Corrigés des sujets de révisions
Problèmes du TOP3

HEC/ESSEC I 2023 - loi normale centrée réduite, loi de Bernoulli, loi binomiale, convergence uniforme, estimation par intervalle de confiance

On s'intéresse dans ce sujet à la méthode de Stein, introduite par Charles Stein (1920/2016) en 1972, dont les développements et applications sont nombreux.

Les parties 1 et 2 concernent la justification de la méthode, elles sont indépendantes.

Dans la partie 3, on s'intéresse à l'estimation en un point d'une densité d'une loi de probabilité. Cette partie peut être traitée indépendamment des deux premières parties.

Dans la partie 4, on met en œuvre la méthode de Stein, vue dans les parties 1 et 2, pour établir des convergences « uniformes » en loi et on démontre le résultat admis dans la partie 3. Cette partie est indépendante de la partie 3 à l'exception de sa dernière question.

Dans tout le problème :

- les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- si X est une variable aléatoire, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ désignent respectivement, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de X.
- W désigne l'ensemble des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|h'(x)\right| \leqslant 1$$

- N est une variable aléatoire qui suit la loi normale $(0, 1)$.
- on admet que si X est une variable aléatoire possédant une espérance et $h \in W$, $\mathbb{E}(h(X))$ existe. On note en particulier c_h l'espérance de $h(N)$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $(0, 1)$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$. On rappelle que c'est la primitive sur $\mathbb{R}$, qui vaut $\frac{1}{2}$ en 0, de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Partie 1 - Transformation de Stein

Soit $h \in W$. On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction $\theta : x \mapsto \dfrac{\Phi(x)}{\varphi(x)}$ et la fonction f_h par,

$$f_h : x \mapsto \theta(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\, dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1 - \Phi(t))\, dt$$

lorsque ces intégrales convergent.

L'objectif principal de cette partie est d'obtenir, pour X une variable aléatoire admettant une espérance, une expression de $\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))$ qui ne fait pas intervenir N directement.

1. a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et $t \in [x, +\infty[$, $0 \leqslant x\varphi(t) \leqslant t\varphi(t)$. En déduire que :

$$\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant x(1 - \Phi(x)) \leqslant \varphi(x)$$

(on remarquera que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$)

Commentaire

La remarque faite par l'énoncé peut sembler anodine, mais la formule $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$ sera utilisée à de nombreuses reprises dans cette partie pour ne pas avoir à revenir aux formules explicites de $\varphi(t)$ et $\varphi'(t)$. La difficulté n'est donc pas de démontrer cette formule, mais bien d'y penser à chaque fois qu'elle sera utile.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$ et soit $t \in [x, +\infty[$.

$$0 \leqslant x \leqslant t$$

donc $$0 \leqslant x\varphi(t) \leqslant t\varphi(t) \qquad \textit{(car } \varphi(t) \geqslant 0, \ \varphi \textit{ étant une densité)}$$

Soit $B \geqslant x$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($x \leqslant B$) :

$$0 \leqslant \int_x^B x\varphi(t)\ dt \leqslant \int_x^B t\varphi(t)\ dt$$

donc $$0 \leqslant x \int_x^B \varphi(t)\ dt \leqslant -\int_x^B \varphi'(t)\ dt \qquad \textit{(car } \varphi'(t) = -t\varphi(t))$$

donc $$0 \leqslant x \int_x^B \varphi(t)\ dt \leqslant -\left[\ \varphi(t)\ \right]_x^B$$

donc $$0 \leqslant x \int_x^B \varphi(t)\ dt \leqslant \varphi(x) - \varphi(B)$$

Or, comme l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\ dt$ converge (φ étant une densité), on peut écrire par relation de Chasles :

$$\lim_{B \to +\infty} \int_x^B \varphi(t)\ dt = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\ dt = 1 - \Phi(x)$$

De plus :

$$\lim_{B \to +\infty} \varphi(B) = \lim_{B \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}} = 0$$

donc, par passage à la limite lorsque B tend vers $+\infty$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant x(1 - \Phi(x)) \leqslant \varphi(x).}$$

□

Commentaire

- Tout d'abord, remarquons que la deuxième partie de la question peut se traiter même sans avoir fait la première. Aux concours, il est autorisé d'admettre une partie de la question et de traiter la suite.
- L'énoncé peut donner des indications sur la manière de résoudre les questions. Il peut être intéressant de repérer en première lecture de l'énoncé les questions pour lesquelles la méthode de résolution est précisée. En particulier, on pourra repérer celles commençant par « En déduire », « Montrer par récurrence », « Par intégration par parties », etc
- L'égalité
$$1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\ dt$$
est classique et à connaître (elle est vue en cours au moment de démontrer $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$). C'est la clé de la résolution de cette question : en faisant apparaître une intégrale, on comprend qu'on passera de la première inégalité à la seconde par intégration. Cela paraît d'autant plus pertinent que :
  - × la partie de droite de l'inégalité fait apparaître la fonction φ dont la dérivée est la fonction $t \mapsto -t\varphi(t)$
  - × l'encadrement $0 \leqslant x\varphi(t) \leqslant t\varphi(t)$ a précisément été démontré pour $t \geqslant x$

b) Procéder de façon analogue pour montrer que : $\forall x \leqslant 0,\ -\varphi(x) \leqslant x\Phi(x) \leqslant 0$.

Démonstration.
Soit $x \leqslant 0$ et soit $t \in\ ]-\infty, x]$.

$$\begin{array}{rl} & t \leqslant x \leqslant 0 \\ \text{donc} & t\varphi(t) \leqslant x\varphi(t) \leqslant 0 \end{array}$$

Soit $A \leqslant x$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($A \leqslant x$), on a

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_A^x t\varphi(t)\ dt \leqslant \int_A^x x\varphi(t)\ dt \leqslant 0 \\ \text{donc} & \displaystyle -\int_A^x \varphi'(t)\ dt \leqslant x\int_A^x \varphi(t)\ dt \leqslant 0 \\ \text{donc} & \displaystyle -\left[\ \varphi(t)\ \right]_A^x \leqslant x\int_A^x \varphi(t)\ dt \leqslant 0 \\ \text{donc} & \displaystyle \varphi(A) - \varphi(x) \leqslant x\int_A^x \varphi(t)\ dt \leqslant 0 \end{array}$$

Or, comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^x \varphi(t)\ dt$ converge (φ étant une densité), on peut écrire par définition de Φ :

$$\lim_{A \to -\infty} \int_A^x \varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\ dt = \Phi(x)$$

De plus,

$$\lim_{A \to -\infty} \varphi(A) = \lim_{A \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = 0$$

donc, par passage à la limite lorsque A tend vers $-\infty$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall x \leqslant 0,\ -\varphi(x) \leqslant x\Phi(x) \leqslant 0.}$$

$\square$

c) En déduire à l'aide d'une intégration par parties, pour tout x réel, la convergence des intégrales qui suivent et montrer que :

$$\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt = x\Phi(x) + \varphi(x) \quad \text{et} \quad \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt = -x(1-\Phi(x)) + \varphi(x) \qquad (R_1)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord que les fonctions Φ et $1-\Phi$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt$ est impropre seulement en $-\infty$ et $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$.
- Soit $A \leqslant 0$. On procède par intégration par parties en posant :

$$\left|\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \Phi(t) & v'(t) = \varphi(t) \end{array}\right.$$

Commentaire

L'énoncé nous indique la marche à suivre : il faut faire une intégration par parties. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt$ ne fait apparaître qu'un seul terme. Il n'y a donc pas le choix : il faut dériver Φ et faire apparaître un 1 en facteur pour le primitiver.

Cette intégration par parties est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A, x]$.

$$\begin{aligned} \int_{A}^{x} \Phi(t)\ dt &= \big[\ t\Phi(t)\ \big]_{A}^{x} - \int_{A}^{x} t\varphi(t)\ dt \\ &= x\Phi(x) - A\,\Phi(A) + \int_{A}^{x} \varphi'(t)\ dt \qquad \textit{(car } \varphi'(t) = -t\varphi(t)\textit{)} \\ &= x\Phi(x) - A\,\Phi(A) + \varphi(x) - \varphi(A) \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt$. Pour cela, nous allons montrer que tous les termes de droite admettent une limite lorsque A tend vers $-\infty$.

× Tout d'abord :

$$\lim_{A \to -\infty} \varphi(A) = 0$$

× Ensuite, puisque $A \leqslant 0$, on a, d'après la question ***1.b)*** : $-\varphi(A) \leqslant A\,\Phi(A) \leqslant 0$.
Par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{A \to -\infty} A\,\Phi(A) = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : pour tout } x \text{ réel, } \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt = x\Phi(x) + \varphi(x).}$$

- Soit $B \geqslant 0$. On procède par intégration par parties en posant :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = 1 - \Phi(t) & v'(t) = -\varphi(t) \end{array} \right.$$

Cette intégration par parties est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[x, B]$.

$$\begin{aligned} \int_x^B (1 - \Phi(t))\ dt &= [\ t(1 - \Phi(t))\ ]_x^B - \int_x^B -t\varphi(t)\ dt \\ &= B(1 - \Phi(B)) - x(1 - \Phi(x)) - \int_x^B \varphi'(t)\ dt \qquad \textit{(car } \varphi'(t) = -t\varphi(t)\textit{)} \\ &= B(1 - \Phi(B)) - x(1 - \Phi(x)) + \varphi(x) - \varphi(B) \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de montrer la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ dt$. Pour cela, nous allons montrer que tous les termes de droite admettent une limite lorsque B tend vers $+\infty$.

× Tout d'abord :

$$\lim_{B \to +\infty} \varphi(B) = 0$$

× Ensuite, puisque $B \geqslant 0$, on a, d'après la question ***1.a)*** : $0 \leqslant B(1 - \Phi(B)) \leqslant \varphi(B)$.
Par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{B \to +\infty} B(1 - \Phi(B)) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi : pour tout } x \text{ réel, } \displaystyle\int_x^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ dt \text{ converge} \\ \text{et } \displaystyle\int_x^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ dt = -x(1 - \Phi(x)) + \varphi(x). \end{array}}$$

□

2. a) Montrer que pour tous réels x et y,

$$|h(x) - h(y)| \leqslant |x - y|, \quad \text{puis que } |h(x)| \leqslant |x| + |h(0)|$$

Démonstration.
Comme $h \in W$:

× la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

× pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h'(x)| \leqslant 1$.

Ainsi, par inégalité des accroissements finis, on obtient :

$$\boxed{\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ |h(u) - h(v)| \leqslant |u - v|}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité précédente appliquée en $u = x$ et $v = 0$:

$$|h(x) - h(0)| \leqslant |x|$$

d'où, par inégalité triangulaire,

$$|h(x)| = |(h(x) - h(0)) + h(0)| \leqslant |h(x) - h(0)| + |h(0)| \leqslant |x| + |h(0)|$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in \mathbb{R}, |h(x)| \leqslant |x| + |h(0)|}$$

□

b) Pour tout x réel, justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\, dt$ et montrer que :

$$\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\, dt = h(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)\, dt$$

On admet de même que, $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\, dt$ *converge et que,*

$$\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\, dt = -h(x)(1-\Phi(x)) + \int_{x}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\, dt$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt$ converge absolument, ce qui justifiera sa convergence.
  - × Tout d'abord, $h \in W$ donc la fonction $t \mapsto h'(t)\Phi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt$ est seulement impropre en $-\infty$.
  - × Soit $t \in \,]-\infty, x]$. Puisque $h \in W$, on a : $|h'(t)| \leqslant 1$. De plus : $\Phi(t) \geqslant 0$. On en déduit :
  $$\left|h'(t)\Phi(t)\right| = \left|h'(t)\right| \Phi(t) \leqslant \Phi(t)$$
  - × Les fonctions $t \mapsto |h'(t)\Phi(t)|$ et $t \mapsto \Phi(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, x]$.
  - × L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt$ converge (d'après la question ***1.c)***).

  Par théorème de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, il vient que
  $$\boxed{\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt \text{ est (absolument) convergente.}}$$

- Soit $A \leqslant 0$. On procède ensuite par intégration par parties en posant
  $$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = h'(t) & u(t) = h(t) \\ v(t) = \Phi(t) & v'(t) = \varphi(t) \end{array} \right.$$
  Cette intégration par parties est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A, x]$.
  $$\begin{aligned} \int_{A}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt &= [\ h(t)\Phi(t)\ ]_{A}^{x} - \int_{A}^{x} h(t)\varphi(t)\ dt \\ &= h(x)\Phi(x) - h(A)\Phi(A) - \int_{A}^{x} h(t)\varphi(t)\ dt \end{aligned}$$
  Montrons : $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} h(A)\Phi(A) = 0$.
  Tout d'abord :
  $$\begin{aligned} |h(A)\Phi(A)| &= |h(A)|\, \Phi(A) \\ &\leqslant (|A| + |h(0)|)\, \Phi(A) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\ &\leqslant -A\Phi(A) + |h(0)|\, \Phi(A) && \textit{(car } A \leqslant 0\textit{)} \end{aligned}$$
  De plus,
  - × Φ est une fonction de répartition donc : $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \Phi(A) = 0$.
  - × D'après la question ***1.b)***, $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} A\Phi(A) = 0$.
  - × On en déduit : $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} -A\Phi(A) + |h(0)|\, \Phi(A) = 0$.

  $$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{A \to -\infty} h(A)\Phi(A) = 0.}$$

Remarquons maintenant que :

$$\int_A^x h(t)\varphi(t)\, dt = h(x)\Phi(x) - h(A)\Phi(A) - \int_A^x h'(t)\Phi(t)\, dt$$

et tous les termes de droite admettent une limite finie lorsque A tend vers $-\infty$.
Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^x h(t)\varphi(t)\, dt$ converge et on peut écrire, par passage à la limite lorsque A tend vers $-\infty$:

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel, } \int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)\, dt = h(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^x h(t)\varphi(t)\, dt.}$$

Commentaire

Tout passage à la limite doit être justifié par l'existence des limites de chacun des termes en présence. Ici, il ne faut pas oublier de démontrer la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^x h(t)\varphi(t)\, dt$ (c'est-à-dire l'existence de $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \int_A^x h(t)\varphi(t)\, dt$), même si l'énoncé ne nous le demande pas explicitement. □

c) En déduire que, pour tout x réel :

$$-\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)\, dt + \int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\, dt = c_h - h(x)$$

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)\, dt + \int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\, dt \\
&= -\left(h(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^x h(t)\varphi(t)\, dt\right) - h(x)(1-\Phi(x)) + \int_x^{+\infty} h(t)\varphi(t)\, dt \\
&= \cancel{-h(x)\Phi(x)} + \int_{-\infty}^x h(t)\varphi(t)\, dt - h(x) + \cancel{h(x)\Phi(x)} + \int_x^{+\infty} h(t)\varphi(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\, dt - h(x) \qquad \textit{(par relation de Chasles)}
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que φ est une densité de N et que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de transfert :

× La variable aléatoire $h(N)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\, dt$ est absolument convergente.

× En cas de convergence : $\mathbb{E}(h(N)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\, dt$.

Or, d'après l'énoncé, $h(N)$ admet une espérance. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\, dt$ converge absolument (on savait déjà qu'elle était convergente) et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\, dt = \mathbb{E}(h(N)) = c_h$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ -\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)\, dt + \int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\, dt = c_h - h(x).}$$

Commentaire

Remarquons que le théorème de transfert n'est pas utilisé dans cette question de la manière habituelle. D'habitude, on utilise ce théorème pour **démontrer** qu'une variable aléatoire de la forme $g(X)$ admet une espérance. Ici, l'existence de l'espérance est **admise**. $\square$

3. a) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\theta'(x) = 1 + x\theta(x)$$
$$\theta''(x) = x + (1+x^2)\theta(x)$$
$$\theta(-x)\Phi(x) = \theta(x)(1-\Phi(x))$$

Démonstration.
La fonction θ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'une part,

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{\varphi(x)^2 - \Phi(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2} \\
&= \frac{\varphi(x)^2 + \Phi(x)\, x\varphi(x)}{\varphi(x)^2} && \textit{(car } \varphi'(x) = -x\varphi(x)\textit{)} \\
&= 1 + x\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} \\
&= 1 + x\theta(x)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\theta''(x) &= \theta(x) + x\theta'(x) \\
&= \theta(x) + x(1 + x\theta(x)) \\
&= \theta(x) + x + x^2\theta(x) \\
&= x + (1+x^2)\theta(x)
\end{aligned}$$

- D'autre part,

$$\begin{aligned}
\theta(-x)\Phi(x) &= \frac{\Phi(-x)}{\varphi(-x)}\Phi(x) \\
&= \frac{\Phi(-x)}{\varphi(x)}\Phi(x) && \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\
&= \Phi(-x)\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} \\
&= (1-\Phi(x))\theta(x) && \textit{(par propriété de } \Phi\textit{)}
\end{aligned}$$

$\square$

b) En déduire que f_h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie, pour tout x réel :

$$f_h'(x) - x f_h(x) = c_h - h(x)$$

Pourquoi peut-on alors affirmer que f_h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappelons que :

$$f_h(x) = \theta(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt$$

Ainsi, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} f_h(x) = \theta(-x) &\left(\int_{-\infty}^{0} h'(t)\Phi(t)\ dt + \int_{0}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt \right) \\ &+ \theta(x) \left(\int_{x}^{0} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt + \int_{0}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt \right) \end{aligned}$$

× Notons $g_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^x h'(t)\Phi(t)\ dt$.
La fonction $t \mapsto h'(t)\Phi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par théorème fondamental de l'analyse et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_1'(x) = h'(x)\Phi(x)$$

× De manière analogue, la fonction $g_2 : x \mapsto \displaystyle\int_x^0 h'(t)(1-\Phi(t))\ dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_2'(x) = -h'(x)(1-\Phi(x))$$

Avec ces notations, il vient :

$$f_h(x) = \theta(-x) \left(\int_{-\infty}^{0} h'(t)\Phi(t)\ dt + g_1(x) \right) + \theta(x) \left(\int_{0}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt + g_2(x) \right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par somme et produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R},\ f_h \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

En utilisant les questions ***3.a)*** et ***2.c)***, on obtient

$$\begin{aligned}
f_h'(x) &= -\theta'(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta(-x)g_1'(x) \\
&\quad + \theta'(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt + \theta(x)g_2'(x) \\
&= -\theta'(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta(-x)h'(x)\Phi(x) \\
&\quad + \theta'(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt - \theta(x)h'(x)(1-\Phi(x)) \\
&= h'(x)\left(\cancel{\theta(-x)\Phi(x) - \theta(x)(1-\Phi(x))}\right) \\
&\quad - (1 - x\theta(-x))\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + (1 + x\theta(x))\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt \\
&= -\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt \\
&\quad + x\theta(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + x\theta(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt \\
&= c_h - h(x) + x f_h(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \text{ réel, } f_h'(x) - x f_h(x) = c_h - h(x).}$$

D'après ce qui précède, f_h' est de la forme $f_h' = c_h - h + g \times f_h$ où

- $\times$ c_h est une constante,
- $\times$ $h \in W$ donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
- $\times$ f_h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
- $\times$ $g : x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f_h' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{et donc } f_h \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

Dans cette question, il s'agit de dériver des fonctions de la forme

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \gamma(t)\ dt$$

où γ est continue sur $\mathbb{R}$. Le théorème fondamental de l'analyse ne permet pas de le faire directement. En effet, ce théorème assure que la fonction

$$g_1 : x \mapsto \int_{c}^{x} \gamma(t)\ dt$$

est dérivable lorsque c est une constante **réelle**. Afin de rester dans le cadre du cours, nous utilisons la relation de Chasles pour écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{-\infty}^{0} \gamma(t)\ dt + g_1(x)$$

avec $c = 0$ (nous avons le choix). L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \gamma(t)\ dt$ étant une constante, elle ne pose plus de difficultés techniques pour la dérivation.

□

c) En conclure que, si X est une variable aléatoire admettant une espérance,

$$|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| = \left|\mathbb{E}(f_h'(X) - X f_h(X))\right|$$

Démonstration.

- Tout d'abord, puisque $h \in W$ et puisque X et N admettent chacune une espérance, il vient (d'après le résultat admis en début d'énoncé) que $\mathbb{E}(h(X))$ et $\mathbb{E}(h(N))$ existent.
- Montrons que $\mathbb{E}(f_h'(X) - X f_h(X))$ existe.
  D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  $$f_h'(x) - x f_h(x) = c_h - h(x)$$

  On en déduit que

  $$f_h'(X) - X f_h(X) = c_h - h(X)$$

  Or, c_h est une constante et $h(X)$ admet une espérance (d'après le premier point) donc $c_h - h(X)$ admet une espérance par transformation affine.

  $\boxed{\text{On en déduit que } \mathbb{E}(f_h'(X) - X f_h(X)) \text{ existe.}}$
- On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}(f_h'(X) - X f_h(X))\right| &= |\mathbb{E}(c_h - h(X))| \\
&= |\mathbb{E}(c_h) - \mathbb{E}(h(X))| && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= |c_h - \mathbb{E}(h(X))| && \textit{(car } c_h \textit{ est une constante)} \\
&= |\mathbb{E}(h(N)) - \mathbb{E}(h(X))| && \textit{(par définition de } c_h\textit{)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } |\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| = |\mathbb{E}(f_h'(X) - X f_h(X))|.}$

Commentaire

On retiendra qu'il faut toujours démontrer l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire avant de se lancer dans le calcul de celle-ci.

□

4. Majoration de $|f_h|$.

a) Montrer, en utilisant les égalités (R_1), que pour tout x réel :

$$\theta(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt = 1$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\theta(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt \\
&= \theta(-x)\Big(x\Phi(x)+\varphi(x)\Big) + \theta(x)\Big(-x(1-\Phi(x))+\varphi(x)\Big) && \textit{(d'après les égalités } R_1\textit{)} \\
&= x\theta(-x)\Phi(x) + \theta(-x)\varphi(x) - x\theta(x)(1-\Phi(x)) + \theta(x)\varphi(x) \\
&= x\left(\cancel{\theta(-x)\Phi(x) - \theta(x)(1-\Phi(x))}\right) + (\theta(-x)+\theta(x))\varphi(x)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\theta(-x)+\theta(x) &= \frac{\Phi(-x)}{\varphi(-x)} + \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} \\
&= \frac{\Phi(-x)}{\varphi(x)} + \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} && \textit{(car } \varphi \textit{ est paire)} \\
&= \frac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)} + \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} && \textit{(par propriété de } \Phi\textit{)} \\
&= \frac{1}{\varphi(x)}
\end{aligned}$$

Ce qui donne, en multipliant par $\varphi(x)$: $(\theta(-x)+\theta(x))\varphi(x) = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : pour tout } x \text{ réel, } \theta(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt = 1.}$$

□

b) En déduire que pour tout x réel : $|f_h(x)| \leqslant 1$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, par définition de f_h :

$$|f_h(x)| = \left| \theta(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt \right|$$

En appliquant l'inégalité triangulaire sur les sommes de réels puis sur les intégrales (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant), et en utilisant la propriété $|ab| = |a|\,|b|$ sur les réels, on obtient :

$$\left|\theta(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt\right|$$

$$\leqslant \left|\theta(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt\right| + \left|\theta(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt\right| \qquad \textit{(par inégalité triangulaire sur les réels)}$$

$$\leqslant |\theta(-x)|\left|\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt\right| + |\theta(x)|\left|\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt\right| \qquad \textit{(valeur absolue d'un produit)}$$

$$\leqslant |\theta(-x)|\int_{-\infty}^{x} \left|h'(t)\Phi(t)\right|\ dt + |\theta(x)|\int_{x}^{+\infty} \left|h'(t)(1-\Phi(t))\right|\ dt \qquad \textit{(par inégalité triangulaire sur les intégrales)}$$

$$\leqslant |\theta(-x)|\int_{-\infty}^{x} \left|h'(t)\right|\left|\Phi(t)\right|\ dt + |\theta(x)|\int_{x}^{+\infty} \left|h'(t)\right|\left|1-\Phi(t)\right|\ dt \qquad \textit{(valeur absolue d'un produit)}$$

Remarquons maintenant que $\theta(-x) \geqslant 0$, $\theta(x) \geqslant 0$, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \Phi(t) \leqslant 1$.
On en déduit que :

$$|f_h(x)| \leqslant \theta(-x)\int_{-\infty}^{x} \left|h'(t)\right|\Phi(t)\ dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty} \left|h'(t)\right|(1-\Phi(t))\ dt$$

× On sait que $h \in W$, et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|h'(t)| \leqslant 1$. Il suit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left|h'(t)\right|\Phi(t) \leqslant \Phi(t) \qquad \text{et} \qquad \left|h'(t)\right|(1-\Phi(t)) \leqslant 1-\Phi(t)$$

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{x} \left|h'(t)\right|\Phi(t)\ dt \leqslant \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad \int_{x}^{+\infty} \left|h'(t)\right|(1-\Phi(t))\ dt \leqslant \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt$$

D'où

$$|f_h(x)| \leqslant \theta(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question } \textbf{\textit{4.a)}}\text{, pour tout } x \text{ réel, } |f_h(x)| \leqslant 1.}$$

□

5. *Majoration de* $|f_h''|$.

a) Montrer que pour tout x réel :

$$\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt = 1$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& \theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt \\
&= \Big(-x + \big(1+(-x)^2\big)\,\theta(-x)\Big) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt \\
&\qquad + \Big(x + (1+x^2)\theta(x)\Big) \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt && \textit{(d'après la question \textbf{3.a)})} \\
&= x\left(-\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt\right) \\
&\qquad + (1+x^2)\left(\theta(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt\right) \\
&= x(-x\Phi(x) - \varphi(x) - x(1-\Phi(x)) + \varphi(x)) && \textit{(d'après les égalités } (R_1)\textit{)} \\
&\qquad + (1+x^2) \times 1 && \textit{(d'après la question \textbf{4.a)})} \\
&= x(-\cancel{x\Phi(x)} - \cancel{\varphi(x)} - x + \cancel{x\Phi(x)} + \cancel{\varphi(x)}) + 1 + x^2 \\
&= \ -x^2 + 1 + x^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in \mathbb{R},\ \theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt = 1.}$$

□

b) Établir pour tout x réel l'égalité :

$$f_h''(x) = -h'(x) + \theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'une part, d'après la question ***3.b)***,

$$f_h'(x) = x f_h(x) + c_h - h(x)$$

donc, en dérivant (ce qui est possible car f_h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
f_h''(x) &= f_h(x) + x f_h'(x) - h'(x) \\
&= f_h(x) + x(x f_h(x) + c_h - h(x)) - h'(x) \\
&= -h'(x) + (1+x^2) f_h(x) + x(c_h - h(x))
\end{aligned}$$

- D'autre part, en reprenant la trame du calcul de la question précédente :

$$\begin{aligned}
&\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt+\theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt\\
&= (-x+(1+(-x)^2)\theta(-x))\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt\\
&\qquad +(x+(1+x^2)\theta(x))\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)}\\
&= x\left(-\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt+\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt\right)\\
&\qquad +(1+x^2)\left(\theta(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt+\theta(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt\right)\\
&= x(c_h-h(x))+(1+x^2)f_h(x) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)}\\
&= f_h''(x)+h'(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x\in\mathbb{R},\ f_h''(x)=-h'(x)+\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt+\theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt.}$$

□

c) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto \Phi(x)+\dfrac{x}{1+x^2}\varphi(x)$. En déduire son signe et le signe de θ''.
En conclure que, pour tout x réel : $|f_h''(x)|\leqslant 2$.

Démonstration.
On note $g : x\mapsto \Phi(x)+\dfrac{x}{1+x^2}\varphi(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \varphi(x)+\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\varphi(x)+\frac{x}{1+x^2}\varphi'(x)\\
&= \varphi(x)+\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\varphi(x)-\frac{x}{1+x^2}x\varphi(x)\\
&= \frac{\varphi(x)}{(1+x^2)^2}\Big(\left(1+x^2\right)^2+1-x^2-x^2\left(1+x^2\right)\Big)\\
&= \frac{\varphi(x)}{(1+x^2)^2}\left(1+2x^2+x^4+1-x^2-x^2-x^4\right)\\
&= \frac{2\varphi(x)}{(1+x^2)^2}>0 && \textit{(car } \varphi(x)>0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

De plus,

× $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ car Φ est une fonction de répartition

× $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$

× $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$

donc

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 + 0 \times 0 = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0.}$$

Commentaire

Le tableau de variations de g n'est pas explicitement demandé, mais il est possible de l'inclure dans la réponse :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$	
Variations de g	0 $\nearrow$	1

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\theta''(x) &= x + \left(1+x^2\right)\theta(x) && \textit{(d'après la question \textbf{3.a)})}\\
&= x + \left(1+x^2\right)\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}\\
&= \frac{1+x^2}{\varphi(x)}\left(\frac{x}{1+x^2}\varphi(x) + \Phi(x)\right)\\
&= \frac{1+x^2}{\varphi(x)} g(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \theta''(x) > 0.}$$

Ensuite, en majorant de manière analogue aux calculs effectués en question ***4.b)*** :

$$\begin{aligned}
&\left|f_h''(x)\right|\\
&= \left|-h'(x) + \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt\right|\\
&\leqslant \left|h'(x)\right| + \left|\theta''(-x)\right|\int_{-\infty}^{x} \left|h'(t)\Phi(t)\right|\ dt + \left|\theta''(x)\right|\int_{x}^{+\infty} \left|h'(t)(1-\Phi(t))\right|\ dt && \textit{(inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant 1 + \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} \left|h'(t)\right|\Phi(t)\ dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} \left|h'(t)\right|(1-\Phi(t))\ dt && \textit{(car } h \in W,\ \theta''(-x) > 0 \textit{ et } \theta''(x) > 0\textit{)}\\
&\leqslant 1 + \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt && \textit{(} h \in W \textit{ et croissance de l'intégrale avec les bornes dans l'ordre croissant)}\\
&\leqslant 1 + 1 = 2 && \textit{(d'après la question \textbf{5.a)})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in \mathbb{R},\ |f_h''(x)| \leqslant 2.}$$

□

Partie 2 - Majoration uniforme de la distance de Kolmogorov

Dans la suite du problème, si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F_X, on définit, pour tout x réel, $d_X(x)$ la distance de Kolmogorov au point x entre la loi de X et la loi normale centrée réduite par :

$$d_X(x) = |F_X(x) - \Phi(x)|$$

On définit, pour tout x réel, la fonction h_x sur $\mathbb{R}$ par $h_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}$.

On définit aussi la fonction γ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 1 \\ 1 - 3t^2 + 2t^3 & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire.

6. Pour tout x réel, quelle est la loi de la variable aléatoire $h_x(X)$? En déduire que $\mathbb{E}(h_x(X))$ existe et vaut $F_X(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction h_x est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc $h_x(X)(\Omega) \subset \{0,1\}$. On en déduit que $h_x(X)$ suit une loi de Bernoulli. Notons r son paramètre. Par définition de r :

$$r = \mathbb{P}([h_x(X) = 1])$$

Montrons que $[h_x(X) = 1] = [X \leqslant x]$.
Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{aligned} \omega \in [h_x(X) = 1] &\iff h_x(X(\omega)) = 1 \\ &\iff X(\omega) \leqslant x \qquad \textit{(par définition de } h_x(t)\textit{, avec } t = X(\omega)\textit{)} \\ &\iff \omega \in [X \leqslant x] \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $[h_x(X) = 1] = [X \leqslant x]$, ce qui donne

$$r = \mathbb{P}([h_x(X) = 1]) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = F_X(x)$$

$$\boxed{\text{Finalement, } h_x(X) \hookrightarrow \mathcal{B}(F_X(x)) \text{, donc } h_x(X) \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(h_x(X)) = F_X(x).}$$

□

7. a) Écrire une fonction **Python** `gamma(t)` qui calcule et renvoie la valeur de $\gamma(t)$, t étant donné.

