{Im}(g_j))$.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Im}(g_j) \ = \ \mathrm{Im}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ f(F_j)$$

Commentaire

- Considérons une application f d'un ensemble E vers un ensemble F et notons $A \subset E$. Rappelons que $f(A)$, image de l'ensemble A par l'application f est définie par :

$$\begin{array}{rcl} f(A) & = & \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\} \\ & = & \{f(x) \in F \mid x \in E\} \end{array}$$

- Ici, comme f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$f(F_j) \ = \ \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in F_j, y = f(x)\} \ = \ \{f(x) \in \mathbb{R}^n \mid x \in F_j\}$$

- Ainsi, par définition de F_j : $f(F_j) \ = \ f\big(\mathrm{Im}(f^j)\big)$.
- Démontrons alors : $f\big(\mathrm{Im}(f^j)\big) \ = \ \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right)$.

$$\begin{array}{rcll} f\big(\mathrm{Im}\left(f^j\right)\big) & = & \{f(v) \in \mathbb{R}^n \mid v \in \mathrm{Im}\left(f^j\right)\} & \\ & = & \{f(v) \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{R}^n,\ v = f^j(u)\} & \textit{(par définition de } \mathrm{Im}\left(f^j\right)\textit{)} \\ & = & \{f\big(f^j(u)\big) \in \mathbb{R}^n \mid u \in \mathbb{R}^n\} & \\ & = & \{f^{j+1}(u) \in \mathbb{R}^n \mid u \in \mathbb{R}^n\} \ = \ \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right) & \end{array}$$

En combinant tous ces résultats, on obtient :

$$\mathrm{Im}(g_j) \ = \ \mathrm{Im}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ f(F_j) \ = \ f\big(\mathrm{Im}(f^j)\big) \ = \ \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right) \ = \ F_{j+1}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \mathrm{rg}(g_j) = \dim(\mathrm{Im}(g_j)) = \dim(F_{j+1}) = r_{j+1}.}$$

Commentaire

- Au vu de l'énoncé, il est difficile de comprendre le niveau de connaissance attendu sur la notion de restriction. La restriction d'une application f à un ensemble A est généralement introduite en première année lors du chapitre *Ensembles et applications*. Cependant, lorsque l'on se réfère au programme officiel ECE, on ne voit pas apparaître le terme *restriction* dans ce chapitre. Il convient donc de détailler certains points de la démonstration précédente.
- Commençons par définir la notion de restriction.
  On considère une application f d'un ensemble E vers un ensemble F.
  La **restriction** de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application de A dans F définie par :

$$f_{|A} \ : \ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

  Autrement dit, $f_{|A}$ est l'application définie par : $\forall x \in A,\ f_{|A}(x) \ = \ f(x)$.
- On a alors : $\boxed{\mathrm{Im}\,(f_{|A}) = f(A)}$ où $f(A)$ est l'image de l'ensemble A par l'application f :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Im}\,(f_{|A}) & = & \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f_{|A}(x)\} & \\ & = & \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\} & \textit{(par définition de } f_{|A}\textit{)} \\ & = & f(A) & \end{array}$$

□

(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

Démonstration.

- On applique le théorème du rang à l'application linéaire g_j (on rappelle : $g_j \in \mathscr{L}(F_j, \mathbb{R}^n)$).

$$\underset{\substack{\parallel \\ r_j}}{\dim(F_j)} \ = \ \dim(\mathrm{Ker}(g_j)) \ + \ \underset{\substack{\parallel \\ r_{j+1}}}{\mathrm{rg}(g_j)}$$

  On en déduit : $r_j - r_{j+1} \ = \ \dim(\mathrm{Ker}(g_j))$.
- Rappelons : $g_j \ = \ f_{|F_j}$. Montrons alors : $\mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.
  Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) & \Leftrightarrow & x \in F_j \ \texttt{ET} \ f_{|F_j}(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \ \texttt{ET} \ f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \ \texttt{ET} \ x \in \mathrm{Ker}(f) \\ & \Leftrightarrow & x \in F_j \cap \mathrm{Ker}(f) \end{array}$$

  On a bien : $\mathrm{Ker}\left(f_{|F_j}\right) \ = \ \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } r_j - r_{j+1} = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j).}$$

Commentaire

Cette question illustre une autre propriété classique sur les restrictions d'une application à un ensemble. Si on considère, comme dans la remarque précédente, une application linéaire f d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F et $A \subset E$, on pourra retenir :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f_{|A}) = f(A)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Ker}\,(f_{|A}) = \mathrm{Ker}(f) \cap A}$$

□

c) Établir les inégalités : $n \geqslant r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_{n-1} - r_n \geqslant 0$.

Démonstration.
Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

- On veut montrer : $r_j - r_{j+1} \geqslant r_{j+1} - r_{j+2}$.
  - Or, d'après la question précédente :
  $$r_j - r_{j+1} \geqslant r_{j+1} - r_{j+2} \ \Leftrightarrow\ \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1})$$
  - L'inégalité des dimensions peut être obtenue en démontrant :
  $$\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1} \subset \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$$
  Cette inclusion peut elle-même être obtenue en démontrant :
  $$F_{j+1} \subset F_j$$
  car il suffit alors de réaliser l'intersection, de part et d'autre, par $\mathrm{Ker}(f)$.
  - Démontrons : $F_{j+1} \subset F_j$.
  Par définition de F_j et F_{j+1}, il s'agit de démontrer : $\mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(f^j\right)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}\left(f^{j+1}\right)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :
  $$y \ = \ f^{j+1}(x) \ = \ f^j(f(x))$$
  En notant $z = f(x)$, on obtient $y = f^j(z) \in \mathrm{Im}(f^j)$.
  $$\boxed{\text{Finalement : } F_{j+1} \subset F_j.}$$
  - On obtient donc : $\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1} \ \subset \ \mathrm{Ker}(f) \cap F_j$.
  Puis : $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_{j+1}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap F_j)$.

  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } j \in [\![0, n-1]\!],\ r_{j+1} - r_{j+2} \leqslant r_j - r_{j+1}. \text{ Autrement dit :} \\ r_0 - r_1 \geqslant r_1 - r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_{n-1} - r_n\end{array}}$$

- D'après la question ***2.a)*** : $r_0 = n$.
  Or $r_1 = \dim(F_1) \geqslant 0$ car une dimension est un entier positif.
  $$\boxed{\text{On en déduit : } r_0 - r_1 \leqslant n.}$$
- Toujours d'après la question ***2.a)***, $r_n = 0$: $r_{n-1} - r_n = r_{n-1} - 0 \geqslant 0$.
  $$\boxed{r_{n-1} - r_n \geqslant 0}$$

□

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H, noté $\mathrm{Card}(H)$*, est le nombre de ses éléments.*
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers naturels tels que :
$$\sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$
c'est à dire : $P(k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k = k\}$.
On pose $p(k) = \mathrm{Card}\left(P(k)\right)$.

Commentaire

On ne peut noter $\mathrm{Card}\left(P(k)\right)$ que si l'ensemble $P(k)$ est fini. C'est le cas : si l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$ est vérifiée, alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x_i \in [\![0, k]\!]$ (s'il existe i_0 tel que $x_{i_0} > k$ alors $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i \geqslant i_0\ x_{i_0} > k$). Ainsi, $P(k) \subset [\![0, k]\!]^k$ et comme $[\![0, k]\!]^k$ est un ensemble fini (de cardinal $(k+1)^k$), $P(k)$ est aussi fini (de cardinal inférieur ou égal à $(k+1)^k$).

3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_i = \text{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}\right) \quad (*)$.

a) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $P(n)$.

Démonstration.
Tout d'abord, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in \mathbb{N}$ car x_i est le cardinal d'un ensemble.
Par définition de $P(n)$, il reste à démontrer l'égalité : $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i \ = \ n$.
Considérons alors la quantité $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1})$. Il y a deux manières de procéder à son calcul.