Démonstration.

```
def gamma(t):
    if t < 0:
        return 1
    elif t > 1:
        return 0
    else:
        return 1 - 3 * t**2 + 2 * t**3
```

Commentaire

- La définition de $\gamma(t)$ par cas impose une structure conditionnelle en **Python**.
- En toute rigueur, `gamma(t)` n'est pas une fonction **Python**. Il vaudrait mieux parler de la fonction `gamma` qui prend en paramètre un réel `t`.

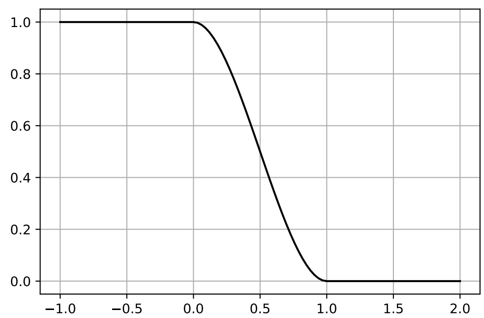
□

b) Utiliser la fonction précédente pour écrire un script qui affiche le graphe de γ sur le segment $[-1, 2]$ dans un repère.

Démonstration.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
abscisse = np.linspace(-1,2,100)
ordonnees = [gamma(t) for t in abscisse]
plt.plot(abscisse, ordonnees)
plt.grid()
```

En exécutant ce script, on obtient le graphe :



Commentaire

Rappelons que le graphe $\mathcal{C}_\gamma$ de γ est un ensemble de points du plan dont la définition précise est :

$$\mathcal{C}_\gamma = \{(t, \gamma(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Le tracé d'un graphe en **Python** se fait en discrétisant l'espace de départ (ici le segment $[-1, 2]$) et en reliant un nombre **fini** de points par des segments de droite. Plus précisément, si

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 2$$

est la discrétisation choisie du segment $[-1, 2]$, on relie alors, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, les points $(x_k, \gamma(x_k))$ et $(x_{k+1}, \gamma(x_{k+1}))$. On obtient alors une représentation approchée du graphe de γ.
La commande `np.linspace(-1,2,100)` produit le tableau

$$[x_0,\ \ldots,\ x_{99}]$$

contenant 100 nombres rangés dans l'ordre croissant et régulièrement espacés tels que le plus petit nombre est -1 et le plus grand nombre est 2. On a donc, pour tout $k \in [\![0, 98]\!]$,

$$x_{k+1} - x_k = \frac{2-(-1)}{99} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$$

La commande `[gamma(t) for t in abscisse]` construit alors la liste

$$[\gamma(x_0),\ \ldots,\ \gamma(x_{99})]$$

La commande `plt.plot(abscisse, ordonnees)` permet le tracé du graphe à partir des points de coordonnées $(x_k, \gamma(x_k))$ précédemment construits.
Pour finir, la commande `plt.grid()` trace des lignes horizontales et verticales permettant de mieux visualiser les valeurs prises par la fonction γ, ce qui donne notre repère.

□

8. a) Montrer que γ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et 1.

Démonstration.

- La fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$:
  - × sur l'intervalle **ouvert** $]-\infty, 0[$ car constante sur cet intervalle
  - × sur l'intervalle **ouvert** $]1, +\infty[$ car constante sur cet intervalle
  - × sur l'intervalle **ouvert** $]0, 1[$ car polynomiale sur cet intervalle

  Ainsi,

$$\boxed{\gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ privé de 0 et 1.}}$$

Il reste à montrer que γ est continue en 0 et en 1.

- Montrons que la fonction γ est continue en 0 :
  - × $\gamma(0) = 1$
  - × $\lim\limits_{t \to 0^-} \gamma(t) = 1$
  - × $\lim\limits_{t \to 0^+} \gamma(t) = 1$

$$\boxed{\text{donc } \gamma \text{ est continue en 0.}}$$

- Montrons que la fonction γ est continue en 1 :
  - × $\gamma(1) = 1 - 3 + 2 = 0$
  - × $\lim\limits_{t \to 1^-} \gamma(t) = 1 - 3 + 2 = 0$

× $\lim\limits_{t \to 1^+} \gamma(t) = 0$

$$\boxed{\text{donc } \gamma \text{ est continue en } 1.}$$

□

b) Étudier les variations de γ sur $[0,1]$ et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in [0,1]$.

Démonstration.
D'après la question précédente, γ est dérivable sur $]0,1[$. Soit $t \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= -6t + 6t^2 \\ &= 6t(t-1)\end{aligned}$$

Comme $6t > 0$ et $t - 1 < 0$, alors $\gamma'(t) < 0$.
On en déduit que γ est strictement décroissante sur $]0,1[$.
De plus, γ est continue sur $[0,1]$,

$$\boxed{\text{donc } \gamma \text{ est strictement décroissante sur } [0,1].}$$

Le tableau de variations de γ est :

t	0		1
Signe de $\gamma'(t)$	‖	$-$	‖
Variations de γ	1	$\searrow$	0

D'après ce tableau de variations, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) \in [0,1]$.
De plus, pour tout $t < 0$, $\gamma(t) = 1 \in [0,1]$ et pour tout $t > 1$, $\gamma(t) = 0 \in [0,1]$.

$$\boxed{\text{D'où, pour tout } t \in \mathbb{R},\ \gamma(t) \in [0,1].}$$

□

c) Établir que γ est dérivable en 1 et que $\gamma'(1) = 0$.
On montrerait de même que γ est dérivable en 0 et que $\gamma'(0) = 0$. On l'admet.

Démonstration.
Soit $t \neq 1$. Puisque $\gamma(1) = 0$, on a $\dfrac{\gamma(t) - \gamma(1)}{t-1} = \dfrac{\gamma(t)}{t-1}$.
Deux cas se présentent.

- Premier cas : $t > 1$

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(1)}{t-1} = \frac{0}{t-1} = 0$$

donc $\lim\limits_{t \to 1^+} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(1)}{t-1} = 0$.

- Deuxième cas : $0 < t < 1$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma(t)-\gamma(1)}{t-1} &= \frac{1-3t^2+2t^3}{t-1}\\ &= \frac{(t-1)(2t^2-t-1)}{t-1}\\ &= 2t^2-t-1\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(1)}{t-1} = 2-1-1=0$.

Finalement : $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\gamma(t)-\gamma(1)}{t-1} = 0$

$$\boxed{\text{donc } \gamma \text{ est dérivable en 1 et } \gamma'(1)=0.}$$

□

d) Justifier que γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout t réel $|\gamma'(t)| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Démonstration.
On a vu dans les questions précédentes que

× γ est dérivable sur $\mathbb{R}$

× γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et 1.

Il reste à montrer que γ' est continue en 0 et en 1.

- Montrons que la fonction γ' est continue en 0 :
  × pour tout $t<0$, $\gamma'(t)=0$ donc $\lim\limits_{t\to 0^-} \gamma'(t) = 0 = \gamma'(0)$
  × pour tout $0<t<1$, $\gamma'(t)=6t(t-1)$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \gamma'(t) = 0 = \gamma'(0)$
- Montrons que la fonction γ' est continue en 1 :
  × pour tout $0<t<1$, $\gamma'(t)=6t(t-1)$ donc $\lim\limits_{t\to 1^-} \gamma'(t) = 0 = \gamma'(1)$
  × pour tout $t>1$, $\gamma'(t)=0$ donc $\lim\limits_{t\to 1^+} \gamma'(t) = 0 = \gamma'(1)$

$$\boxed{\text{Donc } \gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $t\in\mathbb{R}$.

× Si $t\leqslant 0$, alors $\gamma'(t)=0$ et donc $|\gamma'(t)| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

× Si $t\geqslant 1$, alors $\gamma'(t)=0$ et donc $|\gamma'(t)| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

× Si $0<t<1$, alors $\gamma'(t)=6t(t-1)$.
Or, l'inégalité $p(1-p)\leqslant \dfrac{1}{4}$ valable pour tout $p\in[0,1]$ est classique et on en déduit :

$$\begin{aligned}\left|\gamma'(t)\right| &= |6t(t-1)| = 6\,|t|\,|1-t| = 6t(1-t) && \textit{(car } 0<t<1\textit{)}\\ &\leqslant 6\times\frac{1}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien, pour tout } t \text{ réel, } |\gamma'(t)| \leqslant \frac{3}{2}.}$$

Commentaire

La question ***8*** est découpée en quatre sous-questions qui permettent de bien guider les candidat·es. Elle ne présente aucune difficulté particulière pour un·e élève sérieux·se qui a travaillé ses définitions de première année. Il faut apprendre à reconnaître de telles questions qui peuvent être « cachées » au milieu de questions beaucoup plus difficiles. Puisque le raisonnement est guidé et que les résultats sont dans l'énoncé, on peut s'attendre à ce que la majeure partie du barème soit allouée à la précision de l'argumentation. Il est impensable d'arriver aux concours sans savoir étudier avec rigueur la régularité d'une fonction définie par morceaux.

□

On suppose dans la suite de cette partie que X admet une espérance et on considère un réel M_X qui vérifie, pour tout $h \in W$, $|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| \leqslant M_X$.

Commentaire

Détaillons un peu l'argument de la preuve de l'existence de M_X. On suppose seulement que X admet une espérance. Soit $h \in W$. D'après la question ***2.a)***,

$$|h(X) - h(N)| \leqslant |X - N| \leqslant |X| + |N|$$

On remarque ensuite :

× si Y est une variable aléatoire, alors Y admet une espérance si et seulement si $|Y|$ admet une espérance.

(Le programme d'ECG maths appliquées permet de faire la preuve dans le cas discret ou le cas à densité, mais pas dans le cas général. Il s'agit essentiellement d'une traduction de la définition qui demande une convergence absolue.)

× en cas d'existence, par inégalité triangulaire :

$$|\mathbb{E}(Y)| \leqslant \mathbb{E}(|Y|)$$

(Ici l'ingrédient essentiel est la croissance de l'espérance, qui est valable dans le cas général)

Puisque X et N admettent chacune une espérance, toutes les variables aléatoires en jeu admettent une espérance (en particulier, on utilise le résultat admis en début d'énoncé pour $h(X)$ et $h(N)$) et on peut écrire, par linéarité et par croissance de l'espérance :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| &= |\mathbb{E}(h(X) - h(N))| \\ &\leqslant \mathbb{E}(|h(X) - h(N)|) \\ &\leqslant \mathbb{E}(|X| + |N|) \\ &\leqslant \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|N|) \end{aligned}$$

On pose alors $M_X = \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|N|)$, qui ne dépend pas de h et qui vérifie bien la propriété voulue. Le concepteur a sans doute fait le choix de ne pas tester les candidat·es sur ce raisonnement abstrait, préférant poser d'autres questions. Il aurait peut être été préférable d'écrire, pour éviter toute ambiguïté :

On suppose dans la suite de cette partie que X admet une espérance. On admet alors qu'il existe un réel M_X qui vérifie, pour tout $h \in W$, $|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| \leqslant M_X$.

9. Soit $t > 0$ et x un réel. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose $k_x(y) = \gamma\left(\dfrac{y - x}{t}\right)$.

a) Montrer que pour tout y réel, $h_x(y) \leqslant k_x(y)$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Premier cas : $y \leqslant x$. Alors
  × $h_x(y) = 1$.
  × $y - x \leqslant 0$ et $t > 0$ donc $\dfrac{y-x}{t} \leqslant 0$ donc $k_x(y) = \gamma\left(\dfrac{y-x}{t}\right) = 1$ par définition de γ.

  On a bien $h_x(y) \leqslant k_x(y)$.
- Deuxième cas : $y > x$. Alors
  × $h_x(y) = 0$.
  × pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\gamma(u) \in [0, 1]$ (d'après la question ***8.b)***) donc $k_x(y) = \gamma\left(\dfrac{y-x}{t}\right) \geqslant 0$.

  On a bien $h_x(y) \leqslant k_x(y)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } y \text{ réel, } h_x(y) \leqslant k_x(y).}$$

□

b) *On admet l'existence de* $\mathbb{E}(k_x(X))$ *et de* $\mathbb{E}(k_x(N))$. Justifier l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \leqslant \mathbb{E}(k_x(X)) - \mathbb{E}(k_x(N)) + \mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N))$$

Commentaire

On peut démontrer l'existence de $\mathbb{E}(k_x(X))$ et de $\mathbb{E}(k_x(N))$ en utilisant le résultat admis dans le préambule du sujet. On démontre un peu plus loin que $g : u \mapsto \dfrac{2t}{3} k_x(u)$ est une fonction qui appartient à W. Ce résultat pourrait être démontré dès maintenant. On en déduit alors que $g(X)$ et $g(N)$ existent. Or, $k_x(X)$ (resp. $k_x(N)$) est une transformée affine de $g(X)$ (resp. $g(N)$) donc $k_x(X)$ et $k_x(N)$ admettent également une espérance.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. D'après la question précédente :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ h_x(y) \leqslant k_x(y)$$

En évaluant en $y = X(\omega)$, on obtient :

$$h_x(X(\omega)) \leqslant k_x(X(\omega))$$

Ceci étant vrai pour tout $\omega \in \Omega$:

$$[h_x(X) \leqslant k_x(X)] = \Omega$$

et, a fortiori :

$$\mathbb{P}([h_x(X) \leqslant k_x(X)]) = 1$$

Ainsi, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}(h_x(X)) \leqslant \mathbb{E}(k_x(X))$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) &\leqslant \mathbb{E}(k_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \\ &= \mathbb{E}(k_x(X)) - \mathbb{E}(k_x(N)) + \mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N))\end{aligned}$$

Commentaire

Il peut paraître assez surprenant de rajouter un terme « qui ne sert à rien » de manière artificielle à la toute fin, alors qu'on aurait pu s'arrêter à la majoration

$$\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \leqslant \mathbb{E}(k_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))$$

Cette opération est en fait assez courante lorsque l'on souhaite majorer une différence de deux termes qui diffèrent de deux paramètres (premier paramètre : la fonction k_x ou la fonction h_x, deuxième paramètre : la variable aléatoire X ou la variable aléatoire N). On diminue la difficulté en ne faisant varier qu'un seul paramètre à la fois, mais on a alors deux termes à majorer. C'est ce que fait le sujet en nous faisant majorer le terme $\mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N))$ dès la question suivante.
De manière plus abstraite, on écrit souvent

$$f(x, y) - f(a, b) = (f(x, y) - f(x, b)) + (f(x, b) - f(a, b))$$

et on majore alors le terme $f(x, y) - f(x, b)$ puis le terme $f(x, b) - f(a, b)$ afin d'obtenir une majoration de $f(x, y) - f(a, b)$.

☐

c) Montrer que $\mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N)) = \displaystyle\int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du$.

Démonstration.
Calculons tout d'abord les deux termes $\mathbb{E}(k_x(N))$ et $\mathbb{E}(h_x(N))$ séparément.

- La fonction k_x est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de γ et d'une fonction affine toutes les deux continues sur $\mathbb{R}$ (d'après la question ***8.a)***). De plus, il est admis que $k_x(N)$ admet une espérance. Par théorème de transfert, il vient que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_x(u)\varphi(u)du$ est absolument convergente et vérifie :

$$\mathbb{E}(k_x(N)) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_x(u)\varphi(u)du$$

  Pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} k_x(u) = 0 &\iff \gamma\left(\frac{u-x}{t}\right) = 0 \\ &\iff \frac{u-x}{t} \geqslant 1 && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.}}\textit{)} \\ &\iff u - x \geqslant t && \textit{(car } t > 0\textit{)} \\ &\iff u \geqslant x + t \end{aligned}$$

  donc

$$\mathbb{E}(k_x(N)) = \int_{-\infty}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h_x(N)) &= F_N(x) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\ &= \Phi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du \end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
k_x(u) = 1 &\iff \gamma\left(\frac{u-x}{t}\right) = 1 \\
&\iff \frac{u-x}{t} \leqslant 0 && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.}}\textit{)} \\
&\iff u - x \leqslant 0 && \textit{(car } t > 0\textit{)} \\
&\iff u \leqslant x
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}(h_x(N)) = \int_{-\infty}^{x} 1 \times \varphi(u)du = \int_{-\infty}^{x} k_x(u)\varphi(u)du$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N)) = \int_{-\infty}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du - \int_{-\infty}^{x} k_x(u)\varphi(u)du = \int_{x}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du}$$

Commentaire

Cette question est difficile car elle demande une prise d'initiative : faire apparaître le terme $k_x(u)$ là où il n'est pas naturellement.
La première idée doit être de penser au théorème de transfert lorsqu'on doit montrer une égalité entre une espérance et une intégrale. A partir de là, il faut s'efforcer de faire apparaître les termes de la formule de fin. Une bonne approche est de conjecturer des égalités au brouillon qui permettraient de faire le lien entre la formule que l'on a démontré et celle que l'on cherche à obtenir, puis à vérifier que ces conjectures sont vraies.

□

d) Établir que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g : u \mapsto \dfrac{2t}{3}k_x(u)$, appartient à W. En déduire que :

$$\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \leqslant \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}$$

Démonstration.
La fonction k_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de γ et d'une fonction affine toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (d'après la question ***8.d)***). Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme transformée affine de k_x. Soit $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|g'(u)| &= \left|\frac{2t}{3}k'_x(u)\right| \\
&= \left|\frac{2t}{3}\frac{1}{t}\gamma'\left(\frac{u-x}{t}\right)\right| \\
&= \frac{2}{3}\left|\gamma'\left(\frac{u-x}{t}\right)\right| \\
&\leqslant \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} && \textit{(d'après la question 8.d)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc } g \in W.}$$

D'après l'énoncé, pour tout $h \in W$, $|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| \leqslant M_X$.
On applique ce résultat à la fonction g :

$$|\mathbb{E}(g(X)) - \mathbb{E}(g(N))| \leqslant M_X$$

De plus,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(g(X)) - \mathbb{E}(g(N))| &= \left|\mathbb{E}\left(\frac{2t}{3}k_x(X)\right) - \mathbb{E}\left(\frac{2t}{3}k_x(N)\right)\right| \\
&= \frac{2t}{3}\left|\mathbb{E}\left(k_x(X)\right) - \mathbb{E}\left(k_x(N)\right)\right| \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance et car } t > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left|\mathbb{E}\left(k_x(X)\right) - \mathbb{E}\left(k_x(N)\right)\right| \leqslant \frac{3}{2t}M_X$$

D'après les questions ***9.b)***, ***9.c)*** et ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) &\leqslant \mathbb{E}(k_x(X)) - \mathbb{E}(k_x(N)) + \mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \\
&\leqslant |\mathbb{E}(k_x(X)) - \mathbb{E}(k_x(N))| + \mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \\
&\leqslant \frac{3}{2t}M_X + \int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du
\end{aligned}$$

Il reste à montrer : $\displaystyle\int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du \leqslant \frac{t}{\sqrt{2\pi}}$.
On le fait en appliquant à deux reprises la croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($t > 0$ donc $x \leqslant x+t$) :

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du &\leqslant \left|\int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du\right| \\
&\leqslant \int_x^{x+t} |k_x(u)\varphi(u)|\,du \qquad \textit{(par inégalité triangulaire et car } x \leqslant x+t\textit{)} \\
&\leqslant \int_x^{x+t} |k_x(u)|\,|\varphi(u)|\,du \\
&\leqslant \int_x^{x+t} |k_x(u)|\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du \\
&\leqslant \int_x^{x+t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad \textit{(}|k_x(u)| \leqslant 1 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{8.b)}}\textit{)} \\
&\leqslant \int_x^{x+t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}du \qquad \textit{(}-\frac{u^2}{2} \leqslant 0 \textit{ donc } e^{-\frac{u^2}{2}} \leqslant 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}((x+t) - x) \\
&= \frac{t}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \leqslant \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{\sqrt{2\pi}}.}$$

Ensuite, $\pi \geqslant 3$ donc $2\pi \geqslant 6 \geqslant 4$ donc $\sqrt{2\pi} \geqslant \sqrt{4} = 2$ donc $\dfrac{t}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \dfrac{t}{2}$ (car $t > 0$).

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}.}$$

$\square$

On admet de même, qu'en utilisant la fonction k_{x-t}, on a :

$$\mathbb{E}(h_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(X)) \leqslant \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}$$

10. En étudiant la fonction $t \mapsto \dfrac{3}{2t}M_X + \dfrac{t}{2}$ sur $]0, +\infty[$, en déduire que, pour tout x réel,

$$|\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))| \leqslant \sqrt{3M_X}, \text{ puis que } d_X(x) \leqslant \sqrt{3M_X} \qquad (R_2)$$

Démonstration.
Notons $\psi : t \mapsto \dfrac{3}{2}M_X\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2}t$. La fonction ψ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= -\frac{3}{2t^2}M_X + \frac{1}{2} \\
&= \frac{t^2 - 3M_X}{2t^2} \\
&= \frac{(t - \sqrt{3M_X})(t + \sqrt{3M_X})}{2t^2} && \textit{(car } M_X \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\psi'(t) \geqslant 0 &\iff \frac{(t - \sqrt{3M_X})(t + \sqrt{3M_X})}{2t^2} \geqslant 0 \\
&\iff t - \sqrt{3M_X} \geqslant 0 && \textit{(car } 2t^2 > 0 \textit{ et } t + \sqrt{3M_X} \geqslant 0\textit{)} \\
&\iff t \geqslant \sqrt{3M_X}
\end{aligned}$$

et, de plus,

$$\psi(\sqrt{3M_X}) = \frac{3M_X}{2\sqrt{3M_X}} + \frac{\sqrt{3M_X}}{2} = \frac{\sqrt{3M_X}}{2} + \frac{\sqrt{3M_X}}{2} = \sqrt{3M_X}$$

Le tableau de variations de ψ est donc :

t	0		$\sqrt{3M_X}$		$+\infty$
Signe de $\psi'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de ψ	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{3M_X}$	↗	$+\infty$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question ***9.d)***, l'encadrement

$$-\psi(t) \leqslant \mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \leqslant \psi(t)$$

est valable pour tout réel $t > 0$.

Autrement dit, l'inégalité

$$|\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))| \leqslant \psi(t)$$

est valable pour tout réel $t > 0$.
On peut donc choisir $t = \sqrt{3M_X}$ (avec $M_X > 0$) et obtenir :

$$\boxed{|\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))| \leqslant \psi(\sqrt{3M_X}) = \sqrt{3M_X}}$$

Il reste à interpréter le terme de gauche. D'après la question ***6.***,

$$\mathbb{E}(h_x(X)) = F_X(x) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(h_x(N)) = F_N(x) = \Phi(x)$$

$$\boxed{\text{d'où, pour tout } x \text{ réel, } d_X(x) = |F_X(x) - \Phi(x)| = |\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))| \leqslant \sqrt{3M_X}.}$$

Commentaire

Insistons sur ce qui nous apparaît être une subtilité dans cette question. On pourrait croire à la première lecture de l'énoncé que l'étude de la fonction ψ va nous donner :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) \leqslant \sqrt{3M_X}$$

Après tout, un tel résultat permettrait de conclure à l'inégalité voulue, et beaucoup de questions de majorations se résolvent ainsi. C'est pourtant le contraire que l'on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) \geqslant \sqrt{3M_X}$$

Lorsque l'on trouve le contraire de ce que l'on escomptait, il faut se relire pour débusquer une éventuelle erreur de signe. Ici, il ne s'agit pourtant pas d'une erreur. Il faut alors réfléchir aux rôles que jouent les différentes variables en présence. La quantité $|\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))|$ dépend de x, de X et de N, mais pas de t. Le réel t a été fixé de manière arbitraire dans $]0, +\infty[$ au début de la question ***9***. Ainsi, on peut reformuler le résultat de la question ***9.d)*** en : pour tout $t > 0$, $|\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))| \leqslant \psi(t)$. On **choisit** alors le réel t de sorte à obtenir le plus petit majorant possible. D'après l'étude de la fonction ψ, il s'agit du réel $t = \sqrt{3M_X}$ (c'est le point en lequel ψ atteint son minimum).

$\square$

Partie 3 - Estimation d'une densité

On considère X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F et de densité de probabilité f qui dépendent d'un paramètre inconnu θ, où $\theta \in \Theta$, Θ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit a un point de continuité de f, fixé. On souhaite estimer $f(a)$.

Par exemple, si X suit la loi exponentielle de paramètre θ et $a > 0$, on souhaite estimer $\theta e^{-\theta a}$.

On dispose pour tout $\theta \in \Theta$, d'une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$ indépendantes de même loi que X.

On choisit une suite $(h_n)_{n \geqslant 1}$ de réels strictement positifs tels que :

$$\lim_{n \to +\infty} h_n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} nh_n = +\infty$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\omega \in \Omega$, on définit :

$$C_n(\omega) \text{ comme le nombre d'indices } i \in [\![1, n]\!] \text{ tels que } X_i(\omega) \in \,]a - h_n, a + h_n]$$

et $f_n(\omega) = \dfrac{1}{2nh_n} C_n(\omega)$.

Commentaire

Deux difficultés se présentent en ce début de partie 3.

- L'objet C_n n'est pas défini comme une variable aléatoire mais comme une application définie sur Ω. Il aurait sans doute été judicieux d'admettre explicitement qu'on définit bien ainsi une variable aléatoire.
- La notation f_n peut faire penser à une fonction d'une variable réelle (d'ailleurs la notation f est utilisée pour parler d'une densité donc d'une fonction d'une variable réelle), mais c'est bien à nouveau une variable aléatoire qui est définie ici. De plus, si doute il y avait, la question ***13.*** parle de son espérance et de sa variance. Lorsqu'une notation n'est pas usuelle, il peut être pertinent d'écrire explicitement de quel type d'objet il s'agit à la première lecture du sujet, pour éviter de futures confusions.

11. On suppose que l'on dispose d'un fichier `stats.csv` qui comporte une colonne nommée `salaire`. On considère que les valeurs de cette colonne constituent la réalisation d'un échantillon de la loi de X dont la taille dépasse 10000.

a) Après avoir exécuté `import pandas as pd`, quelle(s) instruction(s) permet(tent) de lire dans le fichier `stats.csv` les valeurs de la colonne `salaire` et d'affecter cette série `pandas` obtenue à une variable `échantillon` ?

On supposera que le fichier `stats.csv` se trouve dans le répertoire de travail.

Démonstration.

```
donnees = pd.read_csv('stats.csv')
échantillon = donnees['salaire']
```

□

b) On souhaite calculer et afficher $f_n(\omega)$ pour a donné, lorsque la réalisation d'un échantillon $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ de la loi de X est représentée en **Python** par `échantillon` et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Compléter le script suivant pour qu'il réalise cette tâche.

```
a = float(input('a='))
n = échantillon.count()
h = 1 / np.sqrt(n)
C = 0
for i in range(n):
    if ... and ...:
        ... += 1
print(C / ...)
```

Démonstration.

```
a = float(input('a='))
n = échantillon.count()
h = 1 / np.sqrt(n)
C = 0
for i in range(n):
    if échantillon[i] > a - h and échantillon[i] <= a + h:
        C += 1
print(C / (2 * n * h))
```

Commentaire

Il est indiqué dans le programme officiel que les commandes de la librairie `pandas` ne sont pas exigibles. On peut s'attendre à ce que la majorité des points soient donnés si la syntaxe est incorrecte mais que la compréhension du fonctionnement du script est bonne.

□

12. Montrer que C_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p_n) en précisant l'expression de p_n en fonction de a et h_n.

En déduire que $\mathbb{E}(f_n)$ existe et vaut : $\dfrac{F(a+h_n) - F(a-h_n)}{2h_n}$.

Démonstration.

Notons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \; Z_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) \in \,]a - h_n, a + h_n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

× Les variables aléatoires Z_i suivent toutes la même loi de Bernoulli, de paramètre

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}\left([Z_i = 1]\right) \\ &= \mathbb{P}\left([X_i \in \,]a - h_n, a + h_n]]\right) \\ &= \mathbb{P}\left([X \in \,]a - h_n, a + h_n]]\right) && \textit{(car X_i suit la même loi que X)} \\ &= \mathbb{P}([a - h_n < X \leqslant a + h_n]) \\ &= F(a + h_n) - F(a - h_n) \end{aligned}$$

× Les variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes, donc, par lemme des coalitions, les variables aléatoires $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont également mutuellement indépendantes.

On remarque maintenant que $C_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$ et donc, d'après les deux points précédents :

$$\boxed{C_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, p_n\right) \text{ où } p_n = F(a + h_n) - F(a - h_n).}$$

La variable aléatoire C_n admet une espérance. On en déduit que f_n admet une espérance en tant que transformée affine de C_n et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2nh_n}C_n\right) \\
&= \frac{1}{2nh_n}\mathbb{E}(C_n) && \textit{(par linéarité)} \\
&= \frac{1}{2\cancel{n}h_n}\cancel{n}p_n \\
&= \frac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{2h_n}
\end{aligned}$$

Commentaire

On peut faire dans cette question un peu de rétro-ingénierie et s'aider du résultat donné dans l'énoncé pour trouver p_n si on bloque sur le calcul.
L'énoncé nous donne : $\mathbb{E}(f_n) = \dfrac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{2h_n}$.
On cherche p_n et on sait que $\mathbb{E}(C_n) = np_n$. Or, $f_n = \dfrac{1}{2nh_n}C_n$ donc $C_n = 2nh_nf_n$.
D'où, en passant à l'espérance :

$$np_n = 2nh_n\frac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{2h_n} = n(F(a+h_n)-F(a-h_n))$$

ce qui donne :

$$p_n = F(a+h_n)-F(a-h_n)$$

□

13. a) En utilisant la dérivabilité de F en a, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f_n) = f(a)$.

Démonstration.
La fonction f est continue en a donc F est dérivable en a. La fonction F admet alors un développement limité à l'ordre 1 au point a qui s'écrit :

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \underset{h\to 0}{o}(h) = F(a) + hf(a) + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

Puisque $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& F(a+h_n) = F(a) + h_nf(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n) \\
\text{et} \qquad & F(a-h_n) = F(a) - h_nf(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n)
\end{aligned}$$

Par différence :

$$F(a+h_n)-F(a-h_n) = 2h_nf(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n)$$

Ainsi, en multipliant par $\dfrac{1}{2h_n}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f_n) &= \frac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{2h_n} \\
&= \frac{2h_nf(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n)}{2h_n} \\
&= f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc on a bien : } \mathbb{E}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a).}$$

□

b) Montrer que $\mathbb{V}(f_n)$ existe et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(f_n) = 0$.

Démonstration.
La variable aléatoire C_n admet une variance. On en déduit que f_n admet une variance en tant que transformée affine de C_n. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(f_n) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{2nh_n}C_n\right) \\
&= \frac{1}{(2nh_n)^2}\mathbb{V}(C_n) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{(2nh_n)^2}np_n(1-p_n) && \textit{(car } C_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)\textit{)} \\
&= \frac{1-p_n}{2nh_n}\frac{p_n}{2h_n} \\
&= \frac{1-p_n}{2nh_n}\mathbb{E}(f_n)
\end{aligned}$$

Or, on a vu à la question ***13.a)*** que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathbb{E}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
De plus, par hypothèse, $nh_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{Il vient alors : } \mathbb{V}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times f(a) = 0.}$$

□

On suppose désormais, que $f(a) > 0$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in]0,1[$, que F est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a et que $\lim\limits_{n\to+\infty} nh_n^3 = 0$.

On note pour tout $n \geqslant 1$, $\sigma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$ et $\theta_n = \sqrt{2h_n f(a)}$.

On définit les variables aléatoires : $D_n = \dfrac{C_n - np_n}{\sigma_n}$ et $\hat{f}_n = \dfrac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}(f_n - f(a))$.

14. a) En utilisant le développement limité de F à l'ordre 2 au point a, montrer que :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} 2h_n f(a) + o(h_n^2) \underset{n\to+\infty}{=} \theta_n^2 + o(h_n^2)$$

Démonstration.
F est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a donc admet un développement limité d'ordre 2 au point a qui s'écrit :

$$\begin{aligned} F(a+h) &= F(a) + hF'(a) + \frac{1}{2}h^2 F''(a) + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \\ &= F(a) + hf(a) + \frac{1}{2}h^2 F''(a) + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \end{aligned}$$

Puisque $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire :

$$F(a+h_n) = F(a) + h_n f(a) + \frac{1}{2}h_n^2 F''(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2)$$

$$\text{et} \qquad F(a-h_n) = F(a) - h_n f(a) + \frac{1}{2}h_n^2 F''(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2)$$

Par différence :

$$F(a+h_n) - F(a-h_n) = 2h_n f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2)$$

D'après la question ***12.*** :

$$\begin{aligned} p_n &= F(a+h_n) - F(a-h_n) \\ &= 2h_n f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2) \\ &= \theta_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2) \qquad \textit{(par définition de } \theta_n\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } p_n \underset{n\to+\infty}{=} 2h_n f(a) + o(h_n^2) \underset{n\to+\infty}{=} \theta_n^2 + o(h_n^2)}$$

□

b) En déduire que : $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2h_n f(a)$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = +\infty$.

Démonstration.
On a, d'après la question précédente :

$$p_n = 2h_n f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2)$$

Or, $f(a) > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n > 0$, donc :

$$\frac{p_n}{2h_n f(a)} = \frac{2h_n f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2)}{2h_n f(a)} = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n)$$

De plus, $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $1 + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\dfrac{p_n}{2h_n f(a)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{\text{D'où : } p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2h_n f(a).}$$

On en déduit :

$$np_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2nh_n f(a)$$

Or, $2f(a) > 0$ et $nh_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par produit, $2nh_n f(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{Finalement : } np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

□

c) Montrer que $\hat{f}_n = \dfrac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} D_n + \sqrt{n}\left(\dfrac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right)$ et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} = 1 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) = 0$$

Démonstration.

- D'une part :

$$\begin{aligned}
\hat{f}_n &= \frac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}\left(f_n - f(a)\right) \\
&= \frac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)} f_n - \theta_n\sqrt{n} \\
&= \frac{\theta_n\sqrt{n}C_n}{2nh_n f(a)} - \theta_n\sqrt{n} && \textit{(par définition de } f_n\textit{)} \\
&= \frac{\theta_n\sqrt{n}C_n}{\theta_n^2 n} - \theta_n\sqrt{n} && \textit{(par définition de } \theta_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{\theta_n\sqrt{n}} C_n - \theta_n\sqrt{n}
\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} D_n + \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) &= \frac{C_n - np_n}{\theta_n\sqrt{n}} + \sqrt{n}\frac{p_n - \theta_n^2}{\theta_n} && \textit{(par définition de } D_n\textit{)} \\
&= \frac{C_n - np_n}{\theta_n\sqrt{n}} + n\frac{p_n - \theta_n^2}{\theta_n\sqrt{n}} \\
&= \frac{C_n - \cancel{np_n} + \cancel{np_n} - n\theta_n^2}{\theta_n\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\theta_n\sqrt{n}} C_n - \frac{n\theta_n^2}{\theta_n\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\theta_n\sqrt{n}} C_n - \theta_n\sqrt{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \hat{f}_n = \frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} D_n + \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right).}$$

- De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{np_n(1-p_n)}}{\theta_n\sqrt{n}} && \textit{(par définition de } \sigma_n\textit{)}\\
&= \frac{\sqrt{p_n(1-p_n)}}{\theta_n}\\
&= \frac{\sqrt{p_n(1-p_n)}}{\sqrt{2h_nf(a)}} && \textit{(par définition de } \theta_n\textit{)}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{p_n(1-p_n)}}{\sqrt{p_n}} && \textit{(d'après la question } \textbf{14.b}\textit{))}\\
&= \sqrt{1-p_n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puisque } p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\text{, il vient : } \frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$$

- Enfin,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n}-\theta_n\right) &= \sqrt{n}\frac{p_n-\theta_n^2}{\theta_n}\\
&= \sqrt{n}\frac{\underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2)}{\sqrt{2h_nf(a)}} && \textit{(d'après la question } \textbf{14.a}\textit{))}\\
&= \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{n}h_n^{\frac{3}{2}}\right) && \textit{(car } 2f(a) \textit{ est une constante)}\\
&= \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{nh_n^3}\right)
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $nh_n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sqrt{nh_n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n}-\theta_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Commentaire

Le nombre de notations intervenant dans la formule $\hat{f}_n = \dfrac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}}D_n + \sqrt{n}\left(\dfrac{p_n}{\theta_n}-\theta_n\right)$ et sa preuve est assez impressionnant. Il est difficile dans ces conditions de trouver du premier coup comment faire un calcul direct en partant d'un terme et en arrivant à l'autre.
La meilleure méthode dans ces cas là est souvent de calculer et de simplifier les deux termes en parallèle au brouillon, en essayant de tout exprimer à l'aide d'un nombre minimal de notations (ici nous avons choisi de tout exprimer à l'aide de C_n et θ_n).
Il est normal pour un calcul difficile comme celui-ci de devoir tester plusieurs pistes. Le résultat étant donné dans l'énoncé, il ne faut pas hésiter à l'admettre si l'intuition ne vient pas après quelques échecs.

□

On admet, dans la suite de cette partie, que $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers N ce qui implique que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, avec $x\leqslant y$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(x\leqslant \hat{f}_n\leqslant y)=\Phi(y)-\Phi(x)$$

15. Soit $\alpha\in\,]0,1[$. On pose $\eta_\alpha=t_\alpha^2$ où t_α est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale $(0,1)$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left((f(a))^2-\left(2f_n+\frac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right)f(a)+f_n^2\leqslant 0\right)=1-\alpha$.

Démonstration.
Par définition $\Phi(t_\alpha)=1-\dfrac{\alpha}{2}$. De plus, $\alpha\in\,]0,1[$ donc $\Phi(t_\alpha)>\dfrac{1}{2}$. D'où $t_\alpha>0$.
De plus,

$$\begin{aligned}
&\left[(f(a))^2-\left(2f_n+\frac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right)f(a)+f_n^2\leqslant 0\right]\\
&=\left[(f(a))^2-2f_nf(a)-\frac{\eta_\alpha}{2nh_n}f(a)+f_n^2\leqslant 0\right]\\
&=\left[(f_n-f(a))^2-\frac{\eta_\alpha}{2nh_n}f(a)\leqslant 0\right]\\
&=\left[(f_n-f(a))^2\leqslant \frac{\eta_\alpha}{2nh_n}f(a)\right]\\
&=\left[(f_n-f(a))^2\leqslant \frac{t_\alpha^2}{2nh_n}f(a)\right] && \textit{(par définition de } \eta_\alpha\textit{)}\\
&=\left[\left(\frac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}(f_n-f(a))\right)^2\leqslant \frac{n\theta_n^2}{f(a)^2}\frac{t_\alpha^2}{2nh_n}f(a)\right] && \textit{(en multipliant par } \frac{n\theta_n^2}{f(a)^2}\geqslant 0\textit{)}\\
&=\left[\hat{f}_n^2\leqslant \frac{2nh_nf(a)}{f(a)^2}\frac{t_\alpha^2}{2nh_n}f(a)\right] && \textit{(par définition de } \hat{f}_n \textit{ et } \theta_n\textit{)}\\
&=\left[\hat{f}_n^2\leqslant t_\alpha^2\right]\\
&=\left[-t_\alpha\leqslant \hat{f}_n\leqslant t_\alpha\right] && \textit{(car } t_\alpha\geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Par convergence en loi de $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ vers N, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left[-t_\alpha\leqslant \hat{f}_n\leqslant t_\alpha\right]\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\Phi(t_\alpha)-\Phi(-t_\alpha)=2\Phi(t_\alpha)-1=1-\alpha$$

$$\boxed{\text{D'où : }\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left((f(a))^2-\left(2f_n+\frac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right)f(a)+f_n^2\leqslant 0\right)=1-\alpha.}$$

Commentaire

On commence à construire dans cette question un intervalle de confiance asymptotique pour $f(a)$ au niveau de confiance $1-\alpha$.
Il faut donc nécessairement faire apparaître $\hat{f}_n$ et t_α pour utiliser la convergence en loi qui est admise.
On se souvient alors que

$$\hat{f}_n = \frac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}(f_n - f(a))$$

donc il faut faire apparaître le terme $f_n - f(a)$.
On fait le lien avec les termes $(f(a))^2$ et f_n^2 qui font penser au développement de $(f_n - f(a))^2$.

$\square$

b) On note, pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = \sqrt{\left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 - f_n^2}$.

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(f(a) \in \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]\right) = 1-\alpha$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&\left[(f(a))^2 - \left(2f_n + \frac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right) f(a) + f_n^2 \leqslant 0\right] \\
&= \left[(f(a))^2 - 2f(a)\left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right) + f_n^2 \leqslant 0\right] \\
&= \left[\left(f(a) - \left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)\right)^2 - \left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 + f_n^2 \leqslant 0\right] \\
&= \left[\left(f(a) - \left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)\right)^2 \leqslant \left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 - f_n^2\right] \\
&= \left[\left(f(a) - \left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)\right)^2 \leqslant \Delta_n^2\right] \\
&= \left[-\Delta_n \leqslant f(a) - \left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right) \leqslant \Delta_n\right] \\
&= \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n \leqslant f(a) \leqslant f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right] \\
&= \left[f(a) \in \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]\right]
\end{aligned}$$

D'après la question ***15.a)***, on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[f(a) \in \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]\right]\right) = 1-\alpha.}$$

Commentaire

Puisque l'on cherche à construire un intervalle de confiance asymptotique pour $f(a)$ au niveau de confiance $1-\alpha$, il faut réussir à isoler $f(a)$ dans l'événement dont on contrôle la probabilité (celui de la question précédente).
On se rend alors compte que l'expression

$$(f(a))^2 - \left(2f_n + \frac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right) f(a) + f_n^2$$

n'est rien d'autre qu'un trinôme du second degré en $f(a)$. On met donc en place dans cette question le calcul classique de mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré.
D'autre part, soulignons que Δ_n est bien définie. En effet,

$$\begin{aligned}\left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 - f_n^2 &= f_n^2 + 2f_n\frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \left(\frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 - f_n^2 \\ &= 2f_n\frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \left(\frac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

□

Partie 4 - Convergence « uniforme » en loi vers la loi normale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes centrées qui possèdent un moment d'ordre 3. On admet alors que ces variables aléatoires possèdent une variance.

On pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(X_k^2) = v_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $Y_k = S_n - X_k$ et on suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = 1$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, $|f(x)| \leqslant 1$ et $|f''(x)| \leqslant 2$.

On admet que si X et Y sont des variables aléatoires possédant une espérance alors $\mathbb{E}(Yf(X))$ et $\mathbb{E}(f'(X))$ existent.

Commentaire

Insistons à nouveau sur le fait que l'existence d'une espérance n'est jamais immédiate a priori sauf pour les variables aléatoires finies. Il faut donc avoir le réflexe de démontrer l'existence avant de se lancer dans le calcul. Cette remarque est valable pour les trois questions qui suivent.

16. a) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k)) = \mathbb{E}(f'(S_n))$.

Démonstration.

- Les variables aléatoires X_k sont toutes centrées donc possèdent chacune une espérance.
- On en déduit que S_n et Y_k admettent également une espérance comme sommes de variables aléatoires admettant chacune une espérance.
- D'après le résultat admis, $f'(S_n)$ et $f'(Y_k)$ admettent donc une espérance.
  Par suite, $f'(S_n) - f'(Y_k)$ admet une espérance.

- Pour finir, $Y_k = S_n - X_k = X_1 + \cdots + X_{k-1} + X_{k+1} + \cdots + X_n$ donc, par lemme des coalitions, Y_k et X_k sont indépendantes. Toujours par lemme des coalitions, X_k^2 et $f'(Y_k)$ sont aussi indépendantes.
- Comme les variables aléatoires X_k^2 et $f'(Y_k)$ sont indépendantes et admettent chacune une espérance, on peut conclure que $X_k^2 f'(Y_k)$ admet une espérance.
- On peut maintenant faire le calcul :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} v_k (\mathbb{E}(f'(S_n)) - \mathbb{E}(f'(Y_k))) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k)) && \textit{(par linéarité)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k)) \\
&= \mathbb{E}(f'(S_n)) \sum_{k=1}^{n} v_k - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2)\mathbb{E}(f'(Y_k))} + \cancel{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2)\mathbb{E}(f'(Y_k))} && \textit{(car } \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k)) = \mathbb{E}(X_k^2)\mathbb{E}(f'(Y_k)) \textit{ par indépendance)} \\
&= \mathbb{E}(f'(S_n)) && \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} v_k = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

□

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k\,[f(S_n) - f(Y_k)]) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(S_n)) = \mathbb{E}(S_n f(S_n))$.

Démonstration.

- Les variables aléatoires X_k et S_n admettent une espérance donc $X_k f(S_n)$ admet une espérance (cf résultat admis). Par somme $S_n f(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k f(S_n))$ admet aussi une espérance.
- Les variables aléatoires X_k et Y_k admettent une espérance donc $X_k f(Y_k)$ admet une espérance (cf résultat admis).
- Par somme, $X_k f(S_n) - X_k f(Y_k) = X_k(f(S_n) - f(Y_k))$ admet une espérance.
- Les variables Y_k et X_k sont indépendantes donc par lemme des coalitions, $f(Y_k)$ et X_k sont aussi indépendantes.

- On peut maintenant faire le calcul :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big(X_k\big(f(S_n) - f(Y_k)\big)\Big) \\
= & \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(S_n) - X_k f(Y_k)) \\
= & \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}(X_k f(S_n)) - \mathbb{E}(X_k f(Y_k))) && \textit{(par linéarité)} \\
= & \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(Y_k)) \\
= & \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(f(Y_k)) && \textit{(par indépendance)} \\
= & \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(S_n)) && \textit{(car } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{E}(X_k) = 0\textit{)} \\
= & \ \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k f(S_n)\right) && \textit{(par linéarité)} \\
= & \ \mathbb{E}\left(f(S_n) \sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
= & \ \mathbb{E}\left(f(S_n) S_n\right)
\end{aligned}$$

□

c) En déduire que :

$$\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n)) = \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k \left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right)$$

Démonstration.

- Les variables aléatoires $f'(S_n)$ et $S_n f(S_n)$ admettent une espérance donc $f'(S_n) - S_n f(S_n)$ admet une espérance par somme.
- Les variables aléatoires $X_k^2 f'(Y_k)$, $X_k f(S_n)$ et $X_k f(Y_k)$ admettent une espérance donc la variable aléatoire

$$X_k\Big(X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\Big) = X_k^2 f'(Y_k) - X_k f(S_n) + X_k f(Y_k)$$

admet une espérance par somme.

- On peut maintenant faire le calcul :

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n)) \\
= {} & \mathbb{E}(f'(S_n)) - \mathbb{E}(S_n f(S_n)) && \textit{(par linéarité)} \\
= {} & \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k)) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{16.a)}}\textit{)} \\
& \quad - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \, [f(S_n) - f(Y_k)]) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{16.b)}}\textit{)} \\
= {} & \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) \\
& \quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k) - X_k \, [f(S_n) - f(Y_k)]) && \textit{(par linéarité)} \\
= {} & \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) \\
& \quad + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k \left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right)
\end{aligned}
$$

□

17. Soit a et b deux réels.

a) Montrer que :

$$bf'(a) - (f(a+b) - f(a)) = \int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb)) \, dt$$

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \mapsto f'(a+tb)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb)) \, dt$ est bien définie.
Tout d'abord, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb)) \, dt = \int_0^1 bf'(a) \, dt - \int_0^1 bf'(a+tb) \, dt$$

Ensuite, on remarque que $t \mapsto bf'(a+tb)$ est la dérivée de $t \mapsto f(a+tb)$, d'où :

$$\int_0^1 bf'(a+tb) \, dt = [\ f(a+tb)\ ]_0^1 = f(a+b) - f(a)$$

Pour finir :

$$\int_0^1 bf'(a) \, dt = bf'(a)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb)) \, dt = bf'(a) - (f(a+b) - f(a)).}$$

Commentaire

Il ne faut jamais se décourager au cours de l'épreuve car une question facile et indépendante du reste de l'énoncé peut toujours arriver après plusieurs questions (trop) difficiles. C'est le cas de cette question ***17.a)*** qui est un résultat d'analyse. Il faut donc prendre le temps de lire le sujet en début d'épreuve pour repérer les questions qui semblent abordables et leur réserver du temps en fin d'épreuve même si l'on est resté bloqué sur beaucoup de questions précédentes.

□

b) En déduire que :

$$\left|bf'(a) - (f(a+b) - f(a))\right| \leqslant b^2$$

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\left|bf'(a) - (f(a+b) - f(a))\right| &= \left|\int_0^1 \ b(f'(a) - f'(a+tb)) \ dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \ \left|b(f'(a) - f'(a+tb))\right| \ dt \quad \textit{(par inégalité triangulaire, car } 0 \leqslant 1\textit{)}\end{aligned}$$

Soit $t \in [0,1]$.

$$\left|b(f'(a) - f'(a+tb))\right| = |b| \left|f'(a) - f'(a+tb)\right|$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f''(x)| \leqslant 2$, donc par inégalité des accroissements finis :

$$\left|f'(a) - f'(a+tb)\right| \leqslant 2\,|a - (a+tb)| = 2\,|tb| = 2\,|b|\,t \qquad \textit{(car } t \geqslant 0\textit{)}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$), on a

$$\begin{aligned}\left|bf'(a) - (f(a+b) - f(a))\right| &\leqslant \int_0^1 \ \left|b(f'(a) - f'(a+tb))\right| \ dt \\ &\leqslant \int_0^1 \ 2\,|b|^2\,t \ dt \\ &= 2b^2 \int_0^1 \ t \ dt \\ &= 2b^2 \times \frac{1}{2} \\ &= b^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } |bf'(a) - (f(a+b) - f(a))| \leqslant b^2.}$$

□

c) En conclure que :

$$\left|\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n))\right| \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \ v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \ \mathbb{E}(|X_k|^3)$$

puis, grâce à l'inégalité (R_2), que, pour tout x réel :

$$d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3\left(2\sum_{k=1}^{n} \ v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \ \mathbb{E}(|X_k|^3)\right)} \qquad (R_3)$$

Démonstration.
D'après la question ***16.c)*** et par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n))\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |v_k| \left|\mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k))\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|\mathbb{E}\left(X_k \left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} v_k \left|\mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k))\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|\mathbb{E}\left(X_k \left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right)\right|
\end{aligned}$$

En effet, $X_k^2 \geqslant 0$ donc $v_k \geqslant 0$ par positivité de l'espérance.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Majorons maintenant chaque terme séparément.

- D'une part :

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k))\right| &\leqslant \mathbb{E}(\left|f'(S_n) - f'(Y_k)\right|) && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \mathbb{E}(2\,|S_n - Y_k|) && \textit{(par inégalité des accroissements finis et par croissance de l'espérance)} \\
&= 2\mathbb{E}(|X_k|) && \textit{(par linéarité)}
\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left(X_k \ \left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right)\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\Big(\left|X_k \ \left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right|\Big) && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&= \mathbb{E}\Big(\ |X_k| \ \left|X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right|\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\ |X_k| \ \left|X_k f'(Y_k) - (f(Y_k + X_k) - f(Y_k))\right|\Big) \\
&\leqslant \mathbb{E}\Big(\, |X_k| \, X_k^2\Big) && \textit{(d'après la question \textbf{17.b)} et par croissance de l'espérance)} \\
&= \mathbb{E}\left(|X_k|\,|X_k|^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(|X_k|^3\right)
\end{aligned}$$

On en déduit, en sommant toutes ces inégalités, que :

$$\boxed{|\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n))| \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^3).}$$

Notons maintenant

$$M_X = 2\sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^3)$$

Soit $h \in W$. D'après la partie 1, la fonction f_h vérifie :
× f_h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,
× pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_h(x)| \leqslant 1$,
× pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_h''(x)| \leqslant 2$.

On peut donc appliquer la majoration précédente avec $f = f_h$:

$$\left|\mathbb{E}(f_h'(S_n) - S_n f_h(S_n))\right| \leqslant M_X$$

Or, d'après la question ***3.c)*** (la variable S_n admet bien une espérance),

$$|\mathbb{E}(h(S_n)) - \mathbb{E}(h(N))| = \left|\mathbb{E}(f_h'(S_n) - S_n f_h(S_n))\right|$$

On a donc démontré que, pour tout $h \in W$,

$$|\mathbb{E}(h(S_n)) - \mathbb{E}(h(N))| \leqslant M_X$$

On peut donc appliquer la question ***10.*** afin obtenir, pour tout x réel :

$$d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3M_X}$$

Autrement dit : pour tout x réel, $d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3\left(2\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\mathbb{E}(|X_k|) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^3)\right)}$.

Commentaire

- Cette question est à considérer comme très difficile parce qu'elle fait le bilan des deux premières parties ainsi que du début de la quatrième partie. Ainsi, il faut être capable en un temps court de prendre du recul sur les résultats précédemment démontrés au cours de l'épreuve pour les utiliser conjointement.
- La preuve donnée nous semble être dans l'esprit du sujet, mais nous n'avons pas démontré que toutes les espérances écrites existent bien. En particulier, pourquoi $\mathbb{E}(|X_k|^3)$ existe ?
  A nouveau, cela repose sur le résultat suivant :
  « Soit Y une variable aléatoire. Alors Y admet une espérance si et seulement si $|Y|$ admet une espérance. »
  (seul le sens direct est utile ici)
  Nous avons les outils pour faire la preuve dans le cas discret ou le cas à densité, mais pas dans le cas général.
  Ce commentaire est analogue à celui fait au moment de la question ***9***.

□

Une définition - *Dans la suite du sujet, si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles et $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle de limite nulle qui vérifient,*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, d_{X_n}(x) \leqslant \delta_n$$

on dira alors que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N.
On remarque, et on l'admet pour la suite, que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N alors $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers N.

Commentaire

La définition de la convergence (simple) en loi vers N, qui est au programme, s'écrit dans ce contexte (puisque Φ est continue sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, d_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour chaque x fixé, la suite $(d_{X_n}(x))_{n\geqslant 1}$ des distances au point x converge vers 0. La *vitesse de convergence* peut alors dépendre de x. Cela peut poser des problèmes dans certaines preuves, où l'on a besoin que cette vitesse ne dépende pas du point x considéré. C'est à cet effet que l'on introduit la notion de convergence « uniforme ».
Écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, d_{X_n}(x) \leqslant \delta_n$$

c'est affirmer que **toutes** les suites $(d_{X_n}(x))_{n\geqslant 1}$ convergent vers 0 au moins aussi vite que la suite $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ (quelque soit le point x considéré). On a alors une vitesse de convergence uniforme.

18. *Une première application.* On suppose dans cette question que $(Z_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi et admettant des moments d'ordre 1 à 3.

On note pour $i \in [\![1,3]\!]$, $s_i = \mathbb{E}(|Z_k - \mathbb{E}(Z_k)|^i)$, $\sigma = \sqrt{s_2}$ et , $X_k = \dfrac{Z_k - \mathbb{E}(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $\sigma \neq 0$.

On utilise les notations de la question précédente.

a) Montrer que l'on peut appliquer l'inégalité (R_3) qui donne ici :

$$d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3\frac{2\sigma^2 s_1 + s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}}$$

Démonstration.

- Les variables aléatoires Z_k sont indépendantes donc les variables aléatoires $X_k = \dfrac{Z_k - \mathbb{E}(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}$ sont indépendantes par lemme des coalitions.
- Les variables aléatoires Z_k admettent chacune des moments d'ordre 1 à 3 donc les variables aléatoires X_k admettent également chacune des moments d'ordre 1 à 3 (par transformation affine).
- Soit $k \geqslant 1$. Par linéarité :

$$\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}\left(\frac{Z_k - \mathbb{E}(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathbb{E}\left(Z_k - \mathbb{E}(Z_k)\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\mathbb{E}(Z_k) - \mathbb{E}(Z_k)) = 0$$

donc les variables aléatoires X_k sont centrées.

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} v_k &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\left(\frac{Z_k - \mathbb{E}(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sigma^2}\mathbb{E}\left((Z_k - \mathbb{E}(Z_k))^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ns_2} s_2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Nous sommes donc dans les conditions d'application de la majoration (R_3) qui s'écrit, pour tout x réel :

$$d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3M_X}$$

où

$$M_X = 2\sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^3)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_k|) &= \mathbb{E}\left(\left|\frac{Z_k - \mathbb{E}(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}\right|\right) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\, \mathbb{E}(|Z_k - \mathbb{E}(Z_k)|) \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance et car } \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \geqslant 0\textit{)} \\
&= \frac{s_1}{\sigma\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_k|^3) &= \mathbb{E}\left(\left|\frac{Z_k - \mathbb{E}(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}\right|^3\right) \\
&= \frac{1}{(\sigma\sqrt{n})^3}\, \mathbb{E}(|Z_k - \mathbb{E}(Z_k)|^3) \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance et car } \frac{1}{(\sigma\sqrt{n})^3} \geqslant 0\textit{)} \\
&= \frac{s_3}{(\sigma\sqrt{n})^3}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
M_X &= 2\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{s_1}{\sigma\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{s_3}{(\sigma\sqrt{n})^3} \\
&= \frac{2s_1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} v_k + n\frac{s_3}{(\sigma\sqrt{n})^3} \\
&= \frac{2s_1}{\sigma\sqrt{n}} + n\frac{s_3}{(\sigma\sqrt{n})^3} \qquad \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} v_k = 1\textit{)} \\
&= \frac{2s_1}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{s_3}{\sigma^3\sqrt{n}} \\
&= \frac{2\sigma^2 s_1 + s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On én déduit : } d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3\frac{2\sigma^2 s_1 + s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}}.}$$

Commentaire

L'énoncé nous demande explicitement de vérifier que l'on a le droit d'appliquer l'inégalité (R_3). C'est en fait un très bon réflexe qu'il faut s'efforcer d'avoir à chaque fois que l'on souhaite réutiliser un résultat précédemment démontré dans un sujet, même lorsque l'énoncé ne nous dit pas de le faire.

□

b) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N, donc converge en loi vers N. Quel résultat du cours nous aurait permis d'obtenir cette dernière convergence directement ?

Démonstration.
Les constantes σ, s_1 et s_3 ne dépendent pas de n donc :

$$\delta_n = \sqrt{3\frac{2\sigma^2 s_1 + s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ d_{S_n}(x) \leqslant \delta_n$$

donc

$$\boxed{(S_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge uniformément en loi vers } N}$$

D'après la remarque, on a donc également :

$$\boxed{(S_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers } N}$$

On aurait pu obtenir cette dernière convergence par une application directe du théorème central limite.
En effet, notons $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$ et $m = \mathbb{E}(Z_k)$. Alors :

× les variables aléatoires Z_k sont indépendantes,

× les variables aléatoires Z_k suivent la même loi,