- Par télescopage :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \ = \ r_0 - r_n \ = \ n - 0 \ = \ n \qquad \textit{(d'après la question précédente)}$$

- Par sommation par paquets :

D'après la question précédente : $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $r_j - r_{j+1} \in [\![0, n]\!]$.
L'idée est alors de regrouper les écarts $r_j - r_{j+1}$ suivant leurs valeurs.
On note alors, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$: $I_i = \{j \in [\![0, n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \\
= \ & \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_0}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \ + \ \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_1}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \ + \ \ldots \ + \ \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_n}}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) \\
= \ & \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_0}}^{n-1} 0 \ + \ \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_1}}^{n-1} 1 \ + \ \ldots \ + \ \sum_{\substack{j=0 \\ j \in I_n}}^{n-1} n && \textit{(par définition des ensembles } I_i\textit{)} \\
= \ & 0 \times \text{Card}(I_0) \ + \ 1 \times \text{Card}(I_1) \ + \ \ldots \ + \ n \times \text{Card}(I_n) \\
= \ & 0 \ + \ 1 \times x_1 \ + \ \ldots \ + \ n \times x_n && \textit{(par définition des nombres } x_i\textit{)} \\
= \ & \sum_{i=0}^{n} i\ x_i
\end{aligned}$$

Les deux méthodes de calcul aboutissant évidemment au même résultat, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} i\ x_i \ = \ n$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (x_1, \ldots, x_n) \text{ est bien un élément de } P(n).}$$

Commentaire

Cette démonstration semble un peu sortie du chapeau. Pour comprendre sa provenance, il faut analyser de plus près la quantité $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i$. Par définition, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \text{Card}\left(\{j \in [\![0, n-1]\!] \mid r_j - r_{j+1} = i\}\right)$. Ainsi, x_i est le nombre d'indices $j \in [\![0, n-1]\!]$ pour lesquels l'écart $r_j - r_{j+1}$ vaut i. En calculant $i\ x_i$, on multiplie l'écart i par le nombre de fois pour lequel il est réalisé. Ainsi, en calculant la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} i\ x_i$, on obtient la mesure de tous les écarts $r_j - r_{j+1}$ pour j variant dans $[\![0, n-1]\!]$.
Ce qui revient à calculer : $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1})$.

□

b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

(i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Démonstration.

- Soit $j \in [\![0, 4]\!]$. Comme M est la matrice représentative de f dans la base canonique :

$$r_j \ = \ \text{rg}\left(f^j\right) \ = \ \text{rg}\left(M^j\right)$$

- D'après la question ***2.a)*** : $r_0 = 4$ et $r_4 = 0$.
  D'après les calculs en ***1.b)*** et ***1.c)*** :

$$r_1 = \text{rg}(M) = 2, \qquad r_2 = \text{rg}\left(M^2\right) = 1, \qquad r_3 = \text{rg}\left(M^3\right) = \text{rg}\left(0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}\right) = 0$$

Ainsi : $r_0 - r_1 = 2$, $r_1 - r_2 = 1$, $r_2 - r_3 = 1$ et $r_3 - r_4 = 0$.
Et $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

□

(ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

Démonstration.
Par définition : $P(4) \ = \ \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 = 4\}$.
Il s'agit donc de trouver les 4-uplets d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que :

$$x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 = 4$$

Deux cas se présentent.

- Si $x_4 = 1$ alors $x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 = 0$.
  Cette somme nulle étant constituée de nombres positifs, on en déduit :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

  Et ainsi, le seul 4-uplet (x_1, x_2, x_3, x_4) élément de $P(4)$ tel que $x_4 = 0$ est : $(0, 0, 0, 1)$.

- Si $x_4 \neq 1$ alors on a forcément $x_4 = 0$. Sinon, comme $x_4 \in \mathbb{N}$ on aurait $x_4 \geqslant 2$ et ainsi :

$$x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 \geqslant 4\ x_4 \geqslant 8 > 6$$

  ce qui est impossible.
  Deux nouveaux cas se présentent.
  × Si $x_3 = 1$ alors $x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 = x_1 + 2\ x_2 + 3 = 4$ donc $x_1 + 2\ x_2 = 1$.
  On a alors forcément $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$ (sinon cette somme dépasserait 2).
  Et ainsi, le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(1, 0, 1, 0)$.
  × Si $x_3 \neq 1$ alors $x_3 = 0$ sinon on aurait $x_3 \geqslant 2$ et $x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 \geqslant 3\ x_3 \geqslant 6 > 4$.
  Trois nouveaux cas se présentent :
  - Si $x_2 = 2$ alors $x_1 = 0$.
    Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(0, 2, 0, 0)$.
  - Si $x_2 = 1$ alors $x_1 = 2$.
    Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(2, 1, 0, 0)$.
  - Si $x_2 \notin \{1, 2\}$ alors $x_2 = 0$ sinon $x_2 \geqslant 3$ et $x_1 + 2\ x_2 + 3\ x_3 + 4\ x_4 \geqslant 2\ x_2 \geqslant 6 > 4$.
    Et le seul 4-uplet élément de $P(4)$ vérifiant toutes ces conditions est : $(4, 0, 0, 0)$.

Finalement, $P(4) = \{(0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (4, 0, 0, 0)\}$ et
$p(4) = \text{Card}(P(4)) = 5$.

□

(iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $(*)$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$:

$$r_0 = \text{rg}(f^0) = \text{rg}(\text{id}_{\mathbb{R}^4}) = 4$$

Il s'agit alors, pour chaque 4-uplet (x_1, x_2, x_3, x_4) de $P(4)$, d'exhiber un endomorphisme f ayant les caractéristiques de ce 4-uplet. Étudions tous les cas qui se présentent.

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{ccc} r_0 = 4 & \to & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 0 & \to & \text{rg}(f^1) = 0 \\ r_2 = 0 & \to & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \to & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  Comme $\text{rg}(f) = 0$ alors f est l'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. Cet endomorphisme réalise bien les conditions précisées.

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{ccc} r_0 = 4 & \to & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 1 & \to & \text{rg}(f^1) = 1 \\ r_2 = 0 & \to & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \to & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  On cherche donc un endomorphisme f de rang 1 tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. On peut (par exemple) proposer l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{ccc} r_0 = 4 & \to & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 2 & \to & \text{rg}(f^1) = 2 \\ r_2 = 0 & \to & \text{rg}(f^2) = 0 \\ r_3 = 0 & \to & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

  On cherche donc un endomorphisme f de rang 2 tel que $f^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$. On peut alors proposer l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 2 & \to & \text{rg}(f^1) = 2 \\ r_2 = 1 & \to & \text{rg}(f^2) = 1 \\ r_3 = 0 & \to & \text{rg}(f^3) = 0 \\ r_4 = 0 & \to & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

On cherche donc un endomorphisme f de rang 2 tel que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)}$ et $\text{rg}(f^2) = 1$. D'après la question ***1.***, on peut alors proposer l'endomorphisme fourni par l'énoncé, dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 0, 0)$. Ce 4-uplet est réalisé pour les valeurs de r_i suivantes :

$$\begin{array}{lcl} r_0 = 4 & \to & \text{rg}(f^0) = 4 \\ r_1 = 3 & \to & \text{rg}(f^1) = 3 \\ r_2 = 2 & \to & \text{rg}(f^2) = 2 \\ r_3 = 1 & \to & \text{rg}(f^3) = 1 \\ r_4 = 0 & \to & \text{rg}(f^4) = 0 \end{array}$$

On cherche donc un endomorphisme f dont le rang décroît de 1 à chaque fois nouvelle composition avec lui-même.

$$M = \text{Mat}_{bc}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, dans ce cas on a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4), \text{ il existe bien } f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4) \text{ vérifiant } (*).}$$

Commentaire

Cette dernière matrice (dont tous les coefficients sont nuls hormis sur la « surdiagonale » dont les coefficients sont tous des 1) est plutôt classique. Les puissances successives ont pour effet de décaler cette « surdiagonale » vers le haut.

□

4. Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant \ell\}$ et $q(\ell, k) = \text{Card}(Q(\ell, k))$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{array}{rcl} Q(1,k) & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 1\} \\ & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k \ \texttt{ ET } \ x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 1\} \end{array}$$

- Comme les éléments x_i sont des entiers naturels, l'inégalité $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 1$ n'est vérifiée que si au plus un élément x_{i_0} est non nul (égal alors à 1).
- Dans ce cas, on obtient $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = i_0$.

  L'égalité $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$ est alors vérifiée si et seulement si $i_0 = k$.

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} Q(1,k) & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-1} = 0 \ \texttt{ ET } \ x_k = 1\} \\ & = & \{(0, \ldots, 0, 1)\} \end{array}$$

$$\boxed{Q(1,k) = \{(0, \ldots, 0, 1)\}}$$ □

(ii) Pour tout entier $\ell \geqslant k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

Démonstration.
Soit $\ell \geqslant k$. On procède par double inclusion.

($\subset$) $Q(\ell, k) \subset P(k)$ par définition.

($\supset$) Soit $(x_1, \ldots, x_k) \in P(k)$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k$.
Or, comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: $x_i \leqslant i\ x_i$ on a, par sommation :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$

Et comme $k \leqslant \ell$, on obtient par transitivité : $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \leqslant \ell$.
On en déduit que $(x_1, \ldots, x_k)$ est un élément de $Q(\ell, k)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } Q(\ell, k) = P(k).}$$ □

b) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geqslant 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = \text{Card}\left(\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\}\right)$$

Démonstration.
Soit $(\ell, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k > \ell \geqslant 2$.

- Dans la suite, nous notons :

$$\begin{array}{rcl} R(\ell,k) & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\} \\ & = & \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum\limits_{i=1}^{k} i\ x_i = k \ \texttt{ ET } \ x_1 + \ldots + x_k = \ell\} \end{array}$$

- Par définition :

$$\begin{aligned} Q(\ell, k-\ell) &= \{(x_1,\dots,x_{k-\ell}) \in P(k-\ell) \mid x_1+\dots+x_{k-\ell} \leqslant \ell\} \\ &= \{(x_1,\dots,x_{k-\ell}) \in \mathbb{N}^{k-\ell} \mid \sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_i = k-\ell \ \texttt{ET} \ x_1+\dots+x_{k-\ell} \leqslant \ell\} \end{aligned}$$

Le but de la question est de démontrer : $\text{Card}\big(R(\ell,k)\big) = \text{Card}\big(Q(\ell,k-\ell)\big)$.
Visiblement, ces ensembles ne sont pas égaux ($R(\ell,k) \subset \mathbb{N}^k$ et $Q(\ell,k-\ell) \subset N^{k-\ell}$).
Ainsi, pour démontrer qu'ils ont même cardinal, il faut démontrer qu'il existe une bijection de $Q(\ell,k-\ell)$ sur $R(\ell,k)$. Exhibons cette bijection.

- Considérons tout d'abord un élément $(x_1,\dots,x_{k-\ell}) \in Q(\ell,k-\ell)$. Alors :

$$x_1+\dots+x_{k-\ell} \leqslant \ell$$

En ajoutant à cette somme son écart à ℓ, on obtient :

$$\left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + x_1+\dots+x_{k-\ell} \ = \ \ell$$

Notons alors :

$$\left|\begin{array}{rcl} y_1 &=& \ell - \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_i \\ y_2 &=& x_1 \\ \vdots && \vdots \\ y_{k-\ell+1} &=& x_{k-\ell} \\ \forall i \in [\![k-\ell+2,k]\!],\ y_i &=& 0 \end{array}\right.$$

Par définition des éléments y_i, on a les propriétés suivantes.

(1) Tout d'abord :

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \ = \ \left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + x_1+\dots+x_{k-\ell} + 0 \ = \ \ell$$

(2) Ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} i\ y_i &= y_1 + \left(\sum_{i=2}^{k-\ell+1} i\ y_i\right) + \cancel{\sum_{k-\ell+2}^{k} i\ y_i} && \textit{(rappelons que pour } i \geqslant k-\ell+2,\ y_i = 0\textit{)} \\ &= \left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + \sum_{i=2}^{k-\ell+1} i\ x_{i-1} && \textit{(par définition des } y_i\textit{)} \\ &= \left(\ell - \sum_{i=1}^{k-\ell} x_i\right) + \sum_{i=1}^{k-\ell} (i+1)\ x_i && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \ell + \sum_{i=1}^{k-\ell} \big((i+\cancel{1}) - \cancel{1}\big)\ x_i \\ &= \ell + \sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_i \ = \ \cancel{\ell} + (k - \cancel{\ell}) \ = \ k \end{aligned}$$

Ainsi, $(y_1,\dots,y_k) \in R(\ell,k)$. On a donc construit une application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi &:& Q(\ell,k-\ell) & \to & R(\ell,k) \\ && (x_1,\dots,x_{k-\ell}) & \mapsto & (y_1,\dots,y_k) = \left(\ell - \sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_i, x_1, \dots, x_{k-\ell}, 0, \dots, 0\right) \end{array}$$

- Inversement, considérons $(x_1, \dots, x_k) \in R(\ell, k)$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \ell \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k$$

On obtient, par différence : $\sum\limits_{i=2}^{k} (i-1)\ x_i = k - \ell$.
(cette somme commence à 2 car $(i-1)\ x_i = 0$ si $i = 1$)
Ainsi, par décalage d'indice : $\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\ x_{i+1} = k - \ell$, ce qu'on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_{i+1} + \sum_{i=k-\ell+1}^{k-1} i\ x_{i+1} = k - \ell$$

On déduit de cette égalité : $\forall i \in [\![k-\ell+1, k]\!],\ x_{i+1} = 0 \qquad (*)$
(s'il existe $i_0 \in [\![k-\ell+1, k]\!]$ tel que $x_{i_0+1} \neq 0$ alors $\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1} i\ x_{i+1} \geqslant i_0\ x_{i_0+1} \geqslant i_0 > k-\ell+1$)
Notons alors :

$$\left| \begin{array}{rcl} y_1 & = & x_2 \\ y_2 & = & x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ y_{k-\ell} & = & x_{k-\ell+1} \\ \forall i \in [\![k-\ell+2, k]\!],\ y_i & = & 0 \end{array} \right.$$

Par définition des y_i, on a les propriétés suivantes.
(1) Tout d'abord :

$$\sum_{i=1}^{k-\ell} i\ y_i = \sum_{i=1}^{k-\ell} i\ x_{i+1} = k - \ell$$

(2) Ensuite, comme $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \ell$ alors :

$$\begin{array}{rrcll} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=2}^{k-\ell+1} x_i\right) + \left(\sum\limits_{i=k-\ell+2}^{k} x_i\right) & = & \ell & \\ \text{donc} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} x_{i+1}\right) + \left(\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1} x_{i+1}\right) & = & \ell & \textit{(par décalage d'indice)} \\ \text{enfin} & x_1 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} y_i\right) + \left(\cancel{\sum\limits_{i=k-\ell+1}^{k-1}} x_{i+1}\right) & = & \ell & \textit{(d'après la proposition } (*)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{k-\ell} y_i = \ell - x_1 \leqslant \ell$.

Ainsi, $(y_1, \dots, y_{k-\ell}) \in Q(\ell, k-\ell)$. On a donc construit une application :

$$\begin{array}{rccl} \psi : & R(\ell, k) & \to & Q(\ell, k-\ell) \\ & (x_1, \dots, x_k) & \mapsto & (y_1, \dots, y_{k-\ell}) = (x_2, \dots, x_{k-\ell+1}) \end{array}$$

- On peut alors démontrer : $\boxed{\varphi \circ \psi \ = \ \mathrm{id}_{R(\ell,k)}}$

  En effet, si $(x_1, \ldots, x_k) \in R(\ell, k)$ alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(\psi(x_1, \ldots, x_k)) &= \varphi(x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}) \\
&= (\ell - (x_2 + \ldots + x_{k-\ell+1}), x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}, 0, \ldots, 0) \\
&= \left(\cancel{\ell} - \left(\cancel{\sum_{i=1}^{k-\ell+1}} x_i - x_1\right), x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}, 0, \ldots, 0\right) \qquad \textit{(car } \sum_{i=1}^{k-\ell+1} x_i = \ell\textit{)} \\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}, 0, \ldots, 0) \\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}, x_{k-\ell+2}, \ldots, x_k) \qquad \textit{(pour } i \in [\![k-\ell+2, k]\!], \textit{ on a : } x_i = 0\textit{)} \\
&= (x_1, \ldots, x_k)
\end{aligned}$$

- On démontre de même : $\boxed{\psi \circ \varphi \ = \ \mathrm{id}_{Q(\ell,k-\ell)}}$

On en déduit que φ et ψ sont des applications bijectives, réciproques l'une de l'autre. Ainsi, on a bien : $\mathrm{Card}\big(Q(\ell, k-\ell)\big) = \mathrm{Card}\big(R(\ell, k)\big)$, ce qui était l'objectif de la question.