× les variables aléatoires Z_k admettent une espérance et une variance non nulle.

Donc $W_n^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} N$.
Il reste à montrer que $S_n = W_n^*$. Or :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} X_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k - m}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \frac{W_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= W_n^* && \textit{(calcul classique)} \end{aligned}$$

□

19. *Une deuxième application.* On suppose dans cette question que $Z_1, \ldots, Z_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0,1[$.

On pose $\sigma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$ et $X_k = \dfrac{Z_k - p_n}{\sigma_n}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(|X_k|) = \dfrac{2\sigma_n}{n}$ et $\mathbb{E}(|X_k|^3) \leqslant \dfrac{2}{n\sigma_n}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Donnons les lois des différentes variables aléatoires en jeu.

- Loi de Z_k :
  - $\times$ $Z_k(\Omega) = \{0,1\}$
  - $\times$ $\mathbb{P}([Z_k = 0]) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = p_n$
- Loi de X_k :
  - $\times$ $X_k(\Omega) = \left\{ -\dfrac{p_n}{\sigma_n}, \dfrac{1-p_n}{\sigma_n} \right\}$
  - $\times$ $\mathbb{P}\left(\left[X_k = -\dfrac{p_n}{\sigma_n}\right]\right) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}\left(\left[X_k = \dfrac{1-p_n}{\sigma_n}\right]\right) = p_n$
- Loi de $|X_k|$:
  - $\times$ $|X_k|(\Omega) = \left\{ \dfrac{p_n}{\sigma_n}, \dfrac{1-p_n}{\sigma_n} \right\}$
  - $\times$ $\mathbb{P}\left(\left[\ |X_k| = \dfrac{p_n}{\sigma_n}\ \right]\right) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}\left(\left[\ |X_k| = \dfrac{1-p_n}{\sigma_n}\ \right]\right) = p_n$
- Loi de $|X_k|^3$:
  - $\times$ $|X_k|^3(\Omega) = \left\{ \left(\dfrac{p_n}{\sigma_n}\right)^3, \left(\dfrac{1-p_n}{\sigma_n}\right)^3 \right\}$
  - $\times$ $\mathbb{P}\left(\left[\ |X_k|^3 = \left(\dfrac{p_n}{\sigma_n}\right)^3\ \right]\right) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}\left(\left[\ |X_k|^3 = \left(\dfrac{1-p_n}{\sigma_n}\right)^3\ \right]\right) = p_n$

  Remarquons que $\dfrac{p_n}{\sigma_n} = \dfrac{1-p_n}{\sigma_n}$ si et seulement si $p_n = \dfrac{1}{2}$. De plus, la formule utilisée pour calculer les espérances ci-dessous reste vraie même dans ce cas.

Les variables aléatoires $|X_k|$ et $|X_k|^3$ sont finies donc admettent chacune une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_k|) &= \frac{p_n}{\sigma_n}(1-p_n) + \frac{1-p_n}{\sigma_n}p_n \\
&= \frac{2p_n(1-p_n)}{\sigma_n} \\
&= \frac{2np_n(1-p_n)}{n\sigma_n} \\
&= \frac{2\sigma_n^2}{n\sigma_n} && \textit{(par définition de } \sigma_n\textit{)} \\
&= \frac{2\sigma_n}{n}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_k|^3) &= \left(\frac{p_n}{\sigma_n}\right)^3 (1-p_n) + \left(\frac{1-p_n}{\sigma_n}\right)^3 p_n \\
&= \frac{p_n(1-p_n)}{\sigma_n^3} \left(p_n^2 + (1-p_n)^2\right) \\
&= \frac{2}{n\sigma_n} \frac{np_n(1-p_n)}{2\sigma_n^2} \left(p_n^2 + (1-p_n)^2\right) \\
&= \frac{\cancel{2}}{n\sigma_n} \frac{\cancel{\sigma_n^2}}{\cancel{2\sigma_n^2}} \left(p_n^2 + (1-p_n)^2\right) && \textit{(par définition de } \sigma_n\textit{)} \\
&= \frac{1}{n\sigma_n} \left(p_n^2 + (1-p_n)^2\right) \\
&\leqslant \frac{1}{n\sigma_n} (1+1) && \textit{(car } p_n^2 \leqslant 1 \textit{ et } (1-p_n)^2 \leqslant 1\textit{)} \\
&= \frac{2}{n\sigma_n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}(|X_k|) = \frac{2\sigma_n}{n} \text{ et } \mathbb{E}(|X_k|^3) \leqslant \frac{2}{n\sigma_n}.}$$

□

b) En déduire que, pour tout x réel :

$$d_{S_n}(x) \leqslant 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)}$$

Démonstration.
On démontre comme à la question ***18.a)*** que l'on peut appliquer l'inégalité (R_3).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3M_X}$$

où

$$\begin{aligned}
M_X &= 2\sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^3) \\
&\leqslant 2\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{2\sigma_n}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n\sigma_n} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{19.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{4\sigma_n}{n} \sum_{k=1}^{n} v_k + \frac{2}{\sigma_n} \\
&= 4\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right) && \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} v_k = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : pour tout } x \text{ réel, } d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3 \times 4\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)} = 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)}.}$$

□

c) Justifier le résultat suivant :
si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale (n, p_n) avec $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = +\infty$ alors, $\left(\dfrac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N.

Démonstration.
On note $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$ où les Z_k sont indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p_n.
On note comme précédemment $\sigma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$ et $X_k = \dfrac{Z_k - p_n}{\sigma_n}$.
Alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} X_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k - p_n}{\sigma_n} \\ &= \frac{T_n - np_n}{\sigma_n} \\ &= \frac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \end{aligned}$$

et donc il faut montrer que $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N.
Notons $\delta_n = 2\sqrt{3\left(\dfrac{\sigma_n}{n} + \dfrac{1}{2\sigma_n}\right)}$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$d_{S_n}(x) \leqslant \delta_n$$

Il reste donc à montrer que $\delta_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

× Par hypothèse : $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi : $1 - p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $1 - p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$. On en déduit que :

$$\sigma_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{np_n}$$

et donc $\sigma_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $np_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par hypothèse.

× Par suite :

$$\frac{\sigma_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{p_n}{n}}$$

et donc $\dfrac{\sigma_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que $\delta_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \left(\frac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)_{n \geqslant 1} \text{ converge uniformément en loi vers } N.}$$

□

20. *Un petit lemme.* Soit $(V_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge uniformément en loi vers N. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers a, tel que $a > 0$, et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels qui converge vers b.

a) Soit X une variable aléatoire et (α, β) un couple de réels avec $\alpha > 0$. On note $F_{\alpha X+\beta}$ et $F_{\alpha N+\beta}$ les fonctions de répartition respectives de $\alpha X + \beta$ et $\alpha N + \beta$.
Montrer que, pour tout x réel,

$$|F_{\alpha X+\beta}(x) - F_{\alpha N+\beta}(x)| = d_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|F_{\alpha X+\beta}(x) - F_{\alpha N+\beta}(x)| &= |\mathbb{P}([\alpha X + \beta \leqslant x]) - \mathbb{P}([\alpha N + \beta \leqslant x])| \\
&= |\mathbb{P}([\alpha X \leqslant x - \beta]) - \mathbb{P}([\alpha N \leqslant x - \beta])| \\
&= \left|\mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x-\beta}{\alpha}\right]\right) - \mathbb{P}\left(\left[N \leqslant \frac{x-\beta}{\alpha}\right]\right)\right| \qquad \textit{(car } \alpha > 0\textit{)} \\
&= \left|F_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) - \Phi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right| \\
&= d_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

□

b) Montrer que pour tout x réel,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x)\right) = 0$$

Démonstration.
Soit $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, d_{V_n}(x) \leqslant \delta_n$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x)| &= |F_{a_n V_n + b_n}(x) - F_{a_n N + b_n}(x)| \\
&= d_{V_n}\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) \qquad \textit{(}\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0\textit{)} \\
&\leqslant \delta_n
\end{aligned}$$

Or, $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x)\right) = 0}$$

□

c) Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x) = \mathbb{P}(aN + b \leqslant x)$ puis en déduire que $(a_n V_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $aN + b$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $aN + b$?

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(aN + b \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(N \leqslant \frac{x - b_n}{a_n}\right) - \mathbb{P}\left(N \leqslant \frac{x-b}{a}\right) \quad (a_n > 0 \text{ et } a > 0) \\ &= \Phi\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) - \Phi\left(\frac{x-b}{a}\right)\end{aligned}$$

Or, $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$ donc $\dfrac{x-b_n}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x-b}{a}$. De plus, Φ est continue en $\dfrac{x-b}{a}$.
Donc

$$\Phi\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) - \Phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x) = \mathbb{P}(aN + b \leqslant x).}$$

De plus,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(aN + b \leqslant x) \\ &= \left(\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x)\right) + \left(\mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(aN + b \leqslant x)\right)\end{aligned}$$

et

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x)\right) = 0$

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(aN + b \leqslant x)\right) = 0$

d'où

$$\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(aN + b \leqslant x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{a_n V_n + b_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} aN + b.}$$

- Ensuite, $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $a > 0$ donc, par transformation affine, $aN + b$ suit une loi normale. De plus,

× $\mathbb{E}(aN + b) = a\mathbb{E}(N) + b = b$

× $\mathbb{V}(aN + b) = a^2\mathbb{V}(N) = a^2$

$$\boxed{\text{donc } aN + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(b, a^2\right)}$$

□

21. On reprend les notations de la partie 3.

a) Justifier que $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N.

Démonstration.
D'après les résultats de la partie 3, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n = \frac{C_n - np_n}{\sigma_n} = \frac{C_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}$$

où

× $C_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$

× $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ (car $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)

× $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = +\infty$ (car $nh_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$)

D'après la question ***19.c)***, $\left(\dfrac{C_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N.

$$\boxed{\text{Autrement dit, } (D_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge uniformément en loi vers } N.}$$

□

b) En utilisant les résultats des questions ***14.*** et ***20.***, en déduire que la suite $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers N.

Démonstration.
Récapitulons les résultats de la question ***14.*** :

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\hat{f}_n = a_n D_n + b_n$ où $a_n = \dfrac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}}$ et $b_n = \sqrt{n}\left(\dfrac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right)$

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1 > 0$

× $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

D'après la question précédente, $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N.
Ainsi, d'après la question ***20.c)***, $(a_n D_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $1 \times N + 0 = N$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, } (\hat{f}_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers } N.}$$

□

HEC 2010 - loi exponentielle, loi géométrique, loi de la somme, de la différence, de la valeur absolue, du max, du min, covariance, coefficient de corrélation linéaire, estimation, loi de Gumbel

- Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $\mathrm{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux v.a.r. X et Y.
- Dans les parties I et III, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.
- **On admet** que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.
- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes si pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$, $[X_2 \leqslant x_2]$, ..., $[X_n \leqslant x_n]$ sont indépendants.
- L'objet du problème est double. D'une part, montrer certaines analogies entre les lois géométriques et exponentielles, d'autre part mettre en évidence quelques propriétés asymptotiques de variables aléatoires issues de la loi exponentielle.
  La partie II est indépendante de la partie I.
  La partie III est indépendante de la partie II et largement indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1. ***a)*** Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

On pose alors $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

b) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Soit λ un réel strictement positif. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $\frac{1}{\lambda}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

2. Justifier les relations $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

3. ***a)*** Rappeler sans démonstration les valeurs de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x]\big)$, pour tout réel x.

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(Y)$.

4. Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

5. ***a)*** Montrer que pour tout réel t, on a : $F_T(t) = \begin{cases} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.

b) Justifier l'existence de $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$. Montrer que $\mathbb{E}(T) = \dfrac{3}{2\lambda}$ et $\mathbb{V}(T) = \dfrac{5}{4\lambda^2}$.
(on pourra utiliser des changements de variables affine)

6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

7. ***a)*** Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.

b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.

c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt$ est convergente et qu'elle vaut $\dfrac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ (on distinguera les deux cas : $y \geqslant 0$ et $y < 0$).

d) Établir que la fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda\,|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.

e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1 - p$.
Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\ q^{k-1}$.

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}}$$

$$\boxed{\text{Enfin, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) = 1 - q^k.}$$

Commentaire

- Notons que la valeur de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$ (pour $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) n'est pas un attendu du programme. Cependant, c'est une propriété très classique de la loi géométrique. Elle doit donc être connue et on se doit de savoir la redémontrer.
- Rappelons maintenant la démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Notons que : $[X_1 \leqslant k] = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X_1 = i]) & \textit{(les événements } [X_1 = i] \textit{ étant incompatibles)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i \ = \ p\ \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\
& = & 1 - q^k &
\end{array}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent une espérance (resp. une variance) car sont des combinaisons linéaires de v.a.r. qui admettent une espérance (resp. une variance).
- Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X_1 + X_2) & = & \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \\
& = & \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} \\
& = & \dfrac{2}{p}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X_1 - X_2) & = & \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) \\
& = & \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p} \\
& = & 0
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{p} \ \text{ et } \ \mathbb{E}(X_1 - X_2) = 0}$$

- Les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc, par propriété de la variance :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1+X_2) &= \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2)\\ &= \frac{q}{p^2}+\frac{q}{p^2}\\ &= 2\,\frac{q}{p^2}\end{aligned}$$

D'après le lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ sont indépendantes.
Donc, par propriété de la variance :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1-X_2) &= \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(-X_2)\\ &= \mathbb{V}(X_1)+(-1)^2\,\mathbb{V}(X_2)\\ &= \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2) \;=\; 2\,\frac{q}{p^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1+X_2)=2\,\frac{q}{p^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_1-X_2)=2\,\frac{q}{p^2}.}$$

Commentaire

Attention à l'erreur classique. Même si X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1-X_2) \neq \mathbb{V}(X_1)-\mathbb{V}(X_2)$$

□

c) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1=X_2])=\dfrac{p}{1+q}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $[X_1=X_2]=[X_1-X_2=0]$.
- La famille $([X_2=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_1-X_2=0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1-X_2=0])\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1-k=0])\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1=k])\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X_2=k])\,\mathbb{P}([X_1=k]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p\,q^{k-1}\,p\,q^{k-1}\\ &= p^2\sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^{k-1}\\ &= p^2\sum_{k=0}^{+\infty}(q^2)^{k} \;=\; p^2\,\frac{1}{1-q^2} && \textit{(car } q^2\in\,]0,1[\textit{)}\\ &= p^{\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \;=\; \frac{p}{1+q}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

2. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- Comme $Z = \min(X_1, X_2)$ et que $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$[Z > k] \ = \ [\min(X_1, X_2) > k] \ = \ [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z > k]) & = & \mathbb{P}([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 > k]) \quad \times \quad \mathbb{P}([X_2 > k]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & (1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) \quad \times \quad (1 - \mathbb{P}([X_2 \leqslant k]) & \\
& = & (\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)) \quad \times \quad (\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\
& = & q^k \quad \times \quad q^k & \\
& = & \left(q^2\right)^k &
\end{array}$$

Enfin, comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Z > 0]) = \mathbb{P}([Z \in \mathbb{N}^*]) = 1$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([Z > k]) = \left(q^2\right)^k}$$

- Par ailleurs, comme Z est à valeurs entières :

$$[Z > k-1] = [Z = k] \cup [Z > k]$$

Les événements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ étant incompatibles :

$$\mathbb{P}([Z > k-1]) = \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([Z > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]).}$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([Z = k]) & = & \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]) \\
& = & \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k \\
& = & \left(q^2\right)^{k-1} (1 - q^2) \\
& = & \left(1 - (1 - q^2)\right)^{k-1} (1 - q^2)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi } Z \text{ admet une espérance et une variance. De plus :} \\ \mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{1-q^2} \quad \text{ et } \quad \mathbb{V}(Z) = \dfrac{1 - (1-q^2)}{(1-q^2)^2} = \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}.\end{array}}$$

- Enfin, comme $T + Z = \max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2$, alors :

$$T = X_1 + X_2 - Z$$

La v.a.r. T admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(T) & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) \\ & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) \\ & = & \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{1-q^2} \\ & = & \dfrac{2}{1-q} - \dfrac{1}{(1-q)(1+q)} \\ & = & \dfrac{2\ (1+q) - 1}{1-q^2} \ = \ \dfrac{1+2q}{1-q^2} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{1+2q}{1-q^2}}$$

□

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2\ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl} & \omega \text{ réalise } [Z = k] \ \cup \ [T = k] \\ \Leftrightarrow & Z(\omega) = k \ \texttt{OU} \ T(\omega) = k \\ \Leftrightarrow & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \end{array}$$

Procédons par disjonstion de cas :

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_1(\omega)$:

Dans ce cas, $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$ et :

$$\begin{array}{cl} & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\ \Leftrightarrow & X_2(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_1(\omega) = k \end{array}$$

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$:

Dans ce cas :

$$\begin{array}{cl} & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\ \Leftrightarrow & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{cl} & \omega \text{ réalise } [Z = k] \ \cup \ [T = k] \\ \Leftrightarrow & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k \\ \Leftrightarrow & \omega \text{ réalise } [X_1 = k] \ \cup \ [X_2 = k] \end{array}$$

$$\boxed{[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]}$$

- Or :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=k]\cup[T=k]) &= \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([Z=k]\cap[T=k])\\ &= \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\end{aligned}$$

En effet, on peut démontrer en procédant comme en début de question que :

$$[Z=k]\cap[T=k] \;=\; [X_1=k]\cap[X_2=k]$$

- De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_1=k]\cup[X_2=k]) &= \mathbb{P}([X_1=k])+\mathbb{P}([X_2=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\\ &= 2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\end{aligned}$$

En effet : $\mathbb{P}([X_1=k])=\mathbb{P}([X_2=k])$ car X_1 et X_2 suivent la même loi.

- D'après ce qui précède :

$$\mathbb{P}([Z=k]\ \cup\ [T=k]) \;=\; \mathbb{P}([X_1=k]\ \cup\ [X_2=k])$$

d'où $\mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])} \;=\; 2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])}$

et $\mathbb{P}([T=k]) \;=\; 2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])$

$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) \;=\; 2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])}$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est demander de « justifier l'égalité » et non de la démontrer. Cette nuance signifie généralement que des points seront attribués même pour une explication avec les mains.
- Il est pratique pour conclure que de dire que les événements $[T=k]$ et $[Z=k]$ (resp. $[X_1=k]$ et $[X_2=k]$) sont incompatibles. Mais on ne peut en aucun cas affirmer une telle chose !
  Il peut exister $\omega\in\Omega$ tel que $\max(X_1(\omega),X_2(\omega))=k$ et $\min(X_1(\omega),X_2(\omega))=k$.
  Cela se produit pour tout $\omega\in\Omega$ tel que : $X_1(\omega)=X_2(\omega)=k$.

□

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T)=\dfrac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors : $T(\Omega)=\big(\max(X_1,X_2)\big)(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. T admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Autrement dit, la v.a.r. T admet une variance ssi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\ \mathbb{P}([T=k])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([T=k]) &= \sum_{k=1}^{N} k^2\ \big(2\,\mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])\big)\\ &= 2\sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([Z=k])\end{aligned}$$

Or X_1 et Z admettent un moment d'ordre 2 car admettent une variance.
De plus, comme $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Z(\Omega) = \big(\min(X_1, X_2)\big)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ alors :

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \ \mathbb{P}([X_1 = k]) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \ \mathbb{P}([Z = k])$$

- On en déduit que la série $\sum_{k \geqslant 1} k^2 \ \mathbb{P}([T = k])$ est convergente et par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \ \mathbb{P}([T = k]) &= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \ \mathbb{P}([Z = k]) \\
&= 2 \ \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Z^2) \\
&= 2 \ \big(\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2\big) - \big(\mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2\big) && \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
&= 2 \ \left(\frac{q}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2\right) - \left(\frac{q^2}{(1-q^2)^2} + \left(\frac{1}{1-q^2}\right)^2\right) && \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
&= 2 \ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{T \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(T^2) = 2 \ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}.}$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(T) &= \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 \\
&= \left(2 \ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2}\right) - \left(\frac{1+2q}{1-q^2}\right)^2 \\
&= 2 \ \frac{q+1}{p^2} - \frac{q^2+1}{(1-q^2)^2} - \frac{1+4q+4q^2}{(1-q^2)^2} \\
&= 2 \ \frac{q+1}{p^2} - \frac{2+4q+5q^2}{(1-q^2)^2} \\
&= 2 \ \frac{q+1}{(1-q)^2} - \frac{2+4q+5q^2}{((1-q) \ (1+q))^2} \\
&= 2 \ \frac{(q+1)(1+q)^2}{(1-q)^2 \ (1+q)^2} - \frac{2+4q+5q^2}{((1-q) \ (1+q))^2} \\
&= \frac{1}{(1-q)^2 \ (1+q)^2} \big(2 \ (1+q)^3 - (2+4q+5q^2)\big) \\
&= \frac{1}{(1-q)^2 \ (1+q)^2} \big(2 \ (1+3q+3q^2+q^3) - (2+4q+5q^2)\big) \\
&= \frac{1}{(1-q)^2 \ (1+q)^2} \big(2q+q^2+2q^3\big) \ = \ \frac{q \ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2 \ (1+q)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \frac{q \ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2 \ (1+q)^2}}$$

Commentaire

- Il faut prendre le réflexe de connaître la formule de Kœnig-Huygens dans les deux sens.
L'écriture :
$$\mathbb{V}(X_1) \ = \ \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$$
fournit l'égalité :
$$\mathbb{E}(X_1^2) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2$$
qui est utilisée dans la démonstration.
- On pouvait aussi calculer $\mathbb{V}(T)$ en s'aidant de l'égalité :
$$T + Z \ = \ X_1 + X_2$$
Comme $T = X_1 + X_2 - Z$ alors T admet un moment d'ordre 2 comme somme de v.a.r. qui admettent un moment d'ordre 2. De la même manière, $T + Z$ admet un moment d'ordre 2.
On a alors :
$$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(X_1 + X_2) \ = \ \frac{2\ q}{p^2}$$
D'autre part :
$$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(T) + \mathbb{V}(Z) + 2\ \mathrm{Cov}(T, Z)$$
On en déduit donc que :
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) \ &= \ \frac{2\ q}{p^2} - \mathbb{V}(Z) - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \\ &= \ \frac{2\ q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \end{aligned}$$
Par la formule de Kœnig-Huygens :
$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(T,Z) \ &= \ \mathbb{E}(TZ) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) \\ &= \ \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) && \textit{(car } TZ = X_1X_2 \textit{ (*))} \\ &= \ \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \ \frac{1}{p}\ \frac{1}{p} - \frac{1+2q}{1-q^2}\ \frac{1}{1-q^2} \\ &= \ \frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$
((*) $TZ = \max(X_1, X_2)\ \min(X_1, X_2) = X_1\ X_2$*)*
En combinant tous ces résultats, on obtient :
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) \ &= \ \frac{2\ q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2}\right) \\ &= \ \frac{2\ (q-1)}{p^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &= \ \frac{2\ (q-1)}{(1-q)^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &= \ \frac{1}{(1-q^2)^2}\left(2\ (q-1)(1+q)^2 - q^2 + 4q + 2\right) \\ &= \ \frac{1}{(1-q^2)^2}\ \left(2q + q^2 + 2q^3\right) \ = \ \frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$

$\square$

3. a) Préciser $(T-Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z=j]\cap[Z=T]$ en fonction des évènements $[X_1=j]$ et $[X_2=j]$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z=j]\cap[Z=T])$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T-Z=|X_1-X_2|$.
Tout d'abord, comme $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors :
$$\begin{array}{rcl}(X_1-X_2)(\Omega) & = & \{X_1(\omega)-X_2(\omega) \mid \omega\in\Omega\} \\ & \subset & \{i-j \mid (i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2\} \ = \ \mathbb{Z}\end{array}$$
Ainsi, $(|X_1-X_2|)(\Omega)\subset\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}_+=\mathbb{N}$.
$$\boxed{(T-Z)(\Omega)\subset\mathbb{N}}$$

- Soit $j\in\mathbb{N}^*$.
$$\begin{array}{rcl}[Z=j]\ \cap\ [Z=T] & = & [\min(X_1,X_2)=j]\ \cap\ [\min(X_1,X_2)=\max(X_1,X_2)] \\ & = & [\min(X_1,X_2)=j]\ \cap\ [\max(X_1,X_2)=j] \\ & = & [X_1=j]\ \cap\ [X_2=j]\end{array}$$
$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*,\ [Z=j]\ \cap\ [Z=T]=[X_1=j]\ \cap\ [X_2=j]}$$

- Ainsi :
$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [Z=T]) & = & \mathbb{P}([X_1=j]\ \cap\ [X_2=j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1=j])\ \times\ \mathbb{P}([X_2=j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & p\ q^{j-1}\times p\ q^{j-1}\ =\ p^2\ q^{2j-2} & \end{array}$$
$$\boxed{\forall j\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [Z=T])=p^2\ q^{2j-2}}$$

$\square$

b) Montrer que pour tout couple (j,l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z=j]\cap[T-Z=l])=2p^2q^{2j+l-2}$.

Démonstration.

- Soit $(j,l)\in(\mathbb{N}^*)^2$.
$$\begin{array}{rcl}[Z=j]\ \cap\ [T-Z=l] & = & [Z=j]\ \cap\ [T-j=l] \\ & = & [Z=j]\ \cap\ [T=j+l] \\ & = & [\min(X_1,X_2)=j]\ \cap\ [\max(X_1,X_2)=j+l] \\ & = & \big([X_1=j]\cap[X_2=j+l]\big)\ \cup\ \big([X_1=j+l]\cap[X_2=j]\big)\end{array}$$
Il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles. En effet :
$$\begin{array}{rl} & \big([X_1=j]\cap[X_2=j+l]\big)\ \cap\ \big([X_1=j+l]\cap[X_2=j]\big) \\ = & \big([X_1=j]\cap[X_1=j+l]\big)\cap\big([X_2=j]\cap[X_2=j+l]\big) \\ = & \varnothing\ \cap\ \varnothing\ =\ \varnothing\end{array}$$
En effet : $[X_1=j]\cap[X_1=j+l]=\varnothing$ car $j+l>j$ puisque $l\geqslant 1>0$.

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X_1=j]\cap[X_2=j+l]\big) \ + \ \mathbb{P}\big([X_1=j+l]\cap[X_2=j]\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X_1=j]\big)\times\mathbb{P}([X_2=j+l]\big) \ + \ \mathbb{P}\big([X_1=j+l]\big)\times\mathbb{P}\big([X_2=j]\big) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépdendantes)} \\
= \ & p\ q^{j-1}\times p\ q^{j+l-1} \ + \ p\ q^{j+l-1}\times p\ q^{j-1} \\
= \ & p^2\ q^{2j+l-2}+p^2\ q^{2j+l-2} \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (j,l)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l])=2\ p^2\ q^{2j+l-2}}$$

□

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1-X_2=k])=\dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$)

Démonstration.
Soit $k\in\mathbb{Z}$. On procède par disjonction de cas.

- Si $k=0$:

$$\mathbb{P}([X_1-X_2=k])=\mathbb{P}([X_1-X_2=0])=\mathbb{P}([X_1=X_2])=\frac{p}{1+q}=\frac{pq^0}{1+q}$$

- Si $k>0$:
La famille $([X_2=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X_2=i]\ \cap\ [X_1-X_2=k]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X_2=i]\ \cap\ [X_1-i=k]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X_2=i]\ \cap\ [X_1=i+k]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X_2=i])\ \times\ \mathbb{P}([X_1=i+k]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-1}\ \times\ p\ q^{i+k-1} \\
&= p^2\ q^k\sum_{i=1}^{+\infty}q^{2i-2} \ = \ p^2\ q^k\sum_{i=1}^{+\infty}\left(q^2\right)^{i-1} \\
&= p^2\ q^k\sum_{i=0}^{+\infty}\left(q^2\right)^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p^2\ q^k\ \frac{1}{1-q^2} \ = \ p^{\cancel{2}}\ q^k\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} && \textit{(car } q^2\in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{p\ q^k}{1+q} \ = \ \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

- Si $k < 0$:

  On procède de la même manière que dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& = & \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \in \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& & + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \notin \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \cancel{\mathbb{P}([X_1 = i+k])} & \textit{([}X_1 = i+k\textit{]} = \varnothing \textit{ car } i+k \notin \mathbb{N}^*\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \left(\textit{car} \quad \begin{array}{rl} & i+k \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & i \geqslant -k+1 \end{array}\right) \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \times p\ q^{i+k-1} & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-k-1} \times p\ q^{i-1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2\ q^{-k} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} & \\
& = & \dfrac{p^2\ q^{-k}}{1+q} = \dfrac{p\ q^{|k|}}{1+q} & \textit{(en procédant comme au point précédent)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}}$$

□

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.

$$\boxed{(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que :

$$[\ |X_1 - X_2| = k] \ = \ [X_1 - X_2 = k] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -k]$$

  Deux cas se présentent :

  × si $k \neq 0$: alors les événements $[X_1 - X_2 = k]$ et $[X_1 - X_2 = -k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) & = & \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) + \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -k]) & \\
& = & \dfrac{p\ q^k}{1+q} + \dfrac{p\ q^k}{1+q} \ = \ 2\ \dfrac{p\ q^k}{1+q} & \textit{(car } |k| = k\textit{)}
\end{array}$$

  × si $k = 0$:

$$\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) \ = \ \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) = 2\ \frac{p\ q^k}{1+q} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in Z(\Omega),\ \forall l \in (T-Z)(\Omega),\ \mathbb{P}([Z=j] \cap [T-Z=l]) \ = \ \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l])$$

avec $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $(T-Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $(j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l]) & \\ = & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times 2\ \dfrac{p\ q^l}{1+q} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ = & q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times 2\ \dfrac{p\ q^l}{\cancel{1+q}} & \\ = & q^{2j-2}\ p \times 2p\ q^l \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2} & \\ = & \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) & \textit{(d'après la \textbf{3.c)})} \end{array}$$

- Il reste à étudier le cas où $j \in \mathbb{N}^*$ et $l=0$.

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=0]) & \\ = & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times \dfrac{p}{1+q} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ = & q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times \dfrac{p}{\cancel{1+q}} & \\ = & q^{2j-2}\ p \times p \ = \ p^2\ q^{2j-2} & \\ = & \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) & \textit{(d'après la \textbf{3.a)})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Les variables } Z \text{ et } T-Z \text{ sont indépendantes.}}$$

□

4. a) À l'aide du résultat de la question ***3.e)***, calculer $\mathrm{Cov}(Z,T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après la question ***3.e)***, les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes. On en déduit que :

$$\mathrm{Cov}(Z, T-Z) = 0$$

Or, par linéarité gauche de l'opérateur Cov :