Commentaire

- Dans la démonstration, on a explicité φ, bijection entre $Q(\ell, k-\ell)$ et $R(\ell, k)$ ainsi que sa bijection réciproque ψ. Expliciter ses deux applications permet de bien comprendre les mécanismes en jeu. Cependant, on pouvait présenter les choses différemment en exhibant seulement l'une des ces deux applications et en démontrant qu'elle réalise une bijection (de $Q(\ell, k-\ell)$ sur $R(\ell, k)$ ou inversement).

Par ailleurs, on est en droit de s'interroger sur la pertinence d'une telle question.

- Notons tout d'abord que la notion de dénombrement est souvent abordée lors du chapitre de première année *Probabilités sur un univers fini* et particulièrement lors de l'étude des coefficients binomiaux. Cependant, le terme « dénombrement » n'apparaît pas dans le programme officiel. La notion de cardinal (et la notation associée Card) d'un ensemble fini est elle aussi absente du programme officiel.
- Si chaque étape de la démonstration est à portée d'un bon élève de classe ECE, la prise d'initiative est beaucoup trop importante pour espérer qu'un élève en vienne à bout. Un découpage en sous-questions aurait permis de rendre cette question accessible, au moins en partie. Ce n'est cependant pas le choix fait dans l'énoncé. Cette question n'a donc pas le rôle discriminant qu'ont généralement les questions de concours : classer les élèves selon s'ils ont traité de manière satisfaisante ou non la question.

La présence d'une telle question permet de comprendre la stratégie à adopter lors des concours :

- il est essentiel de savoir repérer les questions les plus difficiles. Elles permettent de discriminer les candidats puisqu'il faut avoir du recul pour juger du niveau d'une question.
- il faut aborder ces questions en ayant en tête que le correcteur sera plus indulgent pour les candidats qui s'y aventurent. Cependant, il ne faut pas perdre du temps à essayer de les traiter jusqu'au bout : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à hauteur du temps investi pour traiter une telle question.

Il ne faut donc pas hésiter à passer les questions les plus difficiles et aller chercher les points où ils sont, à savoir sur les questions plus abordables du sujet. □

c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell,k) = q(\ell-1,k) + q(\ell,k-\ell)$.

Démonstration.
Soit k entier tel que $k > \ell$.

- Rappelons tout d'abord :

$$Q(\ell,k) \;=\; \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1+\dots+x_k \leqslant \ell\}$$

- Si u est un entier naturel, alors :

$$\begin{aligned} u \leqslant \ell \ &\Leftrightarrow\ u = \ell \quad \texttt{OU} \quad u < \ell \\ &\Leftrightarrow\ u = \ell \quad \texttt{OU} \quad u \leqslant \ell - 1 \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} Q(\ell,k) \ &= \quad \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1+\dots+x_k = \ell\} \\ &\quad \cup \ \{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} i\ x_i = k \quad \texttt{ET} \quad x_1+\dots+x_k \leqslant \ell-1\} \\ &= \ R(\ell,k) \quad \cup \quad Q(\ell-1,k) \end{aligned}$$

Ces deux ensembles étant disjoints, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\big(Q(\ell,k)\big) \ &= \ \mathrm{Card}\big(R(\ell,k)\big) \ + \ \mathrm{Card}\big(Q(\ell-1,k)\big) \\ &= \ q(\ell,k-\ell) \ + \ q(\ell-1,k) \qquad \textit{(d'après la question précédente avec } k > \ell \geqslant 2\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k > \ell,\ \ q(\ell,k) = q(\ell-1,k) + q(\ell,k-\ell).}$$

□

(ii) Que vaut $q(\ell,\ell) - q(\ell-1,\ell)$?

Démonstration.

- On reprend la démonstration précédente :

$$\begin{aligned} Q(\ell,\ell) \ &= \quad \{(x_1,\dots,x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1+\dots+x_\ell = \ell\} \\ &\quad \cup \ \{(x_1,\dots,x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1+\dots+x_\ell \leqslant \ell-1\} \end{aligned}$$

Le deuxième ensemble n'est autre que $Q(\ell-1,\ell)$.

- Intéressons-nous au premier ensemble.
Soit $(x_1,\dots,x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell$ et $x_1+\dots+x_\ell = \ell$. Alors, par différence :

$$\sum_{i=2}^{\ell} (i-1)\ x_i = 0 \qquad \textit{(la somme commence à } 2 \textit{ car } i-1 = 0 \textit{ lorsque } i = 1\textit{)}$$

Cette somme nulle étant constituée de nombres positifs, on en déduit :

$$x_2 = \dots = x_\ell = 0$$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell$, on obtient $x_1 = \ell$. On en déduit :

$$\{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} i\ x_i = \ell \quad \texttt{ET} \quad x_1 + \ldots + x_\ell = \ell\} \ = \ \{(\ell, 0, \dots, 0)\}$$

Comme $(\ell, 0, \dots, 0)$ n'est pas un élément de $Q(\ell-1, \ell)$ (car $\ell + 0 + \ldots + 0 = \ell > \ell - 1$), on a écrit $Q(\ell, \ell)$ comme réunion de deux ensembles disjoints.

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcccc} \text{Card}\big(Q(\ell,\ell)\big) & = & \text{Card}\big(Q(\ell-1,\ell)\big) & + & \text{Card}\big(\{(\ell,0,\dots,0)\}\big) \\ & = & q(\ell-1,\ell) & + & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } q(\ell,\ell) - q(\ell-1,\ell) = 1.}$$

□

5. La fonction **Python** suivante dont le script est incomplet (lignes 6 et 8), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(\ell, k)$.

```
1  def qmatrix(n):
2      q = np.ones([n,n])
3      for L in range(1,n):
4          for K in range(1,n):
5              if K < L :
6                  q[L,K] = ................
7              elif K==L :
8                  q[L,K] = ..............
9              else :
10                 q[L,K] = q[L-1,K] + q[L,K-(L+1)]
11     return q
```

Commentaire

Dans le sujet original, l'indentation était légèrement différente, notamment en ce qui concerne les structures conditionnelles (pas de saut de ligne après les `then` et `else`). On présente ici le programme avec une indentation plus classique qui correspond à la présentation retenue dans les autres épreuves.

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)
    1.     1.     1.     1.     1.     1.     1.     1.     1.
    1.     2.     2.     3.     3.     4.     4.     5.     5.
    1.     2.     3.     4.     5.     7.     8.    10.    12.
    1.     2.     3.     5.     6.     9.    11.    15.    18.
    1.     2.     3.     5.     7.    10.    13.    18.    23.
    1.     2.     3.     5.     7.    11.    14.    20.    26.
    1.     2.     3.     5.     7.    11.    15.    21.    28.
    1.     2.     3.     5.     7.    11.    15.    22.    29.
    1.     2.     3.     5.     7.    11.    15.    22.    30.
```

a) Compléter les lignes 6 et 8 du script de la fonction `qmatrix`.

Démonstration.
Le but de cette question est d'obtenir la matrice $\big(q(\ell,k)\big)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$.
Pour ce faire, il faut se servir des résultats précédents.

- D'après la question ***4.a)(i)***, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $q(1,k) = 1$.

  $\boxed{\text{On en déduit que la première ligne de la matrice recherchée ne contient que des 1.}}$

- D'après la question ***4.a)(ii)***, pour tout entier $\ell \geqslant k$, $q(\ell,k) = p(k) = q(k,k)$. Cette propriété est notamment vérifiée pour $k = 1$. Ainsi :

  $$\forall \ell \in [\![1,n]\!],\ q(\ell,1) = q(1,1) = 1$$

  $\boxed{\text{On en déduit que la première colonne de la matrice recherchée ne contient que des 1.}}$

- La stratégie du programme consiste à créer initialement une matrice carrée d'ordre `n` remplie de 1 et stockée dans une variable `q`.

```
2        q = ones(n, n)
```

  La première ligne et première colonne de cette matrice est, de fait, constituée de 1.
  Le reste du programme consiste à remplir cette matrice ligne par ligne (de la $2^{\text{ème}}$ à la $n^{\text{ème}}$).
  D'où la présence de la structure itérative suivante :

```
3        for L = 2:n
```

- La ligne ℓ de la matrice est mise à jour en procédant comme suit.

  (1) On met à jour les coefficients à gauche du coefficient diagonal. Autrement dit, les valeurs $q(\ell,k)$ pour $k < \ell$. Pour ce faire, on se sert de nouveau du résultat de la question ***4.a)(ii)***, qui stipule que pour $k < \ell$: $q(\ell,k) = p(k) = q(k,k)$. Ce qui se traduit comme suit :

```
4            for K = 2:n
5                if (K<L) then
6                    q(L,K) = q(K,K)
```

  (le coefficient en position (ℓ,k) est donné par la valeur du coefficient diagonal situé dans la même colonne)

  (2) On met alors à jour le coefficient diagonal. Pour ce faire, on se sert du résultat de la question ***4.c)(ii)***, qui stipule que pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$: $q(\ell,\ell) = 1 + q(\ell-1,\ell)$.
  Ce qui se traduit comme suit :

```
7                elseif (K==L) then
8                    q(L,K) = 1 + q(L-1,L)
```

  (le coefficient en position (ℓ,ℓ) est donné par la valeur du coefficient directement situé au-dessus auquel on ajoute 1)

  (3) On met alors à jour les coefficients à droite du coefficient diagonal.
  Pour ce faire, on se sert du résultat de la question ***4.c)(i)***, qui stipule que pour tout $k > \ell$:
  $q(\ell,k) = q(\ell-1,k) + q(\ell,k-\ell)$. Ce qui se traduit comme suit :

```
9                else
10                   q(L,K) = q(L-1,K) + q(L,K-L)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

b) Donner un script **Python** permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

Démonstration.

- D'après la question ***4.a)(ii)***, on a, pour tout $\ell \geqslant k$: $Q(\ell, k) = P(k)$.
  On a notamment : $Q(n,n) \ = \ P(n)$. Et ainsi :
  $$p(n) \ = \ q(n,n)$$
- Ainsi, $p(n)$ est le coefficient en position (n,n) de la matrice $\big(q(\ell,k)\big)_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}}$.
  Pour obtenir ce coefficient on écrit un programme :
  (1) qui demande à l'utilisateur d'entrer au clavier une valeur pour n et la stocke dans une variable `n`.
  (2) qui génère la matrice `q` à l'aide de la fonction de la question précédente.
  (3) qui affiche la valeur contenu dans la variable `n`.
  On obtient le programme **Python** suivant :

```
n = int(input('Entrez une valeur entière non nulle n'))
q = qmatrix(n)
print(q[n,n])
```

□

c) Conjecturer une formule générale pour $q(2,k)$ applicable à tout entier $k \geqslant 1$, puis la démontrer.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. Afin de conjecturer une formule pour $q(2,k)$, on place en regard la valeur de k et les coefficients de la $2^{\text{ème}}$ ligne de la matrice fournie dans l'énoncé.

Valeur de k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur de $q(2,k)$	1	2	2	3	3	4	4	5	5

La parité de k semble jouer un rôle dans la valeur de $q(2,k)$. Plus précisément :

× si k est pair alors on peut conjecturer :
$$q(2,k) \ = \ \frac{k}{2} + 1$$
(si $k=2$, $\frac{k}{2}+1 = 2$; si $k=4$, $\frac{k}{2}+1=3$; si $k=6$, $\frac{k}{2}+1=4$ ...)

× si k est impair alors on peut conjecturer :
$$q(2,k) \ = \ \frac{k-1}{2} + 1$$
(si $k=1$, $\frac{k-1}{2}+1=1$; si $k=3$, $\frac{k-1}{2}+1=2$; si $k=5$, $\frac{k-1}{2}+1=3$ ...)

Démontrons par récurrence double : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k) : q(2,k) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k}{2}+1 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k-1}{2}+1 & \text{si } k \text{ impair} \end{array} \right.$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part, d'après la question ***4.a)(ii)*** : $q(2,1) = q(1,1) = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{1-1}{2}+1 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

- D'une part, d'après la question ***4.c)(ii)*** : $q(2,2) = 1 + q(1,2) = 1+1 = 2$.
- D'autre part : $\dfrac{2}{2}+1 = 2$.

D'où $\mathcal{P}(2)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k{+}1)$, et démontrons $\mathcal{P}(k{+}2)$ $\left(\textit{i.e.}\ q(2,k+2) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k+2}{2}+1 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k+1}{2}+1 & \text{si } k \text{ impair} \end{array} \right. \right)$.

Comme $k \in \mathbb{N}^*$, $k+2 > 2$. Ainsi, d'après la question ***4.c)(i)*** :

$$\begin{array}{rcccc} q(2,k+2) & = & q(1,k+2) & + & q(2,k) \\ & = & 1 & + & q(2,k) \end{array}$$

Deux cas se présentent :

× si k pair alors $q(2,k) = \frac{k}{2}+1$ et :

$$q(2,k+2) \ = \ 1 + \frac{k}{2}+1 \ = \ \frac{k+2}{2}+1$$

× si k impair alors $q(2,k) = \frac{k-1}{2}+1$ et :

$$q(2,k+2) \ = \ 1 + \frac{k-1}{2}+1 \ = \ \frac{k+1}{2}+1$$

D'où $\mathcal{P}(k+2)$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par principe de récurrence double : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k).}$$

Commentaire

- La valeur de $q(2,k)$ change tous les 2 rangs. Il est donc assez naturel d'utiliser une récurrence double pour démontrer la conjecture.
- On aurait pu présenter la conjecture à l'aide de la partie entière par défaut $\lfloor . \rfloor$. Par exemple :

$$q(2,k) \ = \ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$$

On a fait le choix dans la démonstration de ne pas introduire cet opérateur afin de faciliter les manipulations algébriques.

□

ESSEC I 2010 - Ensemble de matrices vérifiant une propriété, matrices nilpotentes, noyaux itérés

Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.

- Soit T une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } T & \Leftrightarrow T - \lambda \cdot I_n \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow \text{rg}(T - \lambda \cdot I_n) < n \end{aligned}$$

Or :

$$\text{rg}(T-\lambda \cdot I_n) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 - \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n - \lambda \end{pmatrix} \right)$$

Comme $T - \lambda \cdot I_n$ est triangulaire, alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(T - \lambda \cdot I_n) < n & \Leftrightarrow \text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux de } T - \lambda \cdot I_n \text{ est nul} \\ & \Leftrightarrow \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que : } \alpha_i - \lambda = 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $\text{Sp}(T) = \{\alpha_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$.
Autrement dit, les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux (propriété (Δ_1)) et seulement ses coefficients diagonaux (propriété (Δ_2)).

- On réalise la même démonstration dans le cas où la matrice T est triangulaire inférieure.

$$\boxed{\text{Les matrices triangulaires de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ appartiennent à } \mathcal{D}_n.}$$

Commentaire

- Dans le programme officiel, on peut lire « Valeurs propres d'une matrice triangulaire ». L'énoncé commence donc par une démonstration de cours.
- Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{rg}({}^tM) = \text{rg}(M)$.
  Et, par linéarité de la transposition : ${}^t(M - \lambda I_n) = {}^tM - {}^t(\lambda I_n) = {}^tM - \lambda I_n$.
  En combinant ces deux propriétés, on obtient que :

$$\begin{aligned} M - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} &\Leftrightarrow \text{rg}(M - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow \text{rg}({}^t(M - \lambda I_n)) < n \\ &\Leftrightarrow \text{rg}({}^tM - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow {}^tM - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

  Ainsi, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\text{Sp}(M) = \text{Sp}({}^tM)$.
  Cette remarque permet d'expliciter la deuxième partie de la démonstration : une matrice triangulaire inférieure a même spectre que sa transposée (qui est triangulaire supérieure).
- Au passage, on peut démontrer que toute matrice M est semblable à sa transposée (un peu technique avec le programme de ECE). Ce qui permet d'affirmer que :

$$M \text{ est diagonalisable} \ \Leftrightarrow \ {}^tM \text{ est diagonalisable}$$

  mais on s'écarte du sujet initial. □

2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha\, I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{D}_n$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \beta \text{ est valeur propre de } M + \alpha\, I_n &\Leftrightarrow (M + \alpha\, I_n) - \beta\, I_n = M - (\beta - \alpha)\, I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \beta - \alpha \text{ est une valeur propre de } M \\ &\Leftrightarrow \beta - \alpha \text{ est un coefficient diagonal de } M \qquad \textit{(car } M \in \mathcal{D}_n) \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \beta - \alpha = m_{i,i} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } i \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \beta = m_{i,i} + \alpha \\ &\Leftrightarrow \beta \text{ est un coefficient diagonal de } M + \alpha \cdot I_3 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de $M + \alpha\, I_n$ sont exactement ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Si } M \in \mathcal{D}_n \text{ alors } M + \alpha\, I_n \in \mathcal{D}_n.}$$

□

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

Démonstration.