$$\underbrace{\mathrm{Cov}(Z, T-Z)}_{0} \ = \ \mathrm{Cov}(Z,T) \ - \ \underbrace{\mathrm{Cov}(Z,Z)}_{\mathbb{V}(Z)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Cov}(Z,T) \ = \ \mathbb{V}(Z) \ = \ \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}}$$

- Comme $q \neq 0$, $\mathrm{Cov}(Z,T) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } Z \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{aligned}
\rho(Z,T) &= \frac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\
&= \frac{\mathbb{V}(Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} = \frac{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(Z)}}{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2}}} = \sqrt{\frac{q^2}{\cancel{(1-q^2)^2}}\ \frac{\cancel{(1-q^2)^2}}{q\ (2+q+2q^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{q}{2+q+2q^2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\rho(Z,T) = \sqrt{\frac{q}{2+q+2q^2}}}$$

□

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

Démonstration.

- On rappelle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On procède par disjonction de cas :
  × si $i < j$: alors $[Z=j] \ \cap \ [T=i] = \varnothing$.
  En effet, $Z = \min(X_1, X_2) \ \leqslant \ \max(X_1,X_2) = T$.

$$\boxed{\text{Si } i<j, \ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

  × si $i = j$: alors $[Z=j] \ \cap \ [T=j] = [X_1=j] \ \cap \ [X_2=j]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=j]) &= \mathbb{P}([X_1=j] \ \cap \ [X_2=j]) \\
&= \mathbb{P}([X_1=j]) \times \mathbb{P}([X_2=j]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= p\ q^{j-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ p^2\ q^{2j-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=j]) \ = \ p^2\ q^{2j-2}}$$

  × si $i > j$: alors $[Z=j] \ \cap \ [T=i] = ([X_1=j] \cap [X_2=i]) \ \cup \ ([X_1=i] \cap [X_2=j])$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\ ([X_1=j] \cap [X_2=i]) \ \cup \ ([X_1=i] \cap [X_2=j])\ \big) \\
= \ & \mathbb{P}([X_1=j] \cap [X_2=i]) \ + \ \mathbb{P}([X_1=i] \cap [X_2=j]) && \textit{(car } [X_1=j] \cap [X_2=i] \textit{ et } [X_1=i] \cap [X_2=j] \textit{ sont incompatibles)} \\
= \ & \mathbb{P}([X_1=j]) \times \mathbb{P}([X_2=i]) + \mathbb{P}([X_1=i]) \times \mathbb{P}([X_2=j]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
= \ & p\ q^{j-1} \times p\ q^{i-1} + p\ q^{i-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i>j, \ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T=i]) \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2}.}$$

□

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{\mathbb{P}([Z = j])} = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{(q^2)^{j-1}\ (1 - q^2)}$$

Le loi du couple (Z, T) était donnée par cas, on procède par disjonction de cas :

× si $i < j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } i < j,\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = 0.}$$

× si $i = j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) = p^2\ q^{2j-2}$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{(q^2)^{j-1}\ (1 - q^2)} = \frac{p^2\ \cancel{q^{2j-2}}}{\cancel{(q^2)^{j-1}}\ (1 - q^2)} = \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{(1 - q)}\ (1 + q)} = \frac{p}{1 + q}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) = \frac{p}{1 + q}}$$

× si $i > j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = 2\ p^2 q^{i+j-2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) &= \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{(q^2)^{j-1}\ (1 - q^2)} \\
&= \frac{2\ p^2\ q^{i+j-2}}{(q^2)^{j-1}\ (1 - q^2)} \\
&= \frac{2\ p^2 \cancel{q^{j-2}}\ q^i}{q^j\ \cancel{q^{j-2}}\ (1 - q^2)} \\
&= \frac{2\ p^{\cancel{2}}\ q^i}{q^j\ \cancel{(1 - q)}\ (1 + q)} \\
&= \frac{2\ p\ q^i}{q^j (1 + q)} = \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1 + q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j,\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = \frac{2\ p\ q^{i-j}}{1 + q}.}$$

□

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

Démonstration.

- La v.a.r. D_j admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{cl} & \sum\limits_{i=1}^{N} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \\ = & \sum\limits_{i=1}^{j-1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \ + \ \sum\limits_{i=j}^{j} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \ + \ \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \quad \textit{(par relation de Chasles en supposant } N > j\textit{)} \\ = & 0 \ + \ \dfrac{p}{1+q} \ + \ \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ \dfrac{2 \ p \ q^{i-j}}{1+q} \quad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- Étudions en particulier la somme de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^{N} i \ \frac{2 \ p \ q^{i-j}}{1+q} &= \frac{2 \ p}{1+q} \sum_{i=j+1}^{N} i \ q^{i-j} \\ &= \frac{2 \ p}{1+q} \sum_{i=1}^{N-j} i \ q^{(i+j)-j} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \frac{2 \ p}{1+q} \sum_{i=1}^{N-j} i \ q^{i} \\ &= \frac{2 \ p \ q}{1+q} \sum_{i=1}^{N-j} i \ q^{i-1} \end{aligned}$$

  On reconnaît la somme partielle (d'ordre $N - j$) d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $q \in \,]-1, 1[$.
- Ainsi, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est convergente et par passage à la limite dans l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) &= \frac{p}{1+q} + \frac{2 \ p \ q}{1+q} \sum_{i=1}^{+\infty} i \ q^{i-1} \\ &= \frac{p}{1+q} + \frac{2 \ \cancel{p} \ q}{1+q} \ \frac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}} \\ &= \frac{1}{(1+q)(1-q)} \left(p \ (1-q) + 2 \ q\right) \\ &= \frac{1}{1-q^2} \left((1-q)^2 + 2 \ q\right) \ = \ \frac{1+q^2}{1-q^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La variable } D_j \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(D_j) = \frac{1+q^2}{1-q^2}}$$

Commentaire

- Dans cette question, on détermine $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T=i])$.
  Cette écriture est très proche de l'écriture de $\mathbb{E}(T)$: on a simplement remplacé ici l'application probabilité $\mathbb{P}$ par l'application probabilité $\mathbb{P}_{[Z=j]}$.
  Autrement dit, on détermine l'espérance de T sachant que l'événement $[Z = j]$ est réalisé.
- Cet objet est classique en mathématiques (mais hors programme !). Il s'agit de l'espérance conditionnelle de la variable T relativement à l'événement $[Z = j]$. Elle se note :
  $$\mathbb{E}(T \mid [Z=j])$$
  (cette notation n'est pas très heureuse au vu de la notation utilisée pour noter les probabilités conditionnelles)
- On peut noter que ces calculs d'espérances conditionnelles permettent de déterminer l'espérance. Sous réserve d'existence des objets considérés :
  $$\mathbb{E}(T) \ = \ \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=j]) \ \mathbb{E}(T \mid [Z=j])$$
  Il faut considérer cette égalité comme une formule des probabilités totales (qui est à la base de ce résultat) adaptée à la notion d'espérance.

□

Partie III. Convergences

Dans les questions 1 à 4, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.
Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

1. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$, $\mathbb{E}(J_n)$ et $\mathbb{V}(J_n)$.

2. On admet qu'une densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

a) À l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{J_n}\right)$ et de $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

b) On pose pour tout n supérieur ou égal à 3 : $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{n}{S_n}$. Justifier que $\widehat{\lambda_n}$ est un estimateur de λ. Est-il sans biais ? Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, du risque quadratique associé à $\widehat{\lambda_n}$ en λ.

3. Dans cette question, on veut déterminer un intervalle de confiance du paramètre λ au risque α.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

a) Énoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

b) En déduire que pour n assez grand, on a approximativement : $\mathbb{P}\big([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha] \big) = 1 - \alpha$.

c) Montrer que pour n assez grand, l'intervalle $\left[\left(1 - \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda_n}, \left(1 + \dfrac{u_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \widehat{\lambda_n} \right]$ est un intervalle de confiance de λ au risque α. On note λ_0 la réalisation de $\widehat{\lambda_n}$ sur le n-échantillon.

4. Avec le n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, on construit un nouvel intervalle de confiance de λ au risque β ($\beta \neq \alpha$), tel que la longueur de cet intervalle soit k ($k > 1$) fois plus petite que celle obtenue avec le risque α.

a) Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de Φ.
Quel est le domaine de définition de Φ^{-1} ?

b) Établir l'égalité $\beta = 2\Phi\left(\dfrac{1}{k}\Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$.
En déduire que $\beta > \alpha$. Ce dernier résultat était-il prévisible ?

Dans les questions 5 à 7, on suppose que $\lambda = 1$.

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t)\ dt \quad \text{et} \quad h_n(x) = \int_0^x t\, f_{T_n}(t)\ dt$$

a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_{T_n}(x)$ et $g_n(x)$.

b) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
Établir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \dfrac{1}{n}\ F_{T_n}(x)$.

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x, $F_{T_1}(x)$, $F_{T_2}(x)$, ..., $F_{T_n}(x)$.

d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-n\mathrm{e}^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

e) Déduire des questions ***c)*** et ***d)*** l'existence de $\mathbb{E}(T_n)$ et montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

6. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - \mathbb{E}(T_n)$.
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln(n) + \mathbb{E}(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\ \mathrm{e}^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.

b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}$.

c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_G : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

7. ***a)*** Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par $Y = F_X(X)$.

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `Gumbel` qui permet de simuler la variable aléatoire G.
On supposera que la constante γ est définie en langage **Scilab** par une constante `gamma`.
On rappelle que la fonction **Scilab** `rand()` permet de simuler la loi uniforme sur $]0,1[$.

ESSEC II 2010 - loi exponentielle, loi de Poisson, loi d'Erlang, loi de Weibull, loi du max, du min, fiabilité, processus de Poisson, fonction génératrice des probabilités, séries

- L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service ...) démarré à la date $t = 0$ et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.
- Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbb{E}(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.
- On adoptera les conventions suivantes :
  × on dira qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0 est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  × en outre, si T est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition $F_T(t) = \mathbb{P}([T \leqslant t]) = \displaystyle\int_0^t f(u)\, du$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et dérivable à droite en 0.
  × on conviendra d'écrire $F_T'(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_T'(0)$ désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

Partie I. Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre μ ($\mu > 0$) si elle admet pour densité la fonction f_μ définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu\, \mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre μ.

a) Donner l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, alors X admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\mu} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\mu^2}.}$$

Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition sine qua non de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est particulièrement le cas dans cet énoncé où les propriétés caractéristiques de la loi exponentielle sont étudiées.
- Profitons-en pour rappeler que la connaissance de l'espérance et de la variance permet d'obtenir le moment d'ordre 2. En effet, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ \text{donc} & \mathbb{E}(X^2) & = & \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \end{array}$$

□

b) Justifier que pour tout entier naturel n, X^n admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X^{n+1})$ et $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout entier naturel n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  La v.a.r. X admet un moment d'ordre n si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, f_\mu(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f_X(t)\ dt$.
- Tout d'abord, comme la fonction f_μ est nulle en dehors de $]0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, f_\mu(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} t^n\, f_\mu(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} t^n\, \mu\ \mathrm{e}^{-\mu\, t}\ dt$$
- De plus, la fonction $t \mapsto t^n\, f_\mu(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, f_\mu(t)\ dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.
- On a :
  $\times$ $\forall t \in\ [0,+\infty[,\ \ t^n\, \mu\ \mathrm{e}^{-\mu\, t} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu\, t} \geqslant 0$.
  $\times$ $t^n\, \mu\ \mathrm{e}^{-\mu\, t} \ = \ \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\mu}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu\, t}\right)$. En effet :
$$\frac{t^n\, \cancel{\mu}\ \mathrm{e}^{-\mu\, t}}{\frac{\cancel{\mu}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu\, t}} \ = \ 2\ \frac{t^n}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mu\, t}} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$
  $\times$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mu}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu\, t}\ dt$ est convergente en tant que moment d'ordre 0 d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}\left(\frac{\mu}{2}\right)$.
  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, f_\mu(t)\ dt$ est convergente.
$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre } n.}$$
- Soit $B \in [0,+\infty[$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\int_0^B t^n\, f_\mu(t)\ dt \ = \ \int_0^B t^n\, \mu\,\mathrm{e}^{-\mu\, t}\ dt$$
  On procède alors par intégration par parties (IPP).
$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \mathrm{e}^{-\mu\, t} & & u'(t) & = & -\mu\ \mathrm{e}^{-\mu\, t} \\ v'(t) & = & \mu\, t^n & & v(t) & = & \dfrac{\mu}{n+1}\ t^{n+1} \end{array}\right.$$
  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0,B]$.
  On obtient :
$$\begin{aligned} \int_0^B t^n\, \mu\ \mathrm{e}^{-\mu\, t}\ dt &= \left[\ \frac{\mu}{n+1}\ t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\mu\, t}\ \right]_0^B - \int_0^B \frac{-1}{n+1}\ \big(-\mu\, t^{n+1}\big)\, \mu\ \mathrm{e}^{-\mu\, t}\ dt \\ &= \frac{\mu}{n+1}\ \left[\ t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\mu\, t}\ \right]_0^B + \frac{\mu}{n+1}\int_0^B t^{n+1}\ \mu\,\mathrm{e}^{-\mu\, t}\ dt \\ &= \frac{\mu}{n+1}\ B^{n+1}\ \mathrm{e}^{-\mu\, B} + \frac{\mu}{n+1}\ \int_0^B t^{n+1}\ f_\mu(t)\ dt \qquad (*) \end{aligned}$$

- Or :
  × $\dfrac{\mu}{n+1}\ B^{n+1}\ \mathrm{e}^{-\mu B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
  × l' intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\ f_\mu(t)\ dt$ (respectivement $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}\ f_\mu(t)\ dt$) est convergente car, la v.a.r. X admet un moment d'ordre n (respetivement $n+1$).
  Ainsi, la quantité $\displaystyle\int_0^{B} t^n\ f_\mu(t)\ dt$ (respectivement $\displaystyle\int_0^{B} t^{n+1}\ f_\mu(t)\ dt$) admet une limite finie lorsque B tend vers $+\infty$.

  Par passage à la limite (quand B tend vers $+\infty$) dans l'égalité $(*)$, on obtient alors :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\ f_\mu(t)\ dt & = & 0 + \dfrac{\mu}{n+1} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}\ f_\mu(t)\ dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{E}(X^n) & & \dfrac{\mu}{n+1}\ \mathbb{E}\left(X^{n+1}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X^{n+1}\right) = \frac{n+1}{\mu}\ \mathbb{E}(X^n)}$$

Commentaire

- Il n'était pas obligatoire de commencer par faire une démonstration de convergence à l'aide d'un théorème de comparaison. Il était aussi possible de procéder par récurrence. L'idée est alors de démontrer que l'existence du moment d'ordre n permet de démontrer l'existence d'ordre $n+1$. Toutefois, ce raisonnement est plus subtil car il nécessite d'expliciter la relation entre $\mathbb{E}\big(X^n\big)$ et $\mathbb{E}\big(X^{n-1}\big)$ avant de la démontrer.
- Plus précisément, on pouvait démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n)$: la v.a.r. X admet un moment d'ordre n et $\mathbb{E}\big(X^n\big) = \dfrac{n}{\mu}\ \mathbb{E}\big(X^{n-1}\big)$.

□

c) En déduire $\mathbb{E}(X^n)$ pour tout $n > 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente : $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X^m) = \dfrac{m}{\mu}\ \mathbb{E}\left(X^{m-1}\right)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(X^n) & = & \dfrac{n}{\mu}\ \mathbb{E}\left(X^{n-1}\right) & \textit{(en appliquant la relation en } m = n\textit{)} \\ & = & \dfrac{n}{\mu} \times \left(\dfrac{n-1}{\mu}\ \mathbb{E}\left(X^{n-2}\right)\right) & \textit{(en appliquant la relation en } m = n-1\textit{)} \\ & = & \dfrac{n}{\mu} \times \dfrac{n-1}{\mu}\ \left(\dfrac{n-2}{\mu}\ \mathbb{E}\left(X^{n-3}\right)\right) & \textit{(en appliquant la relation en } m = n-2\textit{)} \\ & & \dots & \dots \\ & = & \dfrac{n}{\mu} \times \dfrac{n-1}{\mu} \times \ldots \times \dfrac{n-(n-1)}{\mu}\ \mathbb{E}\left(X^{n-n}\right) & \textit{(en appliquant la relation en } m = 1\textit{)} \\ & = & \dfrac{n!}{\mu^n}\ \mathbb{E}\big(X^0\big)\ =\ \dfrac{n!}{\mu^n} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}\big(X^n\big) = \frac{n!}{\mu^n}}$$

□

d) Retrouver la valeur de $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de la question précédente.

Démonstration.
D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}\big(X^2\big) - (\mathbb{E}(X))^2 & \\ & = & \dfrac{2!}{\mu^2} - \left(\dfrac{1!}{\mu}\right)^2 & \textit{(en appliquant la formule de la question précédente en } n=1 \textit{ et } n=2\textit{)} \\ & = & \dfrac{2}{\mu^2} - \dfrac{1}{\mu^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on retrouve bien : } \mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\mu^2}.}$$

□

2. *Propriété caractéristique*

a) Soient $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ.
Justifier que pour tout réel x positif ou nul, le nombre $\mathbb{P}([X > x])$ est non nul.
Montrer que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X > y]\,\big)$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$ et soit $y \geqslant 0$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) & = & 1 - \mathbb{P}\big(\,[X \leqslant x]\,\big) \\ & = & 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\mu\, x}) \\ & = & \mathrm{e}^{-\mu\, x} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) \ = \ \mathrm{e}^{-\mu\, x} > 0}$$

- Ensuite :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) & = & \dfrac{\mathbb{P}\big(\,[X > x] \cap [X > x+y]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big)} & \textit{(par définition et car } \mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) > 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\big(\,[X > x+y]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big)} & \textit{(car } [X > x+y] \subset [X > x]\textit{)} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-\mu\,(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\mu\, x}} & \textit{(d'après le point précédent appliqué en } x \geqslant 0 \textit{ et } x+y \geqslant 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{\cancel{\mathrm{e}^{-\mu\, x}}\ \mathrm{e}^{-\mu\, y}}{\cancel{\mathrm{e}^{-\mu\, x}}} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ \mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) = \mathrm{e}^{-\mu\, y} = \mathbb{P}\big(\,[X > y]\,\big).}$$

□

b) Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et telle que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}_{[X>x]}\big(\,[X > x+y]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[X > y]\,\big)$$

(i) Soit $R(x) = \mathbb{P}([X > x])$. Justifier que $R(x)$ est non nul pour tout réel positif.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- Par définition :

$$\mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) \;=\; \int_x^{+\infty} f(t)\, dt$$

- Or, d'après l'énoncé :
  - × $\forall t \in [0, +\infty[,\ \ f(t) > 0$,
  - × la fonction f est continue sur $[x, +\infty[$.

Ainsi, par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x < +\infty$), on en déduit :

$$\int_x^{+\infty} f(t)\, dt > 0$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ R(x) = \mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) > 0}$$

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer que, comme X est une v.a.r. à densité, et que f est continue sur $[0, +\infty[$, alors F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$:

$$F_X'(x) = f(x) > 0 \quad \textit{(par hypothèse de l'énoncé)}$$

- La fonction F_X est :

× continue sur $[0, +\infty[$,

× strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur :

$$F_X\big(\,[0, +\infty[\,\big) = [F_X(0), \lim_{x \to +\infty} F_X(x)[\; = [F_X(0), 1[$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, +\infty[$: $F_X(x) < 1$.

$$\begin{array}{rrcl} \text{On en déduit} & -F_X(x) & > & -1 \\ \text{donc} & 1 - F_X(x) & > & 0 \\ & \shortparallel & & \\ & \mathbb{P}\big(\,[X > x]\,\big) & & \end{array}$$

□

(ii) On pose $\mu = f(0)$. Montrer que pour tout x réel positif, on a la relation $R'(x) + \mu R(x) = 0$.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big([X > x]\big) \\ & = & 1 - R(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \geqslant 0,\ R(x) = 1 - F_X(x).}$$

- On sait que :
  - × la v.a.r. X est une v.a.r. à densité,
  - × la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

  On en déduit que la fonction F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. D'après l'égalité précédente, il en est de même de la fonction R.

$$\boxed{\text{On a alors : } \forall x \geqslant 0,\ R'(x) \ = \ -f_X(x).}$$

- Par hypothèse de l'énoncé, pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $y \geqslant 0$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{[X>x]}\big([X > x+y]\big) & = & \mathbb{P}\big([X > y]\big) \\ \shortparallel & & \\ \dfrac{\mathbb{P}\big([X > x] \cap [X > x+y]\big)}{\mathbb{P}\big([X > x]\big)} & = & \dfrac{\mathbb{P}\big([X > x+y]\big)}{\mathbb{P}\big([X > x]\big)} \end{array} \qquad \textit{(car } [X > x+y] \subset [X > x]\textit{)}$$

  Ainsi : $\dfrac{\mathbb{P}\big([X > x+y]\big)}{\mathbb{P}\big([X > x]\big)} \ = \ \mathbb{P}\big([X > y]\big)$.

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ R(x+y) = R(x) \times R(y).}$$

- Soit $x_0 \in [0, +\infty[$. Notons h_{x_0} la fonction $h_{x_0} : y \mapsto R(x_0 + y)$.

  D'après l'égalité au-dessus : $\forall y \geqslant 0,\ h_{x_0}(y) = R(x_0) \times R(y)$.
  En particulier, on en déduit que la fonction h_{x_0} est dérivable sur $[0, +\infty[$ car R l'est.

$$\begin{array}{ll|ll} & \forall y \geqslant 0,\ h_{x_0}(y) = R(x_0 + y) & & \forall y \geqslant 0,\ h_{x_0}(y) = R(x_0) \times R(y) \\ \text{ainsi} & \forall y \geqslant 0,\ h'_{x_0}(y) = R'(x_0 + y) & \text{ainsi} & \forall y \geqslant 0,\ h'_{x_0}(y) \ = \ R(x_0) \times R'(y) \\ & & & \qquad\qquad\quad = \ R(x_0) \times \big(-f_X(y)\big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall y \geqslant 0,\ R'(x_0 + y) = \big(-f_X(y)\big) \times R(x_0).}$$

- En particulier, pour $y = 0$, on trouve : $\forall x_0 \geqslant 0,\ R'(x_0) = \big(-f_X(0)\big) \times R(x_0)$.

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall x_0 \geqslant 0,\ R'(x_0) + \mu\, R(x_0) = 0.}$$

Commentaire

- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-question. Moins il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives et plus le sujet est difficile. Ainsi, un même thème peut amener à un traitement différent lorsqu'il est abordé dans un sujet du `TOP3` ou du `TOP5`.
- Dans les sujets, on distingue grossièrement trois types de questions :

  (1) des questions abordables qui sont traitées par un grand nombre de candidats. Il peut s'agir de questions de cours ou de questions classiques (celles qui reviennent chaque année aux concours).

  (2) des questions plus difficiles qui permettent de bien classer les candidats. Celles-ci ont un rôle fort pour le classement des candidats car sont abordées avec plus ou moins de succès.

  (3) des questions très difficiles qui ne sont bien traitées presque par aucun candidat.

  Dans les sujets du `TOP5`, on trouve essentiellement des questions de type ***1)*** et ***2)***. Dans les sujets du `TOP3`, on trouve les trois types de questions, avec un pourcentage élevé de questions de type ***2)***. C'est d'ailleurs essentiellement sur ces questions que se font les différences et en aucun cas les questions de type ***3)***.
- Ces dernières années, la taille des sujets a eu tendance à grossir pour s'établir à près de 60 questions par énoncé. Pour finir un sujet, un candidat ne dispose donc que d'environ 4 minutes pour traiter chaque question. Il ne faut pas s'inquiéter pour autant car les barèmes permettent de rebattre les cartes. En effet, un candidat qui obtient 50% des points d'un sujet aura une très bonne note (de 16 à 20 en fonction des années et des épreuves).
  Cette considération sur la taille des sujets et la distinction précédente permettent d'éclairer sur la stratégie à adopter lors des concours :
  - il est essentiel de savoir repérer la difficulté d'une question. Ce n'est pas chose aisée car cela requiert d'avoir du recul.
  - il est essentiel de savoir traiter la majorité des questions de type ***(1)***.
  - il est important de réussir à traiter correctement des questions de type ***(2)***. C'est sur le bon traitement de ces questions que se joue le classement.
  - pour les questions de type ***(3)*** (ou les questions de type ***(2)*** les plus difficiles), il faut garder en tête que plus une question est difficile, plus le correcteur est indulgent avec les candidats qui s'y aventurent. On peut donc aborder ces questions avec l'idée que tout ce qu'un candidat écrit de juste sera retenu en sa faveur (quelques points accordés). Mais tenter de traiter ces questions en entier est une perte de temps préjudiciable : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à hauteur du temps investi.

  En résumé, il faut aborder en priorité les questions de type ***(1)*** et ***(2)*** et les traiter en entier. Il ne faut surtout pas abandonner une question que l'on sait traiter. L'important est de maximiser le nombre de questions que l'on traite entièrement. En revanche, il ne faut pas hésiter à passer une questions les plus difficiles quitte à signaler au correcteur qu'on ne sait pas comment conclure si on les aborde.
- La question ***2.b)(ii)*** du sujet est clairement de type ***(3)*** car elle nécessite une prise d'initiatives beaucoup trop importante. Pour que cette question puisse être abordée avec profit par certains candidats, il aurait été préférable de la découper en sous-questions. En particulier, on aurait pu demander en amont la démonstration de l'égalité suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \forall y \geqslant 0, \ R(x+y) = R(x) \times R(y)$$

□

(iii) Calculer la dérivée de $x \mapsto R(x)\, \mathrm{e}^{\mu x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto R(x)\, \mathrm{e}^{\mu x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{rcll} h'(x) & = & R'(x) \times \mathrm{e}^{\mu x} + R(x) \times \big(\mu\, \mathrm{e}^{\mu x}\big) & \\ & = & \big(R'(x) + \mu\, R(x)\big)\, \mathrm{e}^{\mu x} & \\ & = & 0 & \textit{(d'après le résultat précédent)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ h'(x) = 0}$$

Commentaire

La question précédente était particulièrement difficile. Celle-ci, en revanche, est particulièrement simple. On en conclut qu'il n'y a pas forcément dans tout le sujet de croissance linéaire de la difficulté. Ainsi, passer une question (dont le résultat est présent dans l'énoncé) ne doit pas empêcher de tenter d'aborder la suivante. □

(iv) Déduire que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- D'après la qestion précédente : $\forall x \geqslant 0,\ h'(x) = 0$.
  On en déduit que la fonction h est constante sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{ccccccccc} h(x) & = & h(0) & & & & & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & & & & & \\ R(x)\, \mathrm{e}^{\mu\, x} & & R(0)\, \mathrm{e}^{\mu\, 0} & = & \mathbb{P}\big(\, [X > 0]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(\, [X \geqslant 0]\,\big) & = & 1 \end{array}$$

(car X est une v.a.r. à valeurs positives)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \geqslant 0,\ R(x)\, \mathrm{e}^{\mu\, x} = 1 \ \text{ ou encore : } \ R(x) = \mathrm{e}^{-\mu\, x}.}$$

- Déterminons la fonction de répartition de X.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

  × si $x < 0$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :

$$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\, [X \leqslant x]\,\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \geqslant 0$, alors :

$$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\, [X \leqslant x]\,\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\, [X > x]\,\big) \ = \ 1 - R(x) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{\mu\, x}$$

On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}\,(\mu)$.
Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X \hookrightarrow \mathcal{E}\,(\mu).}$$

□

Commentaire

- La question *2)* permet de démontrer que si X est une v.a.r. à densité alors :

$$\left.\begin{array}{l} \textit{1)}\ X(\Omega) = [0, +\infty[\\[2mm] \textit{2)}\ \forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ \mathbb{P}_{[X>x]}\big([X > x+y]\big) = \mathbb{P}\big([X > y]\big) \\[2mm] \textit{3)}\ \forall x \geqslant 0,\ f_X(x) > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} X \text{ suit une loi} \\ \text{exponentielle} \end{array}$$

  Dans la démonstration, on précise que le paramètre de la loi exponentielle obtenue n'est autre que $\mu = f_X(0)$.
- On a énoncé ici une équivalence. La propriété ci-dessus caractérise les v.a.r. qui suivent une loi exponentielle.
- Dans le contexte où la v.a.r. X désigne la durée de fonctionnement (ou durée de vie) d'un système (ou d'un composant électronique), la propriété *2)* signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de sa durée de vie écoulée jusqu'alors (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. On dit alors que la loi exponentielle est **sans mémoire**. Cette propriété est adaptée à la simulation de phénomène sans vieillissement. Cette hypothèse peut paraître surprenante. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.
- Finalement, on a démontré en *2.* que la loi exponentielle est sans mémoire. Mieux : c'est même la seule loi à densité sans mémoire.
  Pour ce qui est des v.a.r. discrètes, on peut démontrer que la seule loi sans mémoire est la loi géométrique.
  Il est donc classique que ces apparaissent dans les sujets qui traitent de durée de vie d'un système / d'un composant. Plus précisément :
  × si cette durée de vie / de fonctionnement est mesurée en nombre entier (nombre de cycles d'une batterie avant panne par exemple), c'est la loi géométrique qui risque d'apparaître.
  × si cette durée de vie / de fonctionnement est mesurée de manière continue, c'est la loi exponentielle qui risque d'apparaître.

3. Soient deux réels strictement positifs μ_1 et μ_2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2.

a) On pose $Y = \max(X_1, X_2)$.
Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire la densité de la variable Y.

Démonstration.

- Comme X_1 et X_2 suivent des lois exponentielles, on considère : $X_1(\Omega) = [0, +\infty[= X_2(\Omega)$.

$$\boxed{\text{D'où : } Y(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\Big([\max(X_1, X_2) \leqslant x]\Big) & \\ & = & \mathbb{P}\Big([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x]\Big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant x]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 \leqslant x]\big) & \textit{(car } X_2 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & F_{X_1}(x) \times F_{X_2}(x) & \\ & = & (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x}) \times (1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}) & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1) \textit{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_2)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x})\,(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- La fonction F_Y est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante (nulle) sur cet intervalle.
  - × sur $]0, +\infty[$ par produit de fonctions continues sur cet intervalle.
  - × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$,
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = \big(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 0}\big)\, \big(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 0}\big) = (1-1)\,(1-1) = 0$.

  Et ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) \ = \ F_Y(0) \ = \ \lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

Pour déterminer une densité f_Y de Y, on dérive F_Y sur les intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Si $x \in \,]-\infty, 0[$.

$$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ 0$$

× Si $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} f_Y(x) & = & F_Y'(x) \\ & = & \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\, (1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}) + (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x})\, \mu_2\, \mathrm{e}^{-\mu_2 x} \\ & = & \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x} - \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\, \mathrm{e}^{-\mu_2 x} - \mu_2\, \mathrm{e}^{-\mu_2 x}\, \mathrm{e}^{-\mu_1 x} + \mu_2\, \mathrm{e}^{-\mu_2 x} \\ & = & \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x} - (\mu_1 + \mu_2)\, \mathrm{e}^{-(\mu_1 + \mu_2)\, x} + \mu_2\, \mathrm{e}^{-\mu_2 x} \end{array}$$

× On choisit enfin : $f_Y(0) = 0$.

Ainsi, une densité f_Y de Y est :

$$f_Y : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \,]-\infty, 0] \\ \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 t} - (\mu_1 + \mu_2)\, \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, t} + \mu_2\, \mathrm{e}^{-\mu_2 t} & \text{si } t \in \,]0, +\infty[\end{cases}.$$

□

b) On pose $Z = \min(X_1, X_2)$.
Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z et en déduire la loi de Z.

Démonstration.

- Comme X_1 et X_2 suivent des lois exponentielles, on considère : $X_1(\Omega) = [0, +\infty[\, = X_2(\Omega)$.

D'où : $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ (car $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}\big([Z \leqslant x]\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big([Z > x]\big) \\ = \ & \mathbb{P}\Big([\min(X_1, X_2) > x]\Big) \\ = \ & \mathbb{P}\Big([X_1 > x] \cap [X_2 > x]\Big) \\ = \ & \mathbb{P}\big([X_1 > x]\big) \times \mathbb{P}\big([X_2 > x]\big) & \textit{(car } X_2 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ = \ & \mathrm{e}^{-\mu_1 x} \times \mathrm{e}^{-\mu_2 x} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1) \textit{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_2)\textit{)} \\ = \ & \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, x} \end{aligned}$$

  Ainsi : $F_Z(x) = \mathbb{P}\big([Z \leqslant x]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([Z > x]\big) = 1 - \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, x}$.

$$\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

- On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$.
  Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

On en conclut : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$.

□

Partie II. Fiabilité

Soit T une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que T est une variable à densité f_T continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