- La matrice K_n n'est pas inversible. En effet :

$$\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 < n$$

(on rappelle : $n \geqslant 2$)

- Ainsi, 0 est valeur propre de K_n et la propriété (Δ_2) n'est pas vérifiée par K_n.

$$\boxed{\text{On en déduit : } K_n \notin \mathcal{D}_n.}$$

Commentaire

- Ici, on démontre que K_n n'est pas inversible par un calcul de rang. On aurait aussi pu invoquer le fait que K_n possède 2 colonnes (ou 2 lignes) égales (ou simplement colinéaires). Un tel argument sera accepté au concours.
- On pouvait aussi remarquer :

$$K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, n $(\neq 1)$ est valeur propre de K_n et n'est pas un coefficient diagonale de K_n.

□

b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Démonstration.

- Étudions le cas $n = 2$.
  On pose : $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  - × Comme ces deux matrices sont triangulaires, d'après la question ***1.*** : $A_2 \in \mathcal{D}_2$ et $B_2 \in \mathcal{D}_2$.
  - × Or : $A_2 + B_2 = K_2$. Ainsi, d'après ***3.a)*** : $A_2 + B_2 \notin \mathcal{D}_2$.
    On en déduit que $\mathcal{D}_2$ n'est pas stable par la loi $+$.
    Ainsi $\mathcal{D}_2$ n'est pas un espace vectoriel.
- Généralisons cette propriété au cas où n est quelconque.
  On pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

× Comme ces deux matrices sont triangulaires, d'après la question ***1.*** : $A_n \in \mathcal{D}_n$ et $B_n \in \mathcal{D}_n$.

× Or : $A_n + B_n = K_n$. Ainsi, d'après ***3.a)*** : $A_n + B_n \notin \mathcal{D}_n$.

On en déduit que $\mathcal{D}_n$ n'est pas stable par la loi $+$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathcal{D}_n \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Commentaire

Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on recontre les questions :

× « L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E ? »

× « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »

× « La v.a.r. X admet une variance ? »

× « La matrice A est-elle diagonalisable ? »

× « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

□

4. a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

Démonstration.

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est carrée d'ordre 2.

Elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or :

$$\det(M) \;=\; \det\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}\right) \;=\; 0 \times z - y \times x = xy$$

$$\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } xy \neq 0 \text{ } i.e. \text{ si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.}$$

□

b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Soit $N = \begin{pmatrix} s & x \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$.

- Alors $N - s\,I_2 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & t-s \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$ d'après la question ***2.***.
- Comme $N_2 - s\,I_2 \in \mathcal{D}_2$, en particulier, $N - s\,I_2$ vérifie (Δ_1). On en déduit que 0 est valeur propre de $N - s\,I_2$. D'où $N - s\,I_2$ n'est pas inversible.
- D'après la question précédente, on en déduit que $x = 0$ ou que $y = 0$.

  × Si $x = 0$, alors $N = \begin{pmatrix} s & 0 \\ y & t \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

  × Si $y = 0$, alors $N = \begin{pmatrix} s & x \\ 0 & t \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

  Dans tous les cas, N est bien triangulaire.

$$\boxed{\text{On en conclut que toute matrice de } \mathcal{D}_2 \text{ est triangulaire.}}$$

□

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{3, 2, 4\}$.

- Démontrons que 3 est valeur propre de A.

$$\mathrm{rg}(A - 3\,I_3) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite possède deux colonnes égales : C_2 et C_3. Elle n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{3 est valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ (ou des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ) par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$. Ici on a $\lambda = 3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_3(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 3\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, et qu'on choisit $x = 0$, il suffit de prendre $y = -z$ pour obtenir le vecteur nul.
En prenant (par exemple) $z = 1$, on obtient : $y = -1$.

On obtient ainsi : $E_3(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Démontrons que 2 est valeur propre de A.

$$\mathrm{rg}(A - 2\,I_3) \;=\; \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

La réduite possède deux colonnes égales : C_1 et C_2. Elle n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{2 est valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Comme dans la remarque précédente, on peut déterminer des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 2 par lecture de la matrice $A - 2\,I_3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_2(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 2\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il suffit de prendre (par exemple) : $x = -1$, $y = 1$ et $z = 0$. On obtient ainsi : $E_2(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

- Démontrons que 4 est valeur propre de A.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - 4\,I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La réduite possède deux lignes proportionnelles : $L_2 = -L_3$. La matrice $A - 4\,I_3$ n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\text{4 est bien valeur propre de } A.}$$

Commentaire

Comme dans la remarque précédente, on peut déterminer des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 4 par lecture de la matrice $A - 4\,I_3$. On cherche donc les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_4(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - 4\,I_3)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3 \\ &= x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de cette combinaison linéaire, il suffit de prendre (par exemple) : $x = 1$, $y = -1$ et $z = 2$. On obtient ainsi : $E_4(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

- On a démontré : $\{3,2,4\} \subset \mathrm{Sp}(A)$.
  Comme de plus, la matrice A est carrée d'ordre 3, elle ne peut avoir plus de 3 valeurs propres.
  On en déduit : $\mathrm{Sp}(A) = \{3,2,4\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } A \in \mathcal{D}_3.}$$

- On obtient :
  × A possède 3 valeurs propres **distinctes**,
  × $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Les valeurs propres « possibles » de la matrice A peuvent se déduire de l'énoncé. C'est un cas fréquent. Il apparaît notamment lorsque l'on dispose d'un polynôme annulateur P : les racines de P sont les seules valeurs propres « possibles » de A. Cela signifie :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$$

  mais il reste à vérifier quelles racines de P sont vraiment des valeurs propres de A.
- Dans ce cas de figure, au lieu de chercher les valeurs λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible, il est préférable de déterminer si $A - \lambda I$ est inversible pour les valeurs de λ fournies (3, 2 et 4).
- On rappelle que la recherche des valeurs propres λ de A grâce à l'étude de $\mathrm{rg}(A - \lambda I)$ (dans le cas général où $\lambda \in \mathbb{R}$) est à réserver à la résolution d'exercices où l'on ne possède aucune information sur les valeurs propres de A et où l'on demande de déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
- Dans la question, il n'est pas demandé de déterminer $E_3(A)$, $E_2(A)$ et $E_4(A)$.
  On peut cependant affirmer, après les études effectuées dans les remarques précédentes :

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \qquad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

  En effet :
  × l'espace propre associé à une valeur propre λ est de dimension 1 au minimum. Comme de plus A est une matrice (carrée) d'ordre 3, la somme des dimensions des espaces propres est d'au plus 3. On en déduit :

$$\dim(E_3(A)) = \dim(E_2(A)) = \dim(E_4(A)) = 1$$

  × Ainsi :

$$E_3(A) \supset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \dim\big(E_3(A)\big) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right)$$

  D'où : $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On raisonne de même pour les autres sous-espaces propres.

□

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Déterminons le spectre de $M(t)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } M(t) & \Leftrightarrow & M(t) - \lambda\, I_3 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{rg}\big(M(t) - \lambda\, I_3\big) < 3 \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\big(M(t) - \lambda\, I_3\big) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 3-\lambda & 1 & 1+t \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)\, L_1}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & -2+\lambda & 1+t-(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure).
Elle est donc inversible si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}\big(M(t) - \lambda\, I_3\big) & \Leftrightarrow & 2-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ -(3-\lambda)\,(4+2t-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda = 2 \ \texttt{OU} \ \lambda = 3 \ \texttt{OU} \ \lambda = 4+2t \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}\big(M(t)\big) = \{2, 3, 4+2\,t\}.}$$

- Or, les coefficients diagonaux de $M(t)$ sont exactement les valeurs 2, 3, $4+2t$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \mathbb{R},\ M(t) \in \mathcal{D}_3.}$$

Commentaire

- Il est `INTERDIT` de réaliser l'opération $L_3 \leftarrow (3-\lambda)\, L_3$ ou $L_3 \leftarrow (3-\lambda)\, L_3 - L_1$ en début de calcul. En effet, si $\lambda = 3$, réaliser de telles opérations ($L_3 \leftarrow 0$ ou $L_3 \leftarrow -L_1$) reviennent à supprimer l'information contenue dans la ligne L_3.
De telles opérations ne sont valides qu'à la condition $\lambda \neq 3$. Il faudrait alors rédiger par disjonction de cas ce qui s'avère inutilement compliqué.
- Par contre, l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)\, L_1$ est tout à fait légitime. Si $\lambda = 3$, elle consiste simplement à effectuer $L_3 \leftarrow L_3$ et ne provoque donc pas de perte d'information.