On appelle fiabilité de T la fonction R_T définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$R_T(t) = \mathbb{P}([T \geqslant t]) = \mathbb{P}([T > t]) = 1 - F_T(t)$$

où F_T est la fonction de répartition de T.

4. Soient t un réel positif ou nul et h un réel strictement positif.
La dégradation du système sur l'intervalle $[t, t+h]$ est mesurée par la probabilité $\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)$.
Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction R_T.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big) & = & F_T(t+h) - F_T(t) & \textit{(car T est à densité)} \\ & = & \big(\cancel{1} - R_T(t+h)\big) - \big(\cancel{1} - R_T(t)\big) & \\ & = & R_T(t) - R_T(t+h) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ \mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big) = R_T(t) - R_T(t+h)}$$

□

5. Montrer que, pour tout réel t positif ou nul,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}([t \leqslant T \leqslant t+h])}{h} = f_T(t)$$

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

- Soit $h > 0$. D'après la question précédente :

$$\frac{\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)}{h} = \frac{R_T(t) - R_T(t+h)}{h} = -\frac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h}$$

- La fonction f_T est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction F_T, qui est une primitive de f_T, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $R_T : t \mapsto 1 - F_T(t)$, la fonction R_T est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, en particulier en t. Ainsi :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h} = R_T'(t) = -F_T'(t) = -f_T(t)$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)}{h} = -\big(-f_T(t)\big) = f_T(t)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall t \geqslant 0,\ \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)}{h} = f_T(t)}$$

Commentaire

L'énoncé souhaitait sans doute que l'on utilise le résultat final de la question précédente (ce que l'on fait dans la démonstration ci-dessus). On pouvait aussi choisir de raisonner avec la fonction F_T plutôt que la fonction R_T.

- Soit $h > 0$. D'après la question précédente :

$$\frac{\mathbb{P}\big([t \leqslant T \leqslant t+h]\big)}{h} = \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h}$$

- La fonction f_T est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction F_T, qui est une primitive de f_T, est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. En particulier elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et donc en $t \in \mathbb{R}_+$. On en déduit :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} = F_T'(t) = f_T(t)$$

□

6. a) Justifier que pour tout réel t positif, $R_T(t) > 0$.

Démonstration.

- La foncion R_T est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car la fonction F_T l'est.
  Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$R_T'(t) = -F_T'(t) = -f_T(t)$$

  Or, d'après l'énoncé, si $t \in \mathbb{R}_+^*$, alors : $f_T(t) > 0$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad R_T'(t) < 0$$

- La fonction R_T est donc :
  × continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+$,
  × strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

  Ainsi, la fonction R_T réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $R_T\big([0, +\infty[\big)$.

$$R_T\big([0, +\infty[\big) = \left] \lim_{t \to +\infty} R_T(t), R_T(0) \right]$$

  Or :
  × d'une part :

$$R_T(0) = 1 - F_T(0) = 1 - 0 = 1$$

  En effet :

$$\begin{aligned} F_T(0) &= \mathbb{P}\big([T \leqslant 0]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([T = 0]\big) && \textit{(car } T \textit{ est à valeurs positives)} \\ &= 0 && \textit{(car } T \textit{ est à densité)} \end{aligned}$$

  × d'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} R_T(t) &= \lim_{t \to +\infty} 1 - F_T(t) \\ &= 1 - 1 && \textit{(car } F_T \textit{ est une fonction de répartition)} \end{aligned}$$

  Finalement, la fonction R_T réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \forall t \geqslant 0,\ R_T(t) > 0.}$$

□

On appelle taux de défaillance la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par le rapport $\lambda(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)}$.

b) On note : $g : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{R_T(t)}\right)$. Démontrer que $\lambda = g'$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$g(t) \ = \ \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) \ = \ -\ln\big(R_T(t)\big)$$

- La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$, car elle est la composée $g = h \circ R_T$ de :
  - × R_T qui est :
    - dérivable sur $[0, +\infty[$,
    - telle que : $h([0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$, d'après la question précédente.
  - × $h : t \mapsto -\ln(t)$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(t) \ = \ R_T'(t) \times (h' \circ R_T)(t) \ = \ -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)} \ = \ -\frac{-f_T(t)}{R_T(t)} \ = \ \frac{f_T(t)}{R_T(t)} \ = \ \lambda(t)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lambda = g'.}$$

□

c) Déduire l'expression de R_T en fonction de λ à l'aide d'une intégrale.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $g' = \lambda$. On en déduit que la fonction g est une primitive de λ.
- Avec des arguments similaires à ceux de la dérivabilité, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que la fonction λ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  Cette fonction λ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une primitive de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Considérons par exemple la primitive H de λ qui s'annule en 0. Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad H(x) \ = \ \int_0^x \lambda(t) \ dt$$

  La fonction g recherchée coïncide avec H à une constante près. Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = H(x) + c$.
- Commençons par déterminer H.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x \lambda(t) \ dt \\ &= \int_0^x g'(t) \ dt \\ &= [\ g(t)\ ]_0^x \\ &= g(x) - g(0) \end{aligned}$$

  Or, d'après ***6.a)*** : $g(0) = -\ln\big(R_T(0)\big) = -\ln(1) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ H(x) = g(x).}$$

- On obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{array}{lrcl} & g(x) & = & \displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt \\ \text{donc} & -\ln\big(R_T(x)\big) & = & \displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt \\ \text{d'où} & \ln\big(R_T(x)\big) & = & \displaystyle -\int_0^x \lambda(t)\ dt \\ \text{ainsi} & R_T(x) & = & \exp\left(-\displaystyle\int_0^x \lambda(t)\ dt\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ R_T(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\ dt\right).}$$

□

7. Soit Z une variable aléatoire réelle positive de densité g continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une espérance. On pose $R_Z(t) = \mathbb{P}([Z > t])$ pour $t \geqslant 0$.

a) Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v(t) = tR_Z(t)$.
Démontrer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$ où v' désigne la dérivée de v.

Démonstration.

- La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est le produit $v = h_1 \times R_Z$ de :
  × $h_1 : t \mapsto t$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale,
  × R_Z dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec une démonstration similaire à celle de la question ***5.***

$$\boxed{\text{La fonction } v \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$v'(t) \ = \ 1 \times R_Z(t) + t \times R_Z'(t) \ = \ R_Z(t) - t\,g(t)$$

On peut en effet démontrer, comme en question ***5.*** : $R_Z'(t) = -g(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ t\,g(t) = R_Z(t) - v'(t).}$$

□

b) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$v(t) \ = \ t\,R_Z(t) \ = \ t\,\mathbb{P}\big([Z > t]\big) \ = \ t \int_t^{+\infty} g(x)\ dx \ = \ \int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx$$

- On sait déjà, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$0 \ \leqslant \ \int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx \ = \ v(t)$$

En effet, g est une densité et donc positive sur $\mathbb{R}$, et : $t \geqslant 0$.
On cherche alors à trouver un majorant de v admettant 0 pour limite en $+\infty$, pour pouvoir appliquer le théorème d'encadrement.

- Pour majorer l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx$, on cherche à majorer, pour tout $x \in [t, +\infty[$, l'intégrande $t\,g(x)$.
Soit $x \in [t, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcccccl} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & x & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & t\,g(x) & \leqslant & x\,g(x) & \textit{(car, comme g est une densité : $g(x) \geqslant 0$)} \end{array}$$

Soit $B \in [t, +\infty[$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_t^{B} t\,g(x)\ dx \ \leqslant\ \int_t^{B} x\,g(x)\ dx$$

- Or :
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx$ est convergente. En effet, comme g est une densité, l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} g(x)\ dx$ est convergente.
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx$ est convergente, car Z admet une espérance (et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g(x)\ dx$ est convergente)

  On en déduit :

$$0 \ \leqslant\ \underbrace{\int_t^{+\infty} t\,g(x)\ dx}_{=\,v(t)} \ \leqslant\ \int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx$$

- Démontrons enfin : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx = 0$.

  Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Comme Z admet une espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Z) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g(x)\ dx \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x\,g(x)\ dx + \int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx \end{array}$$

  d'où :

$$\int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx \ = \ \mathbb{E}(Z) - \int_{-\infty}^{t} x\,g(x)\ dx \ \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\ \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Z) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} x\,g(x)\ dx = 0.}$$

Commentaire

- Ce point est une illustration d'un résultat classique sur les intégrales impropres. Étant donnée une intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt$ convergente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcccc} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt & = & \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)\ dt} & + & \underbrace{\displaystyle\int_{x}^{+\infty} h(t)\ dt} \\ & = & H(x) & + & R(x) \end{array}$$

La quantité $R(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} h(t)\ dt$ est appelé reste de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt$.
La fonction R ainsi construite admet pour limite 0 en $+\infty$. En effet :

$$R(x) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt - \int_{-\infty}^{x} h(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt = 0$$

- On connaît déjà un résultat classique similaire sur les séries. Étant donnée une série $\sum u_n$ convergente, de somme notée S et dont la suite des sommes partielles est notée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccc} \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k} & = & \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k} & + & \underbrace{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k} \\ S & = & S_n & + & R_n \end{array}$$

La quantité $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
La suite (R_n) ainsi construite est convergente de limite nulle. En effet :

$$R_n \ = \ S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$$

- On sait donc :
  × $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant v(t) \leqslant \displaystyle\int_{t}^{+\infty} x\, g(x)\ dx = 0$
  × $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_{t}^{+\infty} x\, g(x)\ dx = 0$
  × $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 0 = 0$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0.}$$

□

c) En déduire que $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} R_Z(t)\ dt$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme Z est à valeurs positives, sa densité g est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} t\, g(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} t\, g(t)\ dt$$

- D'après ***7.a)*** :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t\, g(t) \ = \ R_Z(t) - v'(t)$$
Ainsi, pour tout $B \in [0, +\infty[$:
$$\begin{aligned} \int_0^B t\, g(t)\, dt &= \int_0^B \big(R_Z(t) - v'(t)\big)\, dt \\ &= \int_0^B R_Z(t)\, dt - \int_0^B v'(t)\, dt \end{aligned}$$

- Or :
$$\begin{aligned} \int_0^B v'(t)\, dt &= \big[\ v(t)\ \big]_0^B \\ &= v(B) - v(0) \\ &= v(B) - \cancel{0 \times g(0)} \qquad \textit{(par définition de } v\textit{)} \end{aligned}$$

- On obtient :
$$\int_0^B R_Z(t)\, dt \ = \ \int_0^B t\, g(t)\, dt + v(B)$$
Or :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, g(t)\, dt$ est convergente et vaut $\mathbb{E}(Z)$,
  × d'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} v(B) = 0$.

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} R_Z(t)\, dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{De plus : } \int_0^{+\infty} R_Z(t)\, dt = \mathbb{E}(Z) + 0 = \mathbb{E}(Z).}$$

□

8. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé, le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne.
On a donc, pour tout réel x positif :
$$R_{T_t}(x) = \mathbb{P}([T_t > x]) = \mathbb{P}_{[T>t]}([T > t + x])$$

Commentaire

Notons que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, la quantité $R_{T_t}(x)$ est bien définie car, d'après la question ***6.a)*** :
$$\mathbb{P}\big(\,[T > t]\,\big) = R_T(t) > 0$$

a) Démontrer, pour tout réel x positif : $R_{T_t}(x) = \dfrac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{rcll} R_{T_t}(x) & = & \mathbb{P}_{[T>t]}\big(\,[T > t+x]\,\big) & \textit{(d'après l'énoncé)} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\big(\,[T > t+x] \cap [T > t]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[T > t]\,\big)} & \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\big(\,[T > t+x]\,\big)}{\mathbb{P}\big(\,[T > t]\,\big)} & \textit{(car, comme } x \geqslant 0 \textit{ :} \\ & & & [T > t+x] \subset [T > t]\textit{)} \\ & = & \dfrac{R_T(t+x)}{R_T(t)} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ R_{T_t}(x) = \dfrac{R_T(t+x)}{R_T(t)}}$$

□

b) En déduire :

$$\mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\ du$$

Démonstration.

- On souhaite ici appliquer la question ***7.*** à la v.a.r. T_t. On démontre donc que cette v.a.r. vérifie bien les hypothèses nécessaires.
- On se place ici dans le cas où le système a fonctionné sans panne jusqu'à l'instant t (autrement dit, on se place dans le cas où l'événement $[T > t]$ est réalisé). Alors la v.a.r. $T_t = T - t$:
  × est à valeurs (strictement) positives,
  × est à densité en tant que transformée affine de T ($T_t = a\,T + b$, où $a = 1$ et $b = -t$) qui est à densité et, en notant g_t une de ses densités :

$$g_t : x \mapsto \frac{1}{|1|}\ f_T\left(\frac{x-(-t)}{1}\right) = f_T(x+t)$$

  × admet une densité g_t continue sur $\mathbb{R}_+$, car g_t est la composée $g_t = f_T \circ h$ de :
    - $h : x \mapsto x + t$ qui est :
      ▸ continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynomiale,
      ▸ telle que : $f_T(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ (car $t \geqslant 0$).
    - f_T qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  × admet une espérance en tant que transformée affine de T qui en admet une (d'après l'énoncé de cette question ***8.***).
- On est donc bien placé dans le cadre d'application de la question ***7.*** pour la v.a.r. T_t. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T_t) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} R_{T_t}(x)\ dx & \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{R_T(x+t)}{R_T(t)}\ dx & \textit{(d'après la question} \\ & & & \textit{précédente)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+x)\ dx & \end{array}$$

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = t + x}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = t + x \quad \text{(et donc } x = u - t\text{)} \\ \hookrightarrow du = dx \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ u = t \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto u - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\, du.}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variable affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a bien fait en premier lieu).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

9. a) On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre μ.
Déterminer la fiabilité et le taux de défaillance.

Démonstration.

- Comme $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, alors :

$$F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mu\, e^{-\mu x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- Déterminons la fiabilité R_T de T.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$R_T(x) = 1 - F_T(x) = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-\mu x}\right) = e^{-\mu x}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R_T : x \mapsto e^{-\mu x}.}$$

- Déterminons le taux de défaillance λ_T de T.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\lambda_T(x) = \frac{f_T(x)}{R_T(x)} = \frac{\mu\, \cancel{e^{-\mu x}}}{\cancel{e^{-\mu x}}} = \mu$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lambda_T : x \mapsto \mu.}$$

□

b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

Démonstration.

- On note Z la durée de vie du système en série.
  Comme le système tombe en panne dès que l'in des 2 organes tombe en panne, on en déduit :
$$Z \;=\; \min(X_1, X_2)$$
- D'après la question ***3.b)***, on en déduit : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\mu_1 + \mu_2\right)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question précédente, on obtient :}\\ R_Z : x \mapsto \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)\,x} \quad \text{et} \quad \lambda_Z : x \mapsto \mu_1 + \mu_2\end{array}}$$
□

c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système.

Démonstration.

- On note Y la durée de vie du système en parallèle.
  Comme le système tombe en panne quand les 2 organes sont en panne, on en déduit :
$$Y \;=\; \max(X_1, X_2)$$
- D'après la question ***3.a)***, on en conclut que Y est une v.a.r. à densité et :
$$F_Y : x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1\,x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2\,x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{array}\right.$$
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
$$R_Y(x) \;=\; 1 - F_Y(x) \;=\; 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1\,x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2\,x}\right)$$
$$\boxed{\text{Finalement : } R_Y : x \mapsto 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1\,x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2\,x}\right).}$$
□

10. Soit $\varphi_{n,\beta}$ la fonction définie par :
$$\varphi_{n,\beta} : t \mapsto \left\{\begin{array}{cl} \dfrac{\beta}{(n-1)!}\;(\beta t)^{n-1}\;\mathrm{e}^{-\beta t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array}\right.$$
où $\beta > 0$ est une constante strictement positive et n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

Démonstration.

- La fonction $\varphi_{n,\beta}$ est continue :
  × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi_{n,\beta} \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < 0$, alors : $\varphi_{n\beta}(x) = 0 \geqslant 0$.
  × si $x \geqslant 0$, alors : $\varphi_{n,\beta}(x) = \dfrac{\beta}{(n-1)!} \ (\beta t)^{n-1} \ \mathrm{e}^{-\beta t} \geqslant 0$ (car $\beta > 0$)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_{n,\beta}(x) \geqslant 0}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$ est convergente et vaut 1.
  × Tout d'abord, comme $\varphi_{n,\beta}$ est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$$

  × La fonction $\varphi_{n,\beta}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.
  × De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\varphi_{n,\beta}(t) \ = \ \frac{1}{(n-1)!} \ \beta^{n-1} \times t^{n-1}\, \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{n-1}\, \beta\, \mathrm{e}^{-\beta\, t}\ dt$ est le moment d'ordre $n-1$ d'une v.a.r. X de loi $\mathcal{E}(\beta)$. D'après d'après la question ***1.c)***, elle est convergente et vaut : $\mathbb{E}(X^{n-1}) = \dfrac{(n-1)!}{\beta^{n-1}}$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt$ est convergente et :

$$\int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt \ = \ \frac{1}{(n-1)!} \ \beta^{n-1} \times \mathbb{E}(X^{n-1}) \ = \ \frac{1}{(n-1)!} \ \beta^{n-1} \times \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}} \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'intégrale } \int_{0}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } \varphi_{n,\beta} \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

□

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\varphi_{n,\beta}$. Montrer que la fiabilité à la date t est :

$$R_T(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

Démonstration.

- Par définition de R_T :

$$R_T : x \mapsto 1 - F_T(x)$$

Comme F_T est la primitive de $\varphi_{n,\beta}$ qui admet pour limité 1 en $+\infty$, alors R_T est la primitive de $-\varphi_{n,\beta}$ qui admet pour limite 0 en $+\infty$.
Démontrons alors que la fonction G définie par :

$$G : t \mapsto \mathrm{e}^{-\beta\, t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta\, t)^k}{k!}$$

vérifie ces 2 propriétés :
× elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $G' = -\varphi_{n\beta}$,
× $\lim\limits_{t \to +\infty} G(t) = 0$

- La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est le produit $G = h_1 \times h_2$ de :
  - $h_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{-\beta t}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$,
  - $h_2 : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\beta t)^k}{k!}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est une fonction polynomiale.

  Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{rcl} G'(t) & = & h_1'(t)\, h_2(t) + h_1(t)\, h_2'(t) \\ & = & -\beta\, \mathrm{e}^{-\beta t} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\beta t)^k}{k!} + \mathrm{e}^{-\beta t} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\beta k}{k!}\, (\beta t)^{k-1} \\ & = & \beta\, \mathrm{e}^{-\beta t} \left(-\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\beta t)^k}{k!} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k}{k!}\, (\beta t)^{k-1} \right) \\ & = & \beta\, \mathrm{e}^{-\beta t} \left(-\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\beta t)^k}{k!} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{(k-1)!}\, (\beta t)^{k-1} \right) \\ & = & \beta\, \mathrm{e}^{-\beta t} \left(-\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\beta t)^k}{k!} + \sum\limits_{k=0}^{n-2} \dfrac{(\beta t)^k}{k!} \right) \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \beta\, \mathrm{e}^{-\beta t} \left(-\cancel{\sum\limits_{k=0}^{n-2} \dfrac{(\beta t)^k}{k!}} - \dfrac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} + \cancel{\sum\limits_{k=0}^{n-2} \dfrac{(\beta t)^k}{k!}} \right) \end{array}$$

  On en déduit :

$$G'(t) \;=\; -\frac{\beta}{(n-1)!}\, (\beta t)^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\beta t} \;=\; -\varphi_{n,\beta}(t)$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ G'(t) = -\varphi_{n,\beta}(t)}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$G(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left((\beta t)^k\, \mathrm{e}^{-\beta t} \right)$$

  Or, par croissances comparées, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\lim_{t \to +\infty} (\beta t)^k\, \mathrm{e}^{-\beta t} \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t \to +\infty} G(t) = 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } R_T = G.}$$

□

Commentaire

- La loi présentée dans cette question ***10.)*** est appelée loi d'Erlang (hors programme) de paramètres n et β. Cette loi est liée à des lois de probabilité classiques :
  - lorsque $n = 1$ (*cf* initialisation de la récurrence du ***10.)***), on reconnaît la loi exponentielle de paramètre β.
  - de manière générale, la loi d'Erlang est un cas spécial de la loi Gamma (qui admet deux paramètres notés généralement α et β) dont une densité est donnée par :

$$t \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 0\,; \\[2mm] \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, \mathrm{e}^{-\beta t}\, t^{\alpha-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{array} \right.$$

  En prenant $\alpha = n$, on reconnaît la densité f_n de la quesiton de l'énoncé.

Commentaire

- Cette loi Gamma se définit à l'aide de la fonction :
$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$
que l'on peut rencontrer par exemple dans `ESSEC II 2005`.
Pour rappel, la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on peut démontrer (penser à une IPP) :
$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \end{cases}$$
de sorte que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.
(on peut voir la fonction Γ comme un prolongement de la fonction factorielle)
- La loi de Weibull est elle aussi très classique aux concours (c'est l'objet de la question ***11.***).

11. Soit $\psi_{\beta,\eta}$ la fonction définie par :
$$\psi_{\beta,\eta} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
où $\beta \geqslant 1, \eta > 0$.

a) Vérifier que $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité (loi de Weibull).

Démonstration.

- La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \psi_{\beta,\eta} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $t < 0$, alors : $\psi_{\beta,\eta}(t) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $t \geqslant 0$, alors : $\psi_{\beta,\eta}(t) = \dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$ (car $\beta > 0$ et $\eta > 0$)

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \psi_{\beta,\eta}(t) \geqslant 0}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme la fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est nulle en dehors de $[0, +\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt \ = \ \int_0^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt$$
  - × De plus, la fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

× Soit $B \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^B \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt \;=\; \int_0^B \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\, dt \;=\; \left[-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\right]_0^B \;=\; 1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{B}{\eta}\right)^\beta}$$

Or, comme $\beta > 0$: $\lim\limits_{B\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{B}{\eta}\right)^\beta} = 1-0 = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \psi_{\beta,\eta} \text{ est donc une densité de probabilité.}}$$

□

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\psi_{\beta,\eta}$.
Déterminer la fiabilité $R_T(t)$ et le taux de défaillance $\lambda(t)$ à la date t.

Démonstration.

- Tout d'abord, on considère : $T(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{T(\Omega) = [0, +\infty[}$$

- Déterminons R_T. Pour cela on commence par déterminer la fonction de répartition F_T de T.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x < 0$, alors $[T \leqslant x] = \varnothing$ (car $T(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :

$$F_T(x) \;=\; \mathbb{P}\big([T \leqslant x]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

× si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_{-\infty}^x \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt \\ &= \int_0^x \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt && \textit{(car } \psi_{\beta,\eta} \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \int_0^x \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\, dt \\ &= 1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} && \textit{(en reprenant les calculs de la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{Comme, pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ R_T(t) = 1 - F_t(t), \text{ on obtient : } R_T : x \mapsto \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}.}$$

- Déterminons maintenant λ.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\lambda(t) \;=\; \frac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{R_T(t)} \;=\; \frac{\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cancel{\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}}}{\cancel{\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}}} \;=\; \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lambda : t \mapsto \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}}$$

□

c) Étudier $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t)$ en fonction de la valeur de β.

Démonstration.

- Soit $t \in [0, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\lambda(t) \;=\; \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

- D'après l'énoncé : $\beta \geqslant 1$. Deux cas se présentent alors :

  × si $\beta = 1$, alors :

$$\lambda(t) \;=\; \frac{1}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{1-1} \;=\; \frac{1}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{0} \;=\; \frac{1}{\eta}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \beta = 1, \text{ alors : } \lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t) = \frac{1}{\eta}.}$$

Commentaire

Notons que si $\beta = 1$, alors $\psi_{1,\eta}$ est une densité de la loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\eta}\right)$. On retrouve bien dans ce cas, conformément à la question ***9.a)***, un taux de défaillance constant.

  × si $\beta > 1$, alors :

$$\lambda(t) \;=\; \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

Comme $\eta > 0$, alors : $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{\eta} = +\infty$. Or $\beta - 1 > 0$. D'où : $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \beta > 1, \text{ comme } \eta > 0, \text{ alors : } \lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(t) = +\infty.}$$

□

Partie III. Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0, t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.
On notera en particulier que pour $s \leqslant t$, on a $N_s \leqslant N_t$.
On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

- $N_0 = 0$ et $0 < \mathbb{P}([N_t = 0]) < 1$ pour tout $t > 0$.
- Pour tous réels $t_0, t_1, \dots, t_n$ tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants).
- Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires).
- $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbb{P}([N_h > 1])}{h} = 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geqslant 0$ et pour tout s dans [0,1], $G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u})$, avec la convention $0^0 = 1$.

12. a) Justifier que pour tout $u \geqslant 0$, $G_u(s)$ existe pour tout s dans [0,1] et qu'on a, pour tout $s \in [0, 1]$:

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k])\ s^k$$

Démonstration.
Soit $u \geqslant 0$. Soit $s \in [0, 1]$.

- Par théorème de transfert, la v.a.r. s^{N_u} admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} s^k\, \mathbb{P}\big([N_u = k]\big)$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer sa convergence car c'est une série à termes positifs.
- On remarque de plus :
  × $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant s^k\, \mathbb{P}\big([N_u = k]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([N_u = k]\big)$. En effet, soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rccccl} & 0 & \leqslant & s & \leqslant & 1 & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & s^k & \leqslant & 1 & \textit{(par croissance de } x \mapsto x^k \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{d'où} & 0 & \leqslant & s^k\, \mathbb{P}\big([N_u = k]\big) & \leqslant & \mathbb{P}\big([N_u = k]\big) & \textit{(car } \mathbb{P}\big([N_u = k]\big) \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

  × la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}\big([N_u = k]\big)$ est convergente car la famille $\big([N_u = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (et en particulier : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_u = k]\big) = 1$).

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum\limits_{k \geqslant 0} s^k\, \mathbb{P}\big([N_u = k]\big)$ est convergente.
  La v.a.r. s^{N_u} admet donc une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que } G_u(s) \text{ existe et } G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k\, \mathbb{P}\big([N_u = k]\big).}$$

□

Commentaire

- On pouvait également conclure avec une autre comparaison. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcccccl} & 0 & \leqslant & \mathbb{P}([N_u = k]) & \leqslant & 1 & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & s^k\, \mathbb{P}([N_u = k]) & \leqslant & s^k & \quad \textit{(car } s^k \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

  Deux cas se présentent alors :

  × si $s \in [0, 1[$, alors la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} s^k$ est une série géométrique de raison $s \in]-1, 1[$. Elle est donc convergente.
    Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} s^k\, \mathbb{P}([N_u = k])$ est convergente.

  × si $s = 1$, alors, comme $\big([N_u = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}([N_u = k])$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \mathbb{P}([N_u = k]) \times 1^k$ est convergente.

- Pour tout $u \geqslant 0$, la fonction G_u est appelée *fonction génératrice des probabilités* de la v.a.r. N_u. Cette fonction est en fait définie pour toute v.a.r. X à valeurs entières et positives par la formule :

$$\forall s \in [0, 1], \quad G_X(s) \ = \ \mathbb{E}(s^X) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} s^k\, \mathbb{P}([X = k])$$

  Cette fonction est un objet classique en probabilités. Elle caractérise la loi de la v.a.r. X. Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) \ = \ \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

  On verra en question suivante une propriété de ces fonctions dans le cas d'une somme de v.a.r. indépendantes.

b) Montrer par ailleurs que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a :

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s)$$

Démonstration.
Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Soit $s \in [0, 1]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} G_{u+v}(s) & = & \mathbb{E}\big(s^{N_{u+v}}\big) \\ & = & \mathbb{E}\big(s^{N_{u+v} - N_v + N_v}\big) \\ & = & \mathbb{E}\big(s^{N_{u+v} - N_v}\ s^{N_v}\big) \end{array}$$

- Or les v.a.r. $N_{u+v} - N_v$ et N_v sont indépendantes (par hypothèse des accroissements indépendants). Ainsi, par lemme des coalitions, les v.a.r. $s^{N_{u+v} - N_v}$ et s^{N_v} sont également indépendantes.

D'où :

$$\begin{aligned} G_{u+v}(s) &= \mathbb{E}\big(s^{N_{u+v}-N_v}\big)\,\mathbb{E}\big(s^{N_v}\big) \\ &= \mathbb{E}\big(s^{N_{(u+\cancel{v})-\cancel{v}}}\big)\,\mathbb{E}\big(s^{N_v}\big) && \textit{(par hypothèse d'accroissements stationnaires)} \\ &= \mathbb{E}\big(s^{N_u}\big)\,\mathbb{E}\big(s^{N_v}\big) \\ &= G_u(s)\,G_v(s) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (u,v) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^2,\ \forall s \in [0,1],\ G_{u+v}(s) = G_u(s)\,G_v(s)}$$

□

Commentaire

- Cette question peut sembler difficile car elle demande une prise d'initiative importante. En particulier, il peut paraître difficile de penser à l'écriture $N_{u+v} = N_{u+v} - N_v + N_v$. Il est conseillé de limiter le champ des recherches.
  1) On cherche à faire apparaître le produit $G_u(s)\,G_v(s) = \mathbb{E}\big(s^{N_u}\big)\,\mathbb{E}\big(s^{N_v}\big)$ qui est un produit d'espérances. On peut donc penser qu'il provient de l'espérance d'un produit de variables aléatoires **indépendantes**,
  2) L'énoncé précise que les accroissements du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ sont indépendants. On va donc essayer d'en forcer l'apparition. C'est ce que l'on fait avec l'écriture $s^{N_{u+v}} = s^{N_{u+v}-N_v}\, s^{N_v}$, provenant elle-même de l'égalité : $N_{u+v} = N_{u+v} - N_v + N_v$.