□

b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Démonstration.
On procède par disjonction de cas.

- Si $4+2t \neq 2$ (*i.e.* $t \neq -1$) **et** $4+2t \neq 3$ (*i.e.* $t \neq -\frac{1}{2}$), alors :
  - × $M(t)$ admet trois valeurs propres **distinctes**,
  - × $M(t) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

  La matrice $M(t)$ est donc diagonalisable.

  $$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, \tfrac{1}{2}\}, \text{ la matrice } M(t) \text{ est diagonalisable.}}$$

- Si $4+2t = 2$ (*i.e.* $t = -1$) **ou** $4+2t = 3$ (*i.e.* $t = -\frac{1}{2}$) :
  (c'est le cas contraire)

× Si $t = -1$: alors $\text{Sp}\big(M(-1)\big) = \{2, 3\}$.

- Déterminons $E_2\big(M(-1)\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-1) - 2\,I_3\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2\big(M(-1)\big) & \Leftrightarrow & \big(M(-1) - 2\,I_3\big)\,X = 0 \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \underset{}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2mm]
& \Leftrightarrow & \left\{ \; x \; = \; -y \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(M(-1)) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \} \\[2mm]
& = & \{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\[2mm]
& = & \{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^3 \} \\[2mm]
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (U_1, U_2)$ est donc :

- $\times$ génératrice de $E_2\big(M(-1)\big)$,
- $\times$ libre, car composée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

La famille $\mathcal{F}$ est donc une base de $E_2\big(M(-1)\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-1)\big)\Big) \ = \ \text{Card}(\mathcal{F}) \ = \ 2$$

- On note : $E_3\big(M(-1)\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-1) - 3\,I_3\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
Comme 3 est valeur propre de $M(-1)$, on en déduit :

$$\dim\Big(E_3\big(M(-1)\big)\Big) \geqslant 1$$

Soit $U_3 \in E_3\big(M(-1)\big) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
Par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est libre. De plus, $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $M(-1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } M(-1) \text{ est diagonalisable.}}$$

$\times$ Si $t = -\frac{1}{2}$, alors : $\text{Sp}\left(M(-\frac{1}{2})\right) = \{2, 3\}$.

- Déterminons $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-\frac{1}{2}) - 2\,I_3\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big) & \Leftrightarrow & (M(-\frac{1}{2}) - 2\,I_3)\,X = 0 \\[6pt]
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6pt]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & \frac{1}{2}\,z & = & 0 \\ & & & & -\frac{1}{2}\,z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \underset{L_2 \leftarrow -2\,L_2}{\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1}{=}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 - L_1}{=} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=}} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big) & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_2\Big(M\big(-\tfrac{1}{2}\big)\Big) &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y \texttt{ ET } z = 0\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc :

- × génératrice de $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big)$,
- × libre, car composée uniquement d'une matrice non nulle.

La famille $\mathcal{F}_2$ est donc une base $E_2\big(M(-\frac{1}{2})\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_2\big(M(-\tfrac{1}{2})\big)\Big) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_2) = 1$$

- Déterminons $E_3(M(-\frac{1}{2})) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \big(M(-\frac{1}{2}) - 3\,I_3\big)\,X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big) \quad &\Leftrightarrow \quad \big(M(-\tfrac{1}{2}) - 3\,I_3\big)\,X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & \frac{1}{2}\,z & = & 0 \\ & - & y & - & \frac{1}{2}\,z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right. \\ &\underset{\substack{L_1 \leftarrow 2\,L_1 \\ L_2 \leftarrow -2\,L_2}}{=} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

On obtient :

$$X \in E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ & & 2\,y & = & -z \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & z \\ & & 2\,y & = & -z \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E_3\Big(M\big(-\tfrac{1}{2}\big)\Big) &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \tfrac{z}{2} \texttt{ ET } y = -\tfrac{z}{2}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} \frac{z}{2} \\ -\frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est donc :

- × génératrice de $E_3\big(M(-\frac{1}{2})\big)$,
- × libre, car composée uniquement d'une matrice non nulle.

La famille $\mathcal{F}_3$ est donc une base $E_3\big(M(-\frac{1}{2})\big)$. Ainsi :

$$\dim\Big(E_3\big(M(-\tfrac{1}{2})\big)\Big) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_3) = 1$$

Supposons que $M(-\frac{1}{2})$ soit diagonalisable. Alors il existe une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $M(-\frac{1}{2})$. Par principe des tiroirs, deux de ces vecteurs se trouvent dans le même sous-espace propre ($E_2(M(-\frac{1}{2}))$ ou $E_3(M(-\frac{1}{2}))$). On a donc une famille libre de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 1. C'est absurde.

$$\boxed{\text{La matrice } M(-\tfrac{1}{2}) \text{ n'est donc pas diagonalisable.}}$$ □

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

Démonstration.

- Raisonnons par l'absurde.
  Supposons que 0 n'est pas valeur propre de M. Alors la matrice M est inversible.
  Or le produit de deux matrices inversibles est inversible. Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n est inversible.
  Or, comme M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  Absurde !

  $$\boxed{\text{0 est valeur propre de } M.}$$

- Comme la matrice M est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $M^p = 0$.
  On en déduit que le polynôme $Q(X) = X^p$ est un polynôme annulateur de M. Ainsi : $\text{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$.

  $$\boxed{\text{La seule valeur propre } \underline{\text{possible}} \text{ de } M \text{ est donc 0.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \text{Sp}(M) = \{0\}.}$$

Commentaire

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
  On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de A puisque :

  $$(\alpha\, Q)(A) \ = \ \alpha\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs.
  On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :

  $$R(A) \ = \ (A - 5\, I)\, Q(A) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

  Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice.
- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A. Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

□

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle.
Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer les inclusions $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

Démonstration.

- Démontrons : $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$.

  Soit $x \in \text{Ker}(u)$.
  Alors : $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit :

  $$u^2(x) \; = \; u\big(u(x)\big) \; = \; u(0_{\mathbb{R}^3}) \; = \; 0_{\mathbb{R}^3}$$

  (où la dernière égalité est obtenue par linéarité de u).
  D'où : $x \in \text{Ker}(u^2)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)}$$

- Démontrons que $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.

  Soit $x \in \text{Ker}(u^2)$.
  Alors : $u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit :

  $$u^3(x) \; = \; u(u^2(x)) \; = \; u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

  D'où $x \in \text{Ker}(u^3)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

  1 Soit $x \in \text{Ker}()$.
  2 Alors $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit :
  3 $\qquad u^2(x) = \ldots$
  4 $\qquad\qquad = \ldots$
  5 $\qquad\qquad = 0_{\mathbb{R}^3}$
  6 Ainsi, $x \in \text{Ker}(u^2)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\text{Ker}(u)$ et on démontre qu'il est dans $\text{Ker}(u^2)$.

  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application.
  Dire : $x \in \text{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

  × La ligne 3 correspond aussi au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $x \in \text{Ker}(u^2)$ c'est exactement dire : $u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que u est linéaire).

- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

$\square$

b) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons : $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$.

- Démontrons par récurrence : $\forall i \geqslant 2,\ \mathcal{P}(i)$ où $\mathcal{P}(i)$: $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^i)$.
  - ▶ **Initialisation** :
    $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^2)$.
    D'où $\mathcal{P}(2)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $i \geqslant 2$.
    Supposons $\mathcal{P}(i)$ et démontrons $\mathcal{P}(i+1)$ (*i.e.* $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^{i+1})$).
    Procédons par double inclusion.

  ($\subset$) Démontrons : $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^{i+1})$.

  Par hypothèse de récurrence, $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^i)$.
  Avec le même raisonnement qu'en question précédente, on a de plus : $\text{Ker}(u^i) \subset \text{Ker}(u^{i+1})$.