  (notons que l'écriture $N_{u+v} = N_{u+v} - N_u + N_u$ aurait tout aussi bien fonctionné)

  On peut retenir que ce type de procédé est très fréquent dans le cas de l'étude d'un processus aux accroissements indépendants, comme c'est le cas des processus de Poisson (ceux étudiés dans ce sujet).
- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-question. Moins il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives. Ainsi, un sujet de type `TOP3` proposera un découpage en sous-questions bien moins détaillé qu'un sujet `TOP5`.
- On peut démontrer une propriété plus générale sur les fonctions génératrices. Pour toutes v.a.r. X et Y à valeurs entières et positives **indépendantes** :

  $$G_{X+Y} = G_X\, G_Y$$

  En effet, pour tout $s \in [0,1]$:

  $$\begin{aligned} G_{X+Y}(s) &= \mathbb{E}\big(s^{X+Y}\big) \\ &= \mathbb{E}\big(s^X\, s^Y\big) \\ &= \mathbb{E}\big(s^X\big)\,\mathbb{E}\big(s^Y\big) && \textit{(car } s^X \textit{ et } s^Y \textit{ sont indépendantes par lemme des coalitions)} \\ &= G_X(s)\,G_Y(s) \end{aligned}$$

13. On fixe s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$.

a) Montrer que $G_1(s) > 0$.
On pose $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ et, pour $u \geqslant 0$, $\psi(u) = G_u(s)$.

Démonstration.

- D'après ***12.a)*** :

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_1 = k]\big)\, s^k \\ &= \mathbb{P}\big([N_1 = 0]\big)\, s^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_1 = k]\big)\, s^k \\ &= \mathbb{P}\big([N_1 = 0]\big) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_1 = k]\big)\, s^k \end{aligned}$$

- De plus : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([N_1 = k]\big)\, s^k \geqslant 0$. Donc : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_1 = k]\big)\, s^k \geqslant 0$.
- De plus, d'après l'énoncé : $\forall t > 0$, $\mathbb{P}\big([N_t = 0]\big) > 0$. En particulier : $\mathbb{P}\big([N_1 = 0]\big) > 0$. D'où :

$$\mathbb{P}\big([N_1 = 0]\big) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_1 = k]\big)\, s^k \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{D'où : } G_1(s) > 0}$$

□

b) Montrer que $\psi(k) = \mathrm{e}^{-k\theta(s)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ où $\mathcal{P}(k)$: $\psi(k) = \mathrm{e}^{-k\,\theta(s)}$.

▶ **Initialisation** :

- D'une part : $\psi(0) = G_0(s) = \mathbb{E}\big(s^{N_0}\big) = \mathbb{E}\big(s^0\big) = \mathbb{E}(1) = 1$.
- D'autre part : $\mathrm{e}^{-0\times\theta(s)} = \mathrm{e}^0 = 1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▶ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(k)$ et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\psi(k+1) = \mathrm{e}^{-(k+1)\,\theta(s)}$).

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= G_{k+1}(s) \\ &= G_k(s) \times G_1(s) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{12.b)}}\textit{)} \\ &= \psi(k) \times G_1(s) \\ &= \mathrm{e}^{-k\,\theta(s)} \times G_1(s) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \mathrm{e}^{-k\,\theta(s)}\, \mathrm{e}^{-\theta(s)} \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} && \theta(s) &= -\ln\big(G_1(s)\big) \\ &\text{donc} & -\theta(s) &= \ln\big(G_1(s)\big) \\ &\text{d'où} & \mathrm{e}^{-\theta(s)} &= G_1(s) \end{aligned}$$

Ainsi : $\psi(k+1) = \mathrm{e}^{-k\,\theta(s)}\, \mathrm{e}^{-\theta(s)} = \mathrm{e}^{-k\,\theta(s) - \theta(s)} = \mathrm{e}^{-(k+1)\,\theta(s)}$.
D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } k \in \mathbb{N},\ \psi(k) = \mathrm{e}^{-k\,\theta(s)}.}$$

□

c) Soit q un entier naturel non nul. En considérant $G_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer que $\psi(\frac{1}{q}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\psi\left(\dfrac{1}{q}\right) = G_{\frac{1}{q}}(s)$.
- On cherche à utiliser la question précédente. Pour cela, on remarque :

$$G_1(s) \;=\; G_{q\times\frac{1}{q}}(s) \;=\; \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q$$

  La dernière égalité est obtenue en remarquant que, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant 0, \quad G_{nx}(s) \;=\; \left(G_x(s)\right)^n$$

  On a appliqué cette égalité à $n = q$ et $x = \dfrac{1}{q}$.
- Ainsi :

$$G_1(s) \;=\; \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q \qquad \text{donc} \qquad \left(G_1(s)\right)^{\frac{1}{q}} \;=\; G_{\frac{1}{q}}(s)$$

  On en déduit :

$$G_{\frac{1}{q}}(s) \;=\; \left(G_1(s)\right)^{\frac{1}{q}} \;=\; \left(\mathrm{e}^{-\theta(s)}\right)^{\frac{1}{q}} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\,\theta(s)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \psi\left(\tfrac{1}{q}\right) = G_{\frac{1}{q}}(s) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\,\theta(s)}}$$

Commentaire

- Cette question peut aussi sembler difficile. En particulier, il peut paraître difficile de penser :

  1) à l'égalité : $G_1(s) \;=\; G_{q\times\frac{1}{q}}(s)$

  2) à la récurrence pour obtenir : $G_{q\times\frac{1}{q}}(s) \;=\; \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q$.
- L'idée est une nouvelle fois de limiter le champ des recherches. La seule information sur la fonction ψ est celle obtenue en question précédente. On cherche donc à faire apparaître $G_k(s)$ où $k \in \mathbb{N}$. Pour forcer l'apparition d'un indice entier, on choisit la solution la plus simple : multiplier q par $\dfrac{1}{q}$. On force ainsi l'apparition de $G_1(s)$ (l'indice 1 est bien un entier).
- Démontrons ***2)***, *i.e.* , pour tout $x \geqslant 0$, démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $G_{nx}(s) = \left(G_x(s)\right)^n$.
  - **Initialisation** :
    - × d'une part : $G_{0\times x}(s) = G_0(s) = 1$ (d'après l'initialisation de ***13.b)***),
    - × d'autre part : $\left(G_x(s)\right)^0 = 1$.

    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $G_{(n+1)x}(s) = \left(G_x(s)\right)^{n+1}$).

$$\begin{aligned} G_{(n+1)x}(s) &= G_{nx+x}(s) \\ &= G_{nx}(s) \times G_x(s) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{12.b)}}\textit{)} \\ &= \left(G_x(s)\right)^n \times G_x(s) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(G_x(s)\right)^{n+1} \end{aligned}$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

□

d) Montrer que si p est entier naturel et q un entier naturel non nul, on a $\psi(r) = \mathrm{e}^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \frac{p}{q}$.

Démonstration.
Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On pose : $r = \dfrac{p}{q}$.

$$\begin{array}{rcll}
\psi(r) & = & G_r(s) \ = \ G_{\frac{p}{q}}(s) & \\
& = & G_{p \times \frac{1}{q}}(s) & \\
& = & \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^p & \textit{(d'après le résultat de la récurrence en question précédente, appliqué à } n = p \textit{ et } x = \dfrac{1}{q}\textit{)} \\
& = & \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\ \theta(s)}\right)^p & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \mathrm{e}^{-\frac{p}{q}\ \theta(s)} \ = \ \mathrm{e}^{-r\,\theta(s)} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \text{ en posant } r = \dfrac{p}{q}, \text{ on a : } \psi(r) = \mathrm{e}^{-r\,\theta(s)}.}$$ □

e) Montrer que pour tout réel positif u, $G_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

Démonstration.
Soit $u \geqslant 0$.

- On cherche à utiliser la question précédente. Pour cela, on souhaite encadrer le réel u à l'aide de 2 suites de rationnels convergentes de limite u. On espère ensuite en déduire un encadrement de $\psi(u)$. On propose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \ \leqslant \ u \ < \ \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \frac{1}{n} \qquad (\star)$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$r_n = \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \qquad \text{et} \qquad R_n = \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$$

Vérifions tout d'abord que l'encadrement cité plus haut est vrai et que les deux suites (r_n) et (R_n) convergent bien vers u.

× Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière :

$$\begin{array}{rcccccl}
 & \lfloor nu \rfloor & \leqslant & nu & < & \lfloor nu \rfloor + 1 & \\
\text{donc} & \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} & \leqslant & u & < & \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} & \textit{(car } n > 0\textit{)} \\
\text{d'où} & r_n & \leqslant & u & < & R_n &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \, r_n \leqslant u < R_n}$$

× Démontrons : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = u$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après $(*)$:

$$\begin{array}{lrcl} & \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leqslant u & < & \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} \\ \text{donc} & \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leqslant u & \texttt{ET} & u < \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} \\ \text{d'où} & \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leqslant u & \texttt{ET} & u - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} \\ \text{ainsi} & & u - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leqslant u & \\ \text{alors} & & u - \dfrac{1}{n} < r_n \leqslant u & \end{array}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} u + \dfrac{1}{n} = u$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = u.}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = r_n + \dfrac{1}{n}.\ \text{Ainsi : } \lim\limits_{n\to+\infty} R_n = u + 0 = u.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche alors à encadrer $\psi(u)$ à l'aide de $\psi(r_n)$ et $\psi(R_n)$.

× D'après $(*)$:

$$r_n \leqslant u < R_n$$

× Or, d'après l'énoncé, pour tout $(t_1, t_2) \in \big(\mathbb{R}_+\big)^2$, si $t_1 \leqslant t_2$, alors : $N_{t_1} \leqslant N_{t_2}$. On en déduit :

$$N_{r_n} \leqslant N_u \leqslant N_{R_n}$$

× Comme $s \in [0,1]$, deux cas se présentent :

- si $s \in \,]0,1]$, alors : $\ln(s) \leqslant 0$. Donc :

$$\begin{array}{lccccc} & N_{r_n} \ln(s) & \geqslant & N_u \ln(s) & \geqslant & N_{R_n} \ln(s) \\ \text{d'où} & \exp\left(N_{r_n} \ln(s)\right) & \geqslant & \exp\left(N_u \ln(s)\right) & \geqslant & \exp\left(N_{R_n} \ln(s)\right) \\ \text{ainsi} & s^{N_{r_n}} & \geqslant & s^{N_u} & \geqslant & s^{N_{R_n}} \end{array}$$

(par croissance de exp *sur* $\mathbb{R}$*)*

- si $s = 0$, alors l'encadrement suivant est directement vérifié :

$$0^{N_{r_n}} \geqslant 0^{N_u} \geqslant 0^{N_{R_n}}$$

× Par croissance de l'espérance, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}\big(s^{N_{r_n}}\big) & \geqslant & \mathbb{E}\big(s^{N_u}\big) & \geqslant & \mathbb{E}\big(s^{N_{R_n}}\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \psi(r_n) & \geqslant & \psi(u) & \geqslant & \psi(R_n) \end{array}$$

- Or, comme $(r_n, R_n) \in \mathbb{Q}^2$, d'après la question précédente :

$$\mathrm{e}^{-r_n\,\theta(s)} \geqslant \psi(u) \geqslant \mathrm{e}^{-R_n\,\theta(s)}$$

- Enfin, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = u$, par continuité de la fonction exp en $-u\,\theta(s)$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-r_n\,\theta(s)} = \mathrm{e}^{-u\,\theta(s)}$.
De même : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-R_n\,\theta(s)} = \mathrm{e}^{-u\,\theta(s)}$.
- Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi(u) = \mathrm{e}^{-u\,\theta(s)}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall u \geqslant 0,\ \psi(u) = \mathrm{e}^{-u\,\theta(s)}.}$$

□

Commentaire

- Cette question est sans doute la plus difficile du sujet. Essayons de comprendre la démarche souhaitée par l'énoncé des questions ***13.b)*** à ***13.e)***.
- L'objectif est ici de démontrer la propriété :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \psi(u) = \mathrm{e}^{-u\,\theta(s)}$$

Pour ce faire, l'énoncé procède de la manière suivante :

1) démonstration de cette égalité sur $\mathbb{N}$ (et non $\mathbb{R}_+$). Autrement dit, on souhaite d'abord vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des entiers.
(pour cette étape, on raisonne souvent par récurrence)

2) démonstration de cette égalité pour des inverses d'entiers. Autrement dit, on souhaite vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des réels de la forme $\frac{1}{q}$ où $q \in \mathbb{N}^*$.
(pour cette étape, on utilise le point précédent, souvent en écrivant : $1 = q \times \frac{1}{q}$)

3) démonstration de cette égalité sur $\mathbb{Q}$. Autrement dit, on souhaite vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des réels de la forme $r = \frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
(pour cette étape, on utilise le point précédent)

4) démonstration de cette égalité sur $\mathbb{R}_+$ comme souhaité.
(pour cette étape, on utilise le point précédent, souvent en encadrant u par deux suites de rationnels convergentes de limite u)

- Chaque étape consiste donc en une généralisation de la précédente. Cette démarche, bien qu'originale en ECE, est classique en mathématiques.

f) En déduire que pour tout $s \in [0, 1]$, $\lim\limits_{h\to0^+} \dfrac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

Démonstration.
Soit $s \in [0, 1]$. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

- D'après la question précédente :

$$\frac{G_h(s) - 1}{h} = \frac{\psi(h) - 1}{h} = \frac{\mathrm{e}^{-h\,\theta(s)} - 1}{h}$$

- Or, comme $\lim\limits_{h\to 0} \; -h\,\theta(s) = 0$, alors :

$$\mathrm{e}^{-h\,\theta(s)} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} -h\,\theta(s)$$

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{e}^{-h\,\theta(s)} - 1}{h} \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{\cancel{h}\,\theta(s)}{\cancel{h}} = -\theta(s)$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } s \in [0,1] : \lim_{h\to 0^+} \frac{G_h(s)-1}{h} = -\theta(s).}$$

□

14. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_h(s) - 1 = \mathbb{P}([N_h = 1])\ (s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k])\ (s^k - 1)$$

Démonstration.
Soit $s \in [0,1]$.

- Tout d'abord, d'après ***12.a)*** :

$$\begin{aligned} G_h(s) - 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\, s^k - 1 \\ &= \Big(\mathbb{P}\big([N_h = 0]\big)\, s^0 + \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)\, s^1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\, s^k\Big) - 1 \\ &= \Big(\mathbb{P}\big([N_h = 0]\big) + \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)\, s + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\, s^k\Big) - 1 \end{aligned}$$

- Or la famille $\big([N_h = k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big) = 1$$

D'où :

$$\begin{aligned} G_h(s) - 1 &= \Big(\mathbb{P}\big([N_h = 0]\big) + \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)\, s + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\, s^k\Big) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big) \\ &= \Big(\cancel{\mathbb{P}\big([N_h = 0]\big)} + \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)\, s + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\, s^k\Big) \\ &\quad - \Big(\cancel{\mathbb{P}\big([N_h = 0]\big)} + \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\Big) \\ &= \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)\,(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(s^k - 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall s \in [0,1],\ G_h(s) - 1 = \mathbb{P}\big([N_h = 1]\big)\,(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(s^k - 1)}$$

□

15. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$: $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k])\ (s^k - 1)}{h} = 0$.

Démonstration.
Soit $s \in [0,1]$.

- On souhaite encadrer $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(s^k - 1)$. On commence donc par encadrer, pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$: $\mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(s^k - 1)$.
- Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$.

$$\begin{array}{lcccccl}
 & 0 & \leqslant & s & \leqslant & 1 & \\
\text{donc} & 0 & \leqslant & s^k & \leqslant & 1 & \textit{(par croissance de } x \mapsto x^k \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
\text{d'où} & -1 & \leqslant & s^k - 1 & \leqslant & 0 & \\
\text{ainsi} & -\mathbb{P}\big([N_h = k]\big) & \leqslant & \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(s^k - 1) & \leqslant & 0 & \textit{(car } \mathbb{P}\big([N_h = k]\big) \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

- On obtient alors :
  × $\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ 0 \leqslant \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(1 - s^k) \leqslant \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)$
  × la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)$ est convergente car $\big([N_h = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.

  Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum\limits_{k \geqslant 2} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(1 - s^k)$ est convergente et :
$$0 \ \leqslant\ \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(1 - s^k) \ \leqslant\ \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)$$

- De plus, comme la v.a.r. N_h est à valeurs entières :
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big) \ =\ \mathbb{P}\big([N_h \geqslant 2]\big) \ =\ \mathbb{P}\big([N_h > 1]\big)$$

- On en déduit :
$$0 \ \leqslant\ \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(1 - s^k) \ \leqslant\ \mathbb{P}\big([N_h > 1]\big)$$
  D'où :
$$0 \ \geqslant\ \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(s^k - 1) \ \geqslant\ -\mathbb{P}\big([N_h > 1]\big)$$
  Ainsi, comme $h > 0$:
$$0 \ \geqslant\ \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(s^k - 1)}{h} \ \geqslant\ -\frac{\mathbb{P}\big([N_h > 1]\big)}{h}$$

- Or, d'après l'énoncé : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathbb{P}\big([N_h > 1]\big)}{h} = 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, on obtient : } \lim_{h \to 0} \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N_h = k]\big)\,(s^k - 1)}{h} = 0.}$$

□

16. a) En déduire qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\mathbb{P}([N_h = 1])}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0,1]$:

$$\theta(s) = \alpha(1-s)$$

Démonstration.
Soit $s \in [0,1]$.

- Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question ***14.*** :

$$\mathbb{P}\big(\,[N_h = 1]\,\big)\,(s-1) \;=\; G_h(s) - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[N_h = k]\,\big)\, s^k$$

  D'où :

$$\frac{\mathbb{P}\big(\,[N_h = 1]\,\big)}{h} \;=\; \frac{1}{s-1}\left(\frac{G_h(s)-1}{h} - \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[N_h = k]\,\big)\,(s^k - 1)}{h}\right) \qquad (*)$$

- Or :
  × d'après ***13.f)*** : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{G_h(s)-1}{h} = -\theta(s)$,
  × d'après la question précédente : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[N_h = k]\,\big)\,(s^k - 1)}{h} = 0$.

  On en déduit que la fonction $h \mapsto \dfrac{\mathbb{P}\big(\,[N_h = 1]\,\big)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0.

$$\boxed{\text{Autrement dit, il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}\big(\,[N_h = 1]\,\big)}{h} = \alpha.}$$

- De plus, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\dfrac{\mathbb{P}\big(\,[N_h = 1]\,\big)}{h} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par passage à la limite : } \alpha \geqslant 0.}$$

- De plus, par passage à la limite dans $(*)$:

$$\begin{array}{lrcl} & \alpha & = & \dfrac{1}{s-1}\big(-\theta(s) + 0\big) \\ \text{donc} & (s-1)\,\alpha & = & -\theta(s) \\ \text{d'où} & (1-s)\,\alpha & = & \theta(s) \end{array}$$

$$\boxed{\forall s \in [0,1],\ \theta(s) = \alpha\,(1-s)}$$

□

b) En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

Démonstration.
Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$.

- D'une part, d'après ***13.e)*** :

$$\begin{array}{rcll} G_u(0) & = & \mathrm{e}^{-u\,\theta(s)} & \\ & = & \mathrm{e}^{-u\,\alpha\,(1-0)} \;=\; \mathrm{e}^{-u\,\alpha} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- D'autre part, d'après ***12.a)*** :

$$\begin{array}{rcll} G_u(0) & = & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[N_u = k]\,\big) \times 0^k & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big) \times 0^0 + \cancel{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[N_u = k]\,\big) \times 0^k} & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big) & \textit{(avec la convention : } 0^0 = 1\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi :
$$\mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big) \;=\; \mathrm{e}^{-u\,\alpha}$$
On remarque : $\mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big) > 0$. On en déduit :
$$\ln\Big(\mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big)\Big) \;=\; -u\,\alpha$$
D'où : $-\dfrac{\ln\Big(\mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big)\Big)}{u} = \alpha$.
- Comme $u > 0$, d'après l'énoncé :

$$\begin{array}{lrcll} & 0 \;<\; \mathbb{P}\big(\,[N_u = 1]\,\big) & < & 1 & \\ \text{donc} & \ln\Big(\mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big)\Big) & < & 0 & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & -\dfrac{\ln\Big(\mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big)\Big)}{u} & > & 0 & \textit{(car } u > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & \alpha & > & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \alpha > 0.}$$

□

c) On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k])\ s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-\alpha u}\frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^k$$

Démonstration.
Soit $s \in [0,1]$.

- D'une part, d'après ***12.a)*** :
$$G_u(s) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[N_u = k]\,\big)\, s^k$$
$$\boxed{G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k])\ s^k}$$
- D'autre part :

$$\begin{array}{rcll} G_u(s) & = & \mathrm{e}^{-u\,\theta(s)} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{13.e)}}\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-u\,\alpha\,(1-s)} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{16.a)}}\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-u\,\alpha}\,\mathrm{e}^{u\,\alpha\,s} & \end{array}$$

Or, par définition de la série exponentielle de paramètre $u\,\alpha\,s$:

$$\mathrm{e}^{u\,\alpha\,s} \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u\,\alpha\,s)^k}{k!}$$

On en déduit :

$$G_u(s) \;=\; \mathrm{e}^{-\alpha\,u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u\,\alpha\,s)^k}{k!} \;=\; \mathrm{e}^{-\alpha\,u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha\,u)^k}{k!}\; s^k \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^k}{k!}\right) s^k$$

$$\boxed{G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right) s^k}$$

□

d) Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

Démonstration.
Soit $u > 0$. Démontrons par récurrence forte : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$

où $\quad \mathcal{P}(k)$: $\mathbb{P}\big(\,[N_u = k]\,\big) = \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \dfrac{(\alpha\,u)^k}{k!}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part, d'après ***16.b)*** : $\mathbb{P}\big(\,[N_u = 0]\,\big) = \mathrm{e}^{-\alpha\,u}$.
- D'autre part : $\mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \dfrac{(\alpha\,u)^0}{0!} = \mathrm{e}^{-\alpha\,u}$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons : $\forall j \in [\![0, k]\!]$, $\mathcal{P}(j)$. Et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}\big(\,[N_u = k+1]\,\big) = \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \dfrac{(\alpha\,u)^{k+1}}{(k+1)!}$).

- Soit $s \in \,]0, 1[$. D'après ***16.c)*** :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,[N_u = j]\,\big)\, s^j \;=\; \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^j}{j!}\right) s^j$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big(\,[N_u = j]\,\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^j}{j!}\right) s^j \;=\; 0$$

D'où :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(\mathbb{P}\big(\,[N_u = j]\,\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^j}{j!}\right) s^j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big(\,[N_u = j]\,\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^j}{j!}\right) s^j \;=\; 0$$

- Or, par hypothèse de récurrence : $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $\mathbb{P}\big(\,[N_u = j]\,\big) = \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \dfrac{(\alpha\,u)^j}{j!}$. Ainsi :

$$\cancel{\sum_{j=0}^{k} 0 \times s^k} + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big(\,[N_u = j]\,\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^j}{j!}\right) s^j \;=\; 0$$

On obtient :

$$\left(\mathbb{P}\big(\,[N_u = k+1]\,\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^{k+1}}{(k+1)!}\right) s^{k+1} + \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big(\,[N_u = j]\,\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^j}{j!}\right) s^j \;=\; 0$$

En divisant par s^{k+1} (car $s \neq 0$), on a :

$$\left(\mathbb{P}\big(\,[N_u = k+1]\,\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^{k+1}}{(k+1)!}\right) + \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big(\,[N_u = j]\,\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\,u}\, \frac{(\alpha\,u)^j}{j!}\right) s^{j-(k+1)} \;=\; 0 \qquad (**)$$

- Démontrons : $\lim\limits_{s \to 0} \sum\limits_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \dfrac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^{j-(k+1)} = 0$.

   × Tout d'abord :
$$\sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^{j-(k+1)} \ = \ \frac{1}{s^{k+1}} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^j$$

   × De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \ \leqslant \ \mathbb{P}\big([N_u = j] \big) \ \leqslant \ 1$$
   De même, en notant Z une v.a.r. de loi $\mathcal{P}(\lambda\, u)$:
$$0 \ \leqslant \ \underset{\mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}\big([Z = j] \big)}} \ \leqslant \ 1$$
   On en déduit :
$$-1 \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \ \leqslant \ 1$$
   Donc :
$$-1 \ \leqslant \ \mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \ \leqslant \ 1$$
   Ainsi, comme $s^j \geqslant 0$:
$$-s^j \ \leqslant \ \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^j \ \leqslant \ s^j$$

   × Or les séries $\sum j \geqslant k+2 \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \dfrac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^j$ et $\sum\limits_{j \geqslant k+2} s^j$ sont convergentes. En effet, $\sum\limits_{j \geqslant k+2} s^j$ est une série géométrique de raison $s \in \,]-1, 1[$. On en déduit :
$$-\sum_{j=k+2}^{+\infty} s^j \ \leqslant \ \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^j \ \leqslant \ \sum_{j=k+2}^{+\infty} s^j$$

   × Par ailleurs :
$$\sum_{j=k+2}^{+\infty} s^j \ = \ \sum_{j=0}^{+\infty} s^{j+(k+2)} \ = \ s^{k+2} \sum_{j=0}^{+\infty} s^j \ = \ s^{k+2} \ \frac{1}{1-s}$$
   On en déduit :
$$-s^{k+2} \ \frac{1}{1-s} \ \leqslant \ \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^j \ \leqslant \ s^{k+2} \ \frac{1}{1-s}$$
   Enfin :
$$-\frac{s}{1-s} \ \leqslant \ \frac{1}{s^{k+1}} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^j \ \leqslant \ \frac{s}{1-s}$$

   × Or : $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{s}{1-s} = 0$. Ainsi, par théorème d'encadrement :
$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s^{k+1}} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^j = 0$$
   D'où :
$$\lim_{s \to 0} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\big([N_u = j] \big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u} \ \frac{(\alpha\, u)^j}{j!} \right) s^{j-(k+1)} \ = \ 0$$

- En passant à la limite quand s tend vers 0 dans $(**)$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}\big([N_u = k+1]\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u}\ \frac{(\alpha\, u)^{k+1}}{(k+1)!} + 0 \ = \ 0$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}\big([N_u = k+1]\big) - \mathrm{e}^{-\alpha\, u}\ \frac{(\alpha\, u)^{k+1}}{(k+1)!}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big([N_u = k]\big) = \mathrm{e}^{-\alpha\, u}\ \dfrac{(\alpha\, u)^k}{k!}$.

$$\boxed{\text{Comme de plus } N_u(\Omega) \subset \mathbb{N}, \text{ on en déduit : } N_u \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha\, u).}$$

□

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante α s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

17. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$.
Comparer les événements $[T > t]$ et $[N_t = 0]$.
En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

Démonstration.

- On remarque :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } [T > t] \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{la date de la } 1^{\text{ère}} \text{ panne est strictement postérieure à l'instant } t \\ \Leftrightarrow & \text{il n'est survenu aucune panne avant l'instant } t \\ \Leftrightarrow & \text{l'événement } [N_t = 0] \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } [T > t] = [N_t = 0].}$$

- Tout d'abord, la v.a.r. T est à valeurs positives d'après l'énoncé. Ainsi : $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. De plus, comme $N_0 = 0$, il ne survient aucune panne à l'instant 0.

$$\boxed{\text{D'où : } T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $t \leqslant 0$, alors $[T \leqslant t] = \varnothing$ (car $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$). D'où :

$$F_T(t) \ = \ \mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $t > 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_T(t) & = & \mathbb{P}\big([T \leqslant t]\big) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big([T > t]\big) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}\big([N_t = 0]\big) & \textit{(d'après ce qui précède)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\, t}\ \dfrac{(\alpha\, t)^0}{0!} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\, t} & \end{array}$$

Finalement : $F_t : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\, t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\alpha)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha).}$$

□

18. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

a) Montrer que $\tilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$. Soit $h \geqslant 0$.
Par définition de $\tilde{N}_h$:

$$\tilde{N}_h \;=\; N_{t+h} - N_t$$

Or :

× la v.a.r. N_t est le nombre de pannes survenues dans l'intervalle $[0, t]$,

× la v.a.r. N_{t+h} est le nombre de pannes survenues dans l'intervalle $[0, t+h]$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \tilde{N}_h \text{ est le nombre de panne survenues dans l'intervalle }]t, t+h].}$$

□

b) Montrer que la famille $(\tilde{N}_h)_{h\geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $(\tilde{N}_h)_{h\geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α s'il vérifie les mêmes propriétés que la famille $(N_t)_{t\geqslant 0}$ (en début de Partie III). Vérifions ces 4 points.

- Tout d'abord :

$$\tilde{N}_0 \;=\; N_{t+0} - N_t \;=\; 0$$

$$\boxed{\tilde{N}_0 = 0}$$

De plus, comme les accroissements du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ sont stationnaires, pour tout $h > 0$, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ suit la même loi que $N_{(\cancel{t}+h)-\cancel{t}} = N_h$. Ainsi :

$$\mathbb{P}\big(\big[\tilde{N}_h = 0\big]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([N_h = 0]\big)$$

Comme $h > 0$, alors : $0 < \mathbb{P}\big([N_h = 0]\big) < 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } 0 < \mathbb{P}\big(\big[\tilde{N}_h = 0\big]\big) < 1.}$$

- Soit $(h_0, h_1, \ldots, h_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que : $0 \leqslant h_0 < h_1 < \cdots < h_n$. Démontrons que les v.a.r. $\tilde{N}_{h_0}$, $\tilde{N}_{h_1} - \tilde{N}_{h_0}$, ..., $\tilde{N}_{h_n} - \tilde{N}_{h_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

  × Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\tilde{N}_{h_{i+1}} - \tilde{N}_{h_i} \;=\; \big(N_{t+h_{i+1}} - \cancel{N_t}\big) - \big(N_{t+h_i} - \cancel{N_t}\big) \;=\; N_{t+h_{i+1}} - N_{t+h_i}$$

  On cherche donc à démontrer que les v.a.r. $N_{t+h_0} - N_t$, $N_{t+h_1} - N_{t+h_0}$, ..., $N_{t+h_n} - N_{t+h_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

× Or les accroissements du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ sont indépendants, *i.e.* pour tout $(t_0,\ldots,t_n) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^{n+1}$ tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les v.a.r. N_{t_0}, $N_{t_1} - N_{t_0}$, ..., $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

× On pose alors :

$$\left\{\begin{array}{l} t_0 = t \\ \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ t_i = t + h_{i-1} \end{array}\right.$$

On obtient que les v.a.r. N_t, $N_{t+h_0} - N_t$, $N_{t+h_1} - N_{t+h_0}$, ..., $N_{t+h_n} - N_{t+h_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

$\boxed{\text{On en déduit que les accroissements du processus } (\tilde{N}_h)_{h\geqslant 0} \text{ sont indépendants.}}$

- Soit $(h,h') \in \left(\mathbb{R}_+\right)^2$.

× On remarque :

$$\tilde{N}_{h'} - \tilde{N}_h \;=\; (N_{t+h'} - \cancel{N_t}) - (N_{t+h} - \cancel{N_t}) \;=\; N_{t+h'} - N_{t+h}$$

Or les accroissements du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ sont stationnaires. On en déduit que la v.a.r. $N_{t+h'} - N_{t+h}$ suit la même loi que la v.a.r. $N_{(\cancel{t}+h')-(\cancel{t}+h)} = N_{h'-h}$.

× De plus d'après le premier point de cette question, la v.a.r. $N_{h'-h}$ suit la même loi que la v.a.r. $\tilde{N}_{h'-h}$. Ainsi la v.a.r. $\tilde{N}_{h'} - \tilde{N}_h$ suit la même loi que la v.a.r. $\tilde{N}_{h'-h}$.

$\boxed{\text{On en déduit que les accroissements du processus } (\tilde{N}_h)_{h\geqslant 0} \text{ sont stationnaires.}}$

- Soit $h > 0$. Toujours en remarquant que les v.a.r. $\tilde{N}_h$ et N_h ont la même loi, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}\left(\left[\tilde{N}_h > 1\right]\right)}{h} = \frac{\mathbb{P}\left([N_h > 1]\right)}{h}$$

Or, comme $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathbb{P}\left([N_h > 1]\right)}{h} = 0$.

$$\boxed{\text{On obtient : } \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}\left(\left[\tilde{N}_h > 1\right]\right)}{h} = 0.}$$

$\boxed{\text{Finalement, la famille } (\tilde{N}_h)_{h\geqslant 0} \text{ est bien un processus de Poisson.}}$ □

c) En déduire que la première panne survenant après la date t se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre α.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

- On note T_t la v.a.r. désignant la date de la 1ère panne après l'instant t.
- Soit $h > 0$.

L'événement $[T_t > h]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ la 1ère panne après l'instant t survient après avoir attendu (au moins) un temps h supplémentaire

$\Leftrightarrow$ la date de la 1ère panne après l'instant t est strictement postérieure à l'instant $t+h$

$\Leftrightarrow$ il n'est survenu aucune panne dans l'intervalle $]t, t+h]$

Or, d'après ***18.a)***, la v.a.r. $\tilde{N}_h$ correspond au nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$. Ainsi :

L'événement $[T_t > h]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ il n'est survenu aucune panne dans l'intervalle $]t, t+h]$

$\Leftrightarrow$ l'événement $\left[\tilde{N}_h = 0\right]$ est réalisé

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall h > 0,\ [T_t > h] = \left[\tilde{N}_h = 0\right].}$$

- De plus, la famille $(\tilde{N}_h)_{h \geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α d'après la question précédente. On déduit alors de la question ***16.d)*** :

$$\tilde{N}_h \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha\, h)$$

- Ainsi, avec un raisonnement identique à celui de la question ***17.*** (la v.a.r. T_t joue le rôle de la v.a.r. T et le processus $(\tilde{N}_h)_{h \geqslant 0}$ joue le rôle du processus $(N_t)_{t \geqslant 0}$), on en déduit : $T_t \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, la date de la première panne survenant après l'instant } t \text{ suit une loi } \mathcal{E}(\alpha).}$$

$\square$

d) En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date t donnée, le taux de défaillance du système après t est constant.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$.

- D'après la question précédente : $T_t \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$.