  ($\supset$) Démontrons que $\text{Ker}(u^{i+1}) \subset \text{Ker}(u^2)$.

  Par hypothèse de récurrence, $\text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^2)$.
  Il suffit alors de démontrer : $\text{Ker}(u^{i+1}) \subset \text{Ker}(u^i)$.
  Soit $x \in \text{Ker}(u^{i+1})$.

$$\begin{array}{ccl} \text{Alors} & u^{i+1}(x) = 0 & \\ \text{donc} & u^3(u^{i-2}(x)) = 0 & \\ \text{d'où} & u^{i-2}(x) \in \text{Ker}(u^3) & \\ \text{ainsi} & u^2(u^{i-2}(x)) = 0 & \textit{(car } \text{Ker}(u^3) = \text{Ker}(u^2)\textit{)} \\ \text{et enfin} & u^i(x) = 0 & \end{array}$$

  On en déduit : $x \in \text{Ker}(u^i)$.
  Ainsi $\text{Ker}(u^{i+1}) \subset \text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^2)$.

  D'où $\mathcal{P}(i+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall i \geqslant 2,\ \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^i).}$$

- Par hypothèse, M est nilpotente. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
  On en déduit : $u^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ u^p(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi : $\text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
  Deux cas se présentent alors :
  - × si $p = 1$ alors : $\text{Ker}(u) = \mathbb{R}^3$.
    Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit que u est l'endomorphisme nul, c'est-à-dire : $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
    Par isomorphisme de représentation : $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Et donc : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
    Absurde !

× Si $p \geq 1$ alors, d'après le point précédent : $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
Comme $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u^3)$, on en déduit : $\text{Ker}(u^3) = \mathbb{R}^3$.
Ainsi : $u^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Et donc, par isomorphisme de représentation : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Ker}(u^2) \neq \text{Ker}(u^3).}$$

Commentaire

De manière générale, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ alors : $\text{Ker}(u) = E \Leftrightarrow u = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En effet :

$$\text{Ker}(u) = E \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E,\ u(x) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad u = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

□

c) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.

- Alors, par une récurrence similaire à celle de la question précédente : $\forall i \geqslant 1,\ \text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^i)$.
  En particulier : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^p)$.
- Or : $M^p = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. D'où : $u^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Et donc : $\text{Ker}(u^p) = \mathbb{R}^3$.
  D'après le point précédent, on en déduit : $\text{Ker}(u) = \mathbb{R}^3$. D'où : $u = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
  Ainsi $M = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et donc $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Ker}(u) \neq \text{Ker}(u^2).}$$

□

d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

Démonstration.

- D'après les questions précédentes : $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$ et ces inclusions sont strictes.
  On en déduit que :

$$\dim(\text{Ker}(u)) \ < \ \dim(\text{Ker}(u^2)) \ < \ \dim(\text{Ker}(u^3)) \qquad (*)$$

- Démontrons : $\text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
  Raisonnons par l'absurde.
  Supposons : $\text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
  × Alors u est injectif. Or u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de **dimension finie**.
    Il est donc bijectif. Ainsi M est inversible.
  × De plus, M est nilpotente. Ainsi, d'après la question ***1.***, 0 est valeur propre de M.
    La matrice M n'est donc pas inversible.

  Absurde !
- On en déduit : $\dim(\text{Ker}(u)) \geqslant 1$. Comme de plus : $\text{Ker}(u^3) \subset \mathbb{R}^3$, on obtient d'après $(*)$:

$$1 \ \leqslant \ \dim(\text{Ker}(u)) \ < \ \dim(\text{Ker}(u^2)) \ < \ \dim(\text{Ker}(u^3)) \ \leqslant \ 3$$

  D'où :

$$\dim(\text{Ker}(u)) = 1, \quad \dim(\text{Ker}(u^2)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(\text{Ker}(u^3)) = 3$$

- On obtient :
  - × $\ker(u^3) \subset \mathbb{R}^3$
  - × $\dim\big(\ker(u^3)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

  On en déduit : $\ker(u^3) = \mathbb{R}^3$. D'où : $u^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ de & ac+df & bc \\ cf & ae & be+df \end{pmatrix}$$

- Enfin :
  - × d'une part :

$$\begin{array}{rcl} M^3 & = & M \times M^2 \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ac+be & bf & ad \\ de & ac+df & bc \\ cf & ae & be+df \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} ade+bcf & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & bcf+ade & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & ade+bcf \end{pmatrix} \end{array}$$

  - × d'autre part :

$$\begin{array}{rl} & \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 \\ = & (ac+be+df) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (ade+bcf)\, I_3 \\ = & \begin{pmatrix} 0 & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & 0 & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ade+bcf & 0 & 0 \\ 0 & ade+bcf & 0 \\ 0 & 0 & ade+bcf \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} ade+bcf & a^2c+adf+abe & abc+b^2e+bdf \\ ac^2+bce+cdf & bcf+ade & acd+bde+d^2f \\ ace+be^2+def & bef+acf+df^2 & ade+bcf \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{M^3 = \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3}$$

□

b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.

Démonstration.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons M nilpotente.
Alors, d'après la question ***8.b)*** : $M^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Ainsi, d'après la question précédente :

$$\gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

Or la famille (I_3, M) est composée uniquement de deux matrices non proportionnelles. C'est donc une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Ainsi, la seule relation de dépendance linéaire pouvant lier ces vecteurs est la relation triviale. D'où : $\delta(M) = \gamma(M) = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons $\delta(M) = \gamma(M) = 0$.
Alors, d'après la question précédente : $M^3 = \gamma(M)\ M + \delta(M)\ I_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Ainsi, M est nilpotente.

$$\boxed{M \text{ est nilpotente } \Leftrightarrow\ \delta(M) = \gamma(M) = 0}$$

□

c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
M \text{ nilpotente} \quad & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} e+c+f & = & 0 \\ e+cf & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c+f & = & -e \\ cf & = & -e \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c+f & = & cf \\ cf & = & -e \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c\,(1-f)+f & = & 0 \\ e & = & -fc \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c\,(1-f) & = & -f \\ e & = & -fc \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $f \neq 1$, alors :

$$M \text{ nilpotente} \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c & = & -\dfrac{f}{1-f} \\[2ex] e & = & -\dfrac{f^2}{1-f} \end{array} \right.$$

- Si $f = 1$, alors le système initial se réécrit : $\left\{ \begin{array}{rcl} e+c & = & -1 \\ e+c & = & 0 \end{array} \right.$.
  Ce système n'ayant pas de solution, M n'est pas nilpotente dans ce cas.

Ainsi, M est nilpotente si et seulement si $(c, e, f) \in \mathcal{S}$ où :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} & = & \{(c, e, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \mid c = -\frac{f}{1-f} \ \texttt{ET} \ e = -\frac{f^2}{1-f}\} \\ & = & \{(-\frac{f}{1-f}, -\frac{f^2}{1-f}, f) \mid f \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} \end{array}$$

$\mathcal{S}$ contient autant de triplets que de valeurs possibles pour f, c'est-à-dire autant que de réels différents de 1.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Il existe une infinité de choix pour le triplet } (c, e, f) \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ \text{pour lesquels la matrice } M \text{ est nilpotente.} \end{array}}$$

☐

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

Démonstration.
Soit $f \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- D'après la question précédente, la matrice $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{f}{1-f} & 0 & 1 \\ -\frac{f^2}{1-f} & f & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

  Or, d'après la question ***7.***, sa seule valeur propre est 0. On en déduit : $M_f \in \mathcal{D}_3$.
- Supposons de plus : $f \neq 0$. Alors la matrice M_f n'est pas triangulaire.

Ainsi : $\{M_f \mid f \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\} \subset \mathcal{D}_3$.

$$\boxed{\mathcal{D}_3 \text{ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.}}$$

☐

e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Démonstration.
Soit $f \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- D'après la question précédente : $M_f \in \mathcal{D}_3$.
- Ainsi, d'après la question ***2.*** : $M_f + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{f}{1-f} & 1 & 1 \\ -\frac{f^2}{1-f} & f & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$.

  Toute matrice $M_f + I_3$ (avec $f \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$) satisfait les contraintes de l'énoncé.

$$\boxed{\text{Pour } f = 2 \text{ (par exemple), on obtient } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3.}$$

☐