- Ainsi, d'après la question ***9.a)***, son taux de défaillance λ_{T_t} est la fonction :

$$\lambda_{T_t} : x \mapsto \alpha$$

$$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout } t \geqslant 0, \text{ le taux de défaillance du système après l'instant } t \text{ est constant égal à } \alpha.}$$

$\square$

ESSEC II 2009 - estimation ponctuelle, loi de Poisson, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi normale, information de Fisher

Notations

- Tout au long du sujet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé et les variables aléatoires utilisées seront toutes définies sur cet espace probabilisé. Sous réserve d'existence, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X sera notée $\mathbb{E}(X)$ et sa variance sera notée $\mathbb{V}(X)$.
- Pour un événement A, on notera $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B où B est un événement non négligeable.

Le sujet est composé de quatre parties. Les parties I, II, III et IV.1 sont **indépendantes**.
Il s'agit de variations autour de la notion de risque quadratique en théorie de l'estimation.

Partie I. Premier problème d'estimation

Dans ce premier problème d'estimation, on dispose d'une seule observation notée X.
On suppose que X admet pour densité f_θ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\theta : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{k+1}{\theta^{k+1}} \ x^k & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est un entier naturel non nul et θ un paramètre réel inconnu strictement positif que l'on souhaite estimer.

1. Montrer que f_θ est bien une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f_θ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]\theta, +\infty[$ car constante sur ces intervalles ouverts. De plus, elle est continue sur $]0, \theta[$ car elle coïncide sur cet intervalle ouvert avec la fonction $x \mapsto \dfrac{k+1}{\theta^{k+1}} \ x^k$ qui est continue sur $]0, \theta[$ car polynomiale.

$$\boxed{\text{La fonction } f_\theta \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0 \text{ et en } 1.}$$

- Comme $k > 0$ et $\theta > 0$, il suit que, pour tout $x \in [0, \theta]$, $f_\theta(x) \geqslant 0$. De plus, pour tout $x \notin [0, \theta]$, $f_\theta(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \ f_\theta(x) \geqslant 0.}$$

- Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x) \ dx &= \int_0^\theta f_\theta(x) \ dx & & \textit{car } f_\theta \textit{ est nulle en dehors de } [0, \theta] \\ &= \int_0^\theta \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \ x^k \ dx \\ &= \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int_0^\theta x^k \ dx \end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x) \ dx$ est convergente puisque $x \mapsto x^k$ est continue sur $[0, \theta]$.
De plus,

$$\int_0^\theta x^k \ dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^\theta = \frac{\theta^{k+1}}{k+1}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x)\ dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\frac{\theta^{k+1}}{k+1} = 1}$$

Ceci permet de conclure que f_θ est une densité de probabilité.

□

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

- La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_\theta(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment.
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} xf_\theta(x)\ dx &= \int_0^\theta xf_\theta(x)\ dx && \textit{car } f_\theta \textit{ est nulle en dehors de } [0,\theta] \\
&= \int_0^\theta x\frac{k+1}{\theta^{k+1}}\ x^k\ dx \\
&= \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\int_0^\theta\ x^{k+1}\ dx
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_\theta(x)\ dx$ est convergente puisque $x \mapsto x^{k+1}$ est continue sur $[0,\theta]$. Il suit que X admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\left[\ \frac{x^{k+2}}{k+2}\ \right]_0^\theta \\
&= \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\frac{\theta^{k+2}}{k+2} \\
&= \frac{k+1}{k+2}\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{k+1}{k+2}\theta}$$

□

3. Déterminer λ_0 un réel dépendant uniquement de k tel que $\lambda_0\, X$ soit un estimateur de θ sans biais.

Démonstration. On pose $\lambda_0 = \dfrac{k+2}{k+1}$ et on note $Y = \lambda_0 X$. La variable aléatoire Y admet une espérance comme transformée affine de X.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\lambda_0 X) \\
&= \lambda_0 \mathbb{E}(X) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{k+2}{k+1}\frac{k+1}{k+2}\theta \\
&= \theta
\end{aligned}$$

L'expression de $\lambda_0 X$ ne dépend pas de θ et $\mathbb{E}(\lambda_0 X) = \theta$ donc $\lambda_0 X$ est un estimateur de θ sans biais.

□

4. Calculer $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\theta(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment.
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\theta(x)\ dx &= \int_0^\theta x^2 f_\theta(x)\ dx && \textit{car } f_\theta \textit{ est nulle en dehors de } [0,\theta] \\ &= \int_0^\theta x^2 \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\ x^k\ dx \\ &= \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int_0^\theta x^{k+2}\ dx\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\theta(x)\ dx$ est convergente puisque $x \mapsto x^{k+2}$ est continue sur $[0,\theta]$. Il suit que X admet une variance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \left[\ \frac{x^{k+3}}{k+3}\ \right]_0^\theta \\ &= \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \frac{\theta^{k+3}}{k+3} \\ &= \frac{k+1}{k+3}\theta^2\end{aligned}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \frac{k+1}{k+3}\theta^2 - \left(\frac{k+1}{k+2}\theta\right)^2 \\ &= (k+1)\theta^2 \left(\frac{1}{k+3} - \frac{k+1}{(k+2)^2}\right) \\ &= (k+1)\theta^2 \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)^2} \\ &= (k+1)\theta^2 \frac{k^2+4k+4-(k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)^2} \\ &= \frac{(k+1)}{(k+3)(k+2)^2}\theta^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(k+1)}{(k+3)(k+2)^2}\theta^2}$$

□

5. On définit le risque quadratique de T estimateur de θ par :

$$r_\theta(T) = \mathbb{E}\left((T-\theta)^2\right)$$

Redémontrer le résultat du cours précisant que pour tout T estimateur de θ :

$$r_\theta(T) = \big(\mathbb{E}(T) - \theta\big)^2 + \mathbb{V}(T)$$

Démonstration. On utilise la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{V}(T)+(\mathbb{E}(T)-\theta)^2 \\
= \;& \mathbb{E}((T-\mathbb{E}(T)^2)+(\mathbb{E}(T)-\theta)^2 \\
= \;& \mathbb{E}(T^2-2\mathbb{E}(T)T+(\mathbb{E}(T))^2)+(\mathbb{E}(T))^2-2\theta\mathbb{E}(T)+\theta^2 \\
= \;& \mathbb{E}(T^2)-\cancel{2\mathbb{E}(T)\mathbb{E}(T)}+\cancel{2(\mathbb{E}(T))^2}-2\theta\mathbb{E}(T)+\theta^2 \\
= \;& \mathbb{E}(T^2-2\theta T+\theta^2) \\
= \;& \mathbb{E}((T-\theta)^2) \\
= \;& r_\theta(T)
\end{aligned}$$

□

6. Donner la valeur de $r_\theta(\lambda_0 X)$.
Le but de la fin de cette partie I est de déterminer un estimateur de θ ayant un plus petit risque quadratique que celui de $\lambda_0\, X$.

Démonstration. La variable aléatoire $\lambda_0 X$ admet une variance comme transformée affine de X qui admet une variance, elle admet donc un risque quadratique.

$$\begin{aligned}
r_\theta(\lambda_0 X) &= \mathbb{V}(\lambda_0 X)+(\mathbb{E}(\lambda_0 X)-\theta)^2 \\
&= \mathbb{V}(\lambda_0 X)+(\theta-\theta)^2 && \textit{(d'après la question 3)} \\
&= \lambda_0^2\mathbb{V}(X) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2\frac{(k+1)}{(k+3)(k+2)^2}\theta^2 && \textit{(d'après la question 4)} \\
&= \frac{\theta^2}{(k+1)(k+3)}
\end{aligned}$$

□

7. En utilisant I.5 montrer que pour tout λ réel

$$r_\theta(\lambda X)=\theta^2\; Q(\lambda)$$

où Q est un polynôme de degré 2 dont les coefficients ne dépendent que de k.

Démonstration.
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
r_\theta(\lambda X) &= \mathbb{V}(\lambda X)+\big(\mathbb{E}(\lambda X)-\theta\big)^2 \\
&= \lambda^2\mathbb{V}(X)+\big(\lambda\mathbb{E}(X)-\theta\big)^2 \\
&= \lambda^2\frac{(k+1)}{(k+3)(k+2)^2}\theta^2+\left(\lambda\frac{k+1}{k+2}\theta-\theta\right)^2 \\
&= \theta^2\left(\frac{(k+1)}{(k+3)(k+2)^2}\lambda^2+\left(\lambda\frac{k+1}{k+2}-1\right)^2\right) \\
&= \theta^2\left(\frac{(k+1)}{(k+3)(k+2)^2}\lambda^2+\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2\lambda^2-2\frac{k+1}{k+2}\lambda+1\right) \\
&= \theta^2\left(\left(\frac{(k+1)}{(k+3)(k+2)^2}+\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}\right)\lambda^2-2\frac{k+1}{k+2}\lambda+1\right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)}{(k+3)(k+2)^2}+\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} &= (k+1)\frac{1+(k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)^2}\\ &= (k+1)\frac{k^2+4k+4}{(k+3)(k+2)^2}\\ &= (k+1)\frac{(k+2)^2}{(k+3)(k+2)^2}\\ &= \frac{k+1}{k+3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On peut donc conclure que : } r_\theta(\lambda X)=\theta^2\ Q(\lambda) \text{ où } Q(\lambda)=\frac{k+1}{k+3}\lambda^2-2\frac{k+1}{k+2}\lambda+1}$$

□

8. Montrer que la fonction $\lambda \mapsto Q(\lambda)$ atteint son minimum en un unique réel noté λ^* que l'on exprimera en fonction de k.

Démonstration.
La fonction Q est un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est strictement positif. On en déduit que Q admet un minimum global atteint uniquement au point où sa dérivée s'annule.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$Q'(\lambda)=2\frac{k+1}{k+3}\lambda-2\frac{k+1}{k+2}=2\frac{k+1}{k+3}\left(\lambda-\frac{k+3}{k+2}\right)$$

$$\boxed{\text{La fonction } Q \text{ atteint son minimum global en un unique point qui est } \lambda^*=\frac{k+3}{k+2}.}$$

□

9. Conclure sur le but recherché.

Démonstration.

- Tout d'abord, les calculs précédents montrent que $\lambda^* X$ est un estimateur de θ de risque quadratique minimal parmi tous les estimateurs de θ de la forme λX. En particulier :

$$r_\theta(\lambda^* X) \leqslant r_\theta(\lambda_0 X)$$

- Précisons le gain obtenu :

$$\begin{aligned} r_\theta(\lambda^* X) &= \theta^2 Q(\lambda^*)\\ &= \theta^2\left(\frac{k+1}{k+3}\left(\frac{k+3}{k+2}\right)^2-2\frac{k+1}{k+2}\frac{k+3}{k+2}+1\right)\\ &= \theta^2\left(\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}-2\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}+1\right)\\ &= \theta^2\left(1-\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}\right)\\ &= \frac{\theta^2}{(k+2)^2}\end{aligned}$$

D'où :

$$r_\theta(\lambda^* X) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\theta^2}{k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} r_\theta(\lambda_0 X)$$

$$\boxed{\text{On a trouvé un autre estimateur, dont le risque quadratique est plus petit, mais le gain est assez faible lorsque } k \text{ est grand.}}$$

□

Partie II. Second problème d'estimation

Dans ce second problème d'estimation, on dispose de n observations indépendantes $(n \geqslant 2)$ notées $X_1, \ldots, X_n$ de même loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta \in \,]0, +\infty[$). On souhaite estimer le paramètre $\exp(-\theta)$. On définit pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$ la variable aléatoire Y_i par :

$$Y_i \ : \ \omega \ \mapsto \ \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis on note :

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

10. Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, donner la loi de Y_i.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Tout d'abord, par définition de Y_i : $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi, Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\alpha = \mathbb{P}([Y_i = 1])$.
- Calculons maintenant α.

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{P}([Y_i = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_i = 0]) \\ &= \mathrm{e}^{-\theta} \frac{\theta^0}{0!} && \textit{(car } X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta)\textit{)} \\ &= \mathrm{e}^{-\theta} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathrm{e}^{-\theta}\right).}$$

□

11. Donner la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, puis montrer que $\mathbb{E}(\overline{Y}_n) = \exp(-\theta)$.

Démonstration.

- Les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes. Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire Y_i est une transformée de X_i (plus précisément : $Y_i = \mathbb{1}_{[X_i = 0]}$). Ainsi, par lemme des coalitions, les variables aléatoires Y_i sont mutuellement indépendantes.

$$\boxed{\text{D'après la question précédente et la stabilité des lois binomiales : } \sum_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \mathrm{e}^{-\theta}\right)}$$

- La variable aléatoire $\overline{Y}_n$ admet une espérance comme transformée affine de $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ qui admet une espérance.

$$\boxed{\text{Par linéarité de l'espérance : } \mathbb{E}(\overline{Y}_n) = \frac{1}{n} n \mathrm{e}^{-\theta} = \exp(-\theta).}$$

□

On dira dans ce cas que $\overline{Y}_n$ est un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$.

12. Calculer $\mathbb{V}\left(\overline{Y}_n\right)$.

Démonstration. La variable aléatoire $\overline{Y}_n$ admet une variance comme transformée affine de $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ qui admet une variance.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(\overline{Y}_n\right) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\\ &= \frac{1}{n^2} n\mathrm{e}^{-\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\theta}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\theta}\right)}{n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\overline{Y}_n\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\left(1-\mathrm{e}^{-\theta}\right)}{n}}$$

□

Pour tout k élément de $[\![1,n]\!]$ on définit $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.

13. Rappeler sans démonstration la loi de S_k pour tout k élément de $[\![1,n]\!]$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ élément de } [\![1,n]\!] : S_k \hookrightarrow \mathcal{P}(k\theta)}$$

□

On définit jusqu'à la fin de cette partie II pour tout j entier naturel :

$$\varphi(j) = \mathbb{P}_{[S_n=j]}\big(\,[X_1=0]\,\big)$$

14. Montrer que pour tout j entier naturel :

$$\varphi(j) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^j$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\varphi(j) &= \mathbb{P}_{[S_n=j]}\big(\,[X_1=0]\,\big)\\ &= \frac{\mathbb{P}([S_n=j]\cap[X_1=0])}{\mathbb{P}([S_n=j])}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = j\right]\cap[X_1=0]\right)}{\mathrm{e}^{-n\theta}\dfrac{(n\theta)^j}{j!}} && \textit{(car } S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\theta)\textit{)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{i=2}^{n} X_i = j\right]\cap[X_1=0]\right)}{\mathrm{e}^{-n\theta}\dfrac{(n\theta)^j}{j!}}\end{aligned}$$

Or, les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes et donc, par lemme des coalitions, les variables aléatoires X_1 et $\sum_{i=2}^{n} X_i$ sont également indépendantes. Ainsi :

$$\varphi(j) = \frac{\mathbb{P}\left(\left[\sum_{i=2}^{n} X_i = j\right]\right)\mathbb{P}\left([X_1 = 0]\right)}{\mathrm{e}^{-n\theta}\dfrac{(n\theta)^j}{j!}}$$

De plus, les variables aléatoires $\sum_{i=2}^{n} X_i$ et S_{n-1} suivent la même loi. Il suit que :

$$\begin{aligned}\varphi(j) &= \frac{\cancel{\mathrm{e}^{-(n-1)\theta}}\dfrac{((n-1)\theta)^j}{\cancel{j}!}\cancel{\mathrm{e}^{-\theta}}}{\cancel{\mathrm{e}^{-n\theta}}\dfrac{(n\theta)^j}{\cancel{j}!}} \\ &= \frac{(n-1)^j\cancel{\theta^j}}{n^j\cancel{\theta^j}} \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^j\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j.}$$

□

On a donc $\varphi(j)$ indépendant du paramètre θ inconnu.
D'après la question II.13, on peut définir l'estimateur :

$$\varphi(S_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$$

15. Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $\mathbb{E}\big(\varphi(S_n)\big) = \exp(-\theta)$.

Démonstration.
D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $\varphi(S_n)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum \varphi(k)\mathbb{P}([S_n = k])$ est absolument convergente et si c'est le cas :

$$\mathbb{E}(\varphi(S_n)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)\mathbb{P}([S_n = k])$$

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \varphi(k)\mathbb{P}([S_n = k]) &= \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \mathrm{e}^{-n\theta}\frac{(n\theta)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-n\theta}\sum_{k=0}^{N} \frac{\left(n\theta\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^k}{k!}\end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle de paramètre $x = n\theta\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. Une telle série est toujours convergente donc $\varphi(S_n)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(S_n)) &= \mathrm{e}^{-n\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(n\theta\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-n\theta}\mathrm{e}^{n\theta\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{-n\theta}\mathrm{e}^{n\theta-\theta} \\
&= \mathrm{e}^{-\theta}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(S_n) \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}\big(\varphi(S_n)\big) = \exp(-\theta).}$$

□

On dira dans ce cas que $\varphi(S_n)$ est un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$.

16. Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance vérifiant :

$$\mathbb{V}\big(\varphi(S_n)\big) = \exp(-2\theta)\ \left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right)-1\right)$$

Démonstration.

- La variable aléatoire $\varphi(S_n)$ admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2.
- D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $\varphi(S_n)^2$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum \varphi(k)^2\mathbb{P}([S_n = k])$ est absolument convergente et si c'est le cas :

$$\mathbb{E}(\varphi(S_n)^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}\varphi(k)^2\mathbb{P}([S_n = k])$$

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\varphi(k)^2\mathbb{P}([S_n = k]) &= \sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2k}\mathrm{e}^{-n\theta}\frac{(n\theta)^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-n\theta}\sum_{k=0}^{N}\frac{\left(n\theta\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2\right)^k}{k!}
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle de paramètre $x = n\theta\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2$. Une telle série est toujours convergente donc $\varphi(S_n)^2$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(S_n)^2) &= \mathrm{e}^{-n\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(n\theta\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right)^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-n\theta} \mathrm{e}^{n\theta\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \\
&= \mathrm{e}^{-n\theta} \mathrm{e}^{n\theta\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{-n\theta} \mathrm{e}^{n\theta-2\theta+\frac{\theta}{n}} \\
&= \mathrm{e}^{-2\theta} \mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(S_n)^2 \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}\big(\varphi(S_n)^2\big) = \mathrm{e}^{-2\theta}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}}.}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\varphi(S_n)) &= \mathbb{E}\big(\varphi(S_n)^2\big) - (\mathbb{E}(\varphi(S_n)))^2 \\
&= \mathrm{e}^{-2\theta}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}} - \mathrm{e}^{-2\theta} \\
&= \mathrm{e}^{-2\theta}\left(\mathrm{e}^{\frac{\theta}{n}} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(S_n) \text{ admet une variance vérifiant : } \mathbb{V}\big(\varphi(S_n)\big) = \exp(-2\theta)\left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1\right).}$$

□

17. On souhaite comparer les performances de $\overline{Y}_n$ et $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateurs de $\exp(-\theta)$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer :

$$1 \leqslant \frac{\exp(\theta)-1}{\theta} \leqslant \exp(\theta)$$

Commentaire

Le théorème des accroissements finis n'est plus au programme. Nous avons encore l'inégalité des accroissements finis, qui peut permettre de démontrer l'inégalité de droite, mais qui échouera à démontrer celle de gauche. Nous allons donc démontrer cet encadrement via une étude de fonction.

Démonstration.

- Tout d'abord, remarquons que $\theta > 0$. Ainsi, il s'agit de démontrer que :

$$\mathrm{e}^{\theta} \geqslant \theta + 1 \qquad \text{et} \qquad \theta\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{\theta} + 1 \geqslant 0$$

- La première inégalité est une inégalité de convexité classique que nous ne détaillons pas ici.

- Soit $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$ définie sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x \geqslant 0$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \geqslant 0$$

Ainsi, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $f(0) = 0$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geqslant 0$. En particulier :

$$f(\theta) = \theta\mathrm{e}^\theta - \mathrm{e}^\theta + 1 \geqslant 0$$

$$\boxed{1 \leqslant \frac{\exp(\theta) - 1}{\theta} \leqslant \exp(\theta)}$$

□

b) Soit la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h(t) = t\exp(\theta) + (1-t) - \exp(t\theta)$$

pour tout $t \in [0,1]$. Étudier les variations de h.

Démonstration.
La fonction h est deux fois dérivable sur $[0,1]$. Soit $t \in [0,1]$.

$$h'(t) = \mathrm{e}^\theta - 1 - \theta\mathrm{e}^{t\theta}$$

et

$$h''(t) = -\theta^2\mathrm{e}^{t\theta} < 0$$

Ainsi, la fonction h' est strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, d'après la question précédente :

× $h'(0) = \mathrm{e}^\theta - 1 - \theta \geqslant 0$

× $h'(1) = \mathrm{e}^\theta - 1 - \theta\mathrm{e}^\theta \leqslant 0$

Puisque h' est continue, il suit d'après le théorème de la bijection que h' s'annule une unique fois sur $[0,1]$.

Déterminons maintenant l'unique point où h' s'annule :

$$\begin{aligned} h'(t) = 0 &\iff \mathrm{e}^\theta - 1 - \theta\mathrm{e}^{t\theta} = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{t\theta} = \frac{\mathrm{e}^\theta - 1}{\theta} \\ &\iff t\theta = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^\theta - 1}{\theta}\right) \\ &\iff t = \frac{1}{\theta}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^\theta - 1}{\theta}\right) \end{aligned}$$

Posons $t^* = \dfrac{1}{\theta}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^\theta - 1}{\theta}\right)$. On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		t^*		1
Signe de $h'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de h	0	↗	$h(t^*)$	↘	0

□

c) En déduire :
$$\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}$$
puis l'inégalité :
$$\mathbb{V}\big(\varphi(S_n)\big) \leqslant \mathbb{V}\big(\overline{Y}_n\big)$$

Démonstration.

- D'après la question précédente : pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) \geqslant 0$.
  En particulier, pour $t = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$, on obtient :
$$\frac{\exp(\theta)}{n} + 1 - \frac{1}{n} - \exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \geqslant 0$$
$$\boxed{\text{D'où : } \exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}.}$$
- Réécrivons l'inégalité précédente sous la forme :
$$\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} - \frac{1}{n}$$
  On a alors :
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\varphi(S_n)) &= \exp(-2\theta)\ \left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1\right) \\ &\leqslant \exp(-2\theta)\frac{\exp(\theta)-1}{n} \\ &= \frac{\exp(-\theta)(1-\exp(-\theta))}{n} \\ &= \mathbb{V}\big(\overline{Y}_n\big)\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{V}\big(\varphi(S_n)\big) \leqslant \mathbb{V}\big(\overline{Y}_n\big).}$$

□

d) On définit le risque quadratique de T_n estimateur de $\exp(-\theta)$ par :
$$r_\theta(T_n) \ = \ \mathbb{E}\Big(\big(T_n - \exp(-\theta)\big)^2\Big)$$
Comparer les risques quadratiques de $\overline{Y}_n$ et $\varphi(S_n)$.

Démonstration.
D'après la question ***5*** et puisque les estimateurs $\overline{Y}_n$ et $\varphi(S_n)$ sont sans biais, il suit que :
$$r_\theta\left(\overline{Y}_n\right) = \mathbb{V}\left(\overline{Y}_n\right) \qquad \text{et} \qquad r_\theta\left(\varphi(S_n)\right) = \mathbb{V}\left(\varphi(S_n)\right)$$
$$\boxed{\text{D'après la question précédente : } r_\theta\left(\varphi(S_n)\right) \leqslant r_\theta\left(\overline{Y}_n\right).}$$

□

On reprendra à la fin de la partie IV l'étude de $\varphi(S_n)$.

Partie III. Information de Fisher

A. Cas discret

Dans cette section III.1, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, θ un paramètre inconnu appartenant à I et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ($X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). On suppose qu'il existe une fonction p définie sur $I \times X(\Omega)$ telle que pour tout k élément de $X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\big([X = k]\big) = p(\theta, k)$$

et vérifiant pour tout k de $X(\Omega)$, $\theta \mapsto p(\theta, k)$ dérivable sur I.
On note de plus : $h : (\theta, k) \mapsto \ln\big(p(\theta, k)\big)$.
On définit enfin, sous réserve d'existence l'**information de Fisher** de X par :

$$I_X(\theta) = \sum_{k \in X(\Omega)} \big(\partial_1(\ln \circ p)(\theta, k)\big)^2 p(\theta, k)$$

18. Dans cette question 18, on considère X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre θ (où $\theta \in]0, 1[$).
On a alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}\big([X = 1]\big) = p(\theta, 1) = \theta$, $\mathbb{P}\big([X = 0]\big) = p(\theta, 0) = 1 - \theta$ et :

$$I_X(\theta) = \big(\partial_1(h)(\theta, 1)\big)^2 p(\theta, 1) + \big(\partial_1(h)(\theta, 0)\big)^2 p(\theta, 0)$$

Montrer :

$$I_X(\theta) = \frac{1}{\theta\,(1 - \theta)}$$

Démonstration.
D'après les formules admises :

$$h(\theta, 1) = \ln(\theta) \qquad \text{et} \qquad h(\theta, 0) = \ln(1 - \theta)$$

Ainsi :

$$\partial_1(h)(\theta, 1) = \frac{1}{\theta} \qquad \text{et} \qquad \partial_1(h)(\theta, 0) = \frac{-1}{1 - \theta}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I_X(\theta) &= \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \theta + \left(\frac{-1}{1-\theta}\right)^2 (1 - \theta) \\ &= \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} \\ &= \frac{1 - \theta + \theta}{\theta(1-\theta)} \\ &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_X(\theta) = \frac{1}{\theta\,(1 - \theta)}}$$

□

19. Dans cette question 19, on considère X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres N et θ ($N \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in]0, 1[$).

a) Montrer :

$$I_X(\theta) = \frac{1}{\big(\theta\,(1 - \theta)\big)^2} \sum_{k=0}^{N} (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1 - \theta)^{N-k}$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, N]\!]$.

$$p(\theta, k) = \mathbb{P}([X = k]) = \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}$$

donc

$$h(\theta, k) = \ln\left(\binom{N}{k}\right) + k\ln(\theta) + (N-k)\ln(1-\theta)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\partial_1(h)(\theta, k) &= \frac{k}{\theta} - \frac{N-k}{1-\theta} \\
&= \frac{k(1-\theta) - (N-k)\theta}{\theta(1-\theta)} \\
&= \frac{k - k\theta - N\theta + k\theta}{\theta(1-\theta)} \\
&= \frac{k - N\theta}{\theta(1-\theta)}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_X(\theta) &= \sum_{k=0}^{N} \big(\partial_1(\ln \circ p)(\theta, k)\big)^2 p(\theta, k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k - N\theta}{\theta(1-\theta)}\right)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } I_X(\theta) = \frac{1}{\big(\theta\,(1-\theta)\big)^2} \sum_{k=0}^{N} (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}.}$$

□

b) En déduire :

$$I_X(\theta) = \frac{\mathbb{V}(X)}{\big(\theta\,(1-\theta)\big)^2}$$

puis donner la valeur de $I_X(\theta)$.

Démonstration. D'après la question précédente, il s'agit de montrer que :

$$\sum_{k=0}^{N} (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k} = \mathbb{V}(X)$$

(remarquons au passage que $\mathbb{V}(X)$ existe puisque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \theta)$)
Par définition de la variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left((X - N\theta)^2\right)$$

puis, par théorème de transfert (valide car X est finie) :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=0}^{N} (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}$$

Puisque $\mathbb{V}(X) = N\theta(1-\theta)$, il suit que :

$$\boxed{I_X(\theta) = \frac{N}{\theta(1-\theta)}}$$

□

20. Dans cette question 20, on considère X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre θ ($\theta \in]0, +\infty[$). Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a sous réserve de convergence :

$$I_X(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\partial_1(h)(\theta, k)\big)^2 p(\theta, k)$$

a) Montrer que la série de terme général $\big(\partial_1(h)(\theta, k)\big)^2 p(\theta, k)$ converge et calculer sa somme $I_X(\theta)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, N]\!]$.

$$p(\theta, k) = \mathbb{P}([X = k]) = \mathrm{e}^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$$

donc

$$h(\theta, k) = -\theta + k \ln(\theta) - \ln(k!)$$

et donc

$$\partial_1(h)(\theta, k) = -1 + \frac{k}{\theta}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \big(\partial_1(h)(\theta, k)\big)^2 p(\theta, k) &= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{\theta} - 1\right)^2 \mathrm{e}^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-\theta} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k^2}{\theta^2} - \frac{2k}{\theta} + 1\right) \frac{\theta^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-\theta} \left(\sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\theta^{k-2}}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{N} k \frac{\theta^{k-1}}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\theta} \left(\sum_{k=1}^{N} k \frac{\theta^{k-2}}{(k-1)!} - 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\theta} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \frac{\theta^{k-1}}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\theta} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^{k-1}}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\theta} \left(\sum_{k=0}^{N-2} \frac{\theta^k}{k!} + \frac{1}{\theta} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

On reconnaît quatre sommes partielles de la série exponentielle de paramètre θ. Ainsi, la série $\sum \big(\partial_1(h)(\theta, k)\big)^2 p(\theta, k)$ converge et

$$\boxed{I_X(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta} \left(\mathrm{e}^{\theta} + \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{\theta} - 2\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}}$$

□

b) Justifier :

$$I_X(\theta) = \mathbb{E}\left(\big(\partial_1(h)(\theta, X)\big)^2\right)$$

Démonstration.
D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $\big(\partial_1(h)(\theta,X)\big)^2$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum \big(\partial_1(h)(\theta,k)\big)^2 p(\theta,k)$ converge absolument et si c'est le cas :

$$\mathbb{E}\left(\big(\partial_1(h)(\theta,X)\big)^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\partial_1(h)(\theta,k)\big)^2 p(\theta,k)$$

D'après la question précédente, la série $\sum \big(\partial_1(h)(\theta,k)\big)^2 p(\theta,k)$ converge. Or, il s'agit d'une série à termes positifs, donc elle converge absolument.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{E}\left(\big(\partial_1(h)(\theta,X)\big)^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\partial_1(h)(\theta,k)\big)^2 p(\theta,k) = I_X(\theta)}$$

□

B. Cas d'une variable gaussienne

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne θ ($\theta \in \mathbb{R}$) et de variance 1 dont la densité est notée $x \mapsto f(\theta,x)$. On définit sous réserve de convergence l'**information de Fisher** de X par :

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\partial_1(\ln\circ f)(\theta,x)\big)^2 f(\theta,x)\ dx$$

21. Montrer que sous réserve de convergence :

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\theta)^2 f(\theta,x)\ dx$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(\theta,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$$

donc

$$(\ln\circ f)(\theta,x) = -\ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}(x-\theta)^2$$

et donc

$$\partial_1(\ln\circ f)(\theta,x) = x-\theta$$

$$\boxed{\text{On a bien, sous réserve de convergence : } I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\theta)^2 f(\theta,x)\ dx.}$$

□

22. En déduire l'existence et la valeur de $I_X(\theta)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(x-\theta)^2 f(\theta,x) = x^2 f(\theta,x) - 2\theta x f(\theta,x) + \theta^2 f(\theta,x)$$

Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta,1)$, il suit que X admet des moments au moins jusqu'à l'ordre 2 et donc :

× $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta,x)\ dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta,x)\ dx = \mathbb{E}(X^0) = 1$$

× $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(\theta,x)\ dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(\theta,x)\ dx = \mathbb{E}(X) = \theta$$

× $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(\theta,x)\ dx$ converge et d'après Koenig-Huygens :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(\theta,x)\ dx = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1+\theta^2$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\theta)^2 f(\theta,x)\ dx$ converge et, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\theta)^2 f(\theta,x)\ dx = 1+\theta^2-2\theta^2+\theta^2 = 1$$

$$\boxed{\text{D'où : } I_X(\theta) = 1.}$$

□

23. Justifier :

$$I_X(\theta) = \mathbb{E}\left(\big(\partial_1(\ln\circ f)(\theta,X)\big)^2\right)$$

Démonstration.
D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $\big(\partial_1(h)(\theta,X)\big)^2$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\partial_1(\ln\circ f)(\theta,x)\big)^2 f(\theta,x)\ dx$ converge absolument et si c'est le cas :

$$\mathbb{E}\left(\big(\partial_1(h)(\theta,X)\big)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\partial_1(\ln\circ f)(\theta,x)\big)^2 f(\theta,x)\ dx$$

D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\partial_1(\ln\circ f)(\theta,x)\big)^2 f(\theta,x)\ dx$ converge. Or, il s'agit d'une intégrale d'une fonction positive, donc elle converge absolument.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{E}\left(\big(\partial_1(h)(\theta,X)\big)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\partial_1(\ln\circ f)(\theta,x)\big)^2 f(\theta,x)\ dx = I_X(\theta)}$$

□

Partie IV. Minoration du risque quadratique

A. Inégalité de Cramer-Rao

Dans cette section IV.1, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, θ un paramètre inconnu appartenant à I et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0,N]\!]$ ($N \in \mathbb{N}$). On suppose qu'il existe une fonction p définie sur $I \times X(\Omega)$ telle que pour tout $k \in [\![0,N]\!]$:

$$\mathbb{P}\big(\,[X=k]\,\big) = p(\theta,k)$$

et vérifiant :

- pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $\theta \mapsto p(\theta,k)$ dérivable sur I,
- l'information de Fisher de X notée $I_X(\theta)$ définie dans la partie III est non nulle pour tout $\theta \in I$.

Le but de la section IV.1 est de démontrer l'inégalité suivante dûe à Cramer et Rao.

Théorème 1. *(de Cramer-Rao)*
Soit $f(X)$ un estimateur sans biais de $g(\theta)$ à savoir tel que $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = g(\theta)$ où g est dérivable sur I. On a alors :

$$\mathbb{V}\left(f(X)\right) \geqslant \frac{\left(g'(\theta)\right)^2}{I_X(\theta)}$$

24. Montrer que pour tout θ élément de I :

$$\sum_{k=0}^{N} \partial_1(p)(\theta,k) = 0$$

Démonstration.
Soit $\theta \in I$. La famille $([X=k])_{k\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements donc

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([X=k]) = 1$$

ce qui se réécrit :

$$\sum_{k=0}^{N} p(\theta,k) = 1$$

On dérive alors par rapport à la première variable, ce qui donne, 1 étant une constante :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \partial_1(p)(\theta,k) = 0}$$

□

25. En déduire que pour tout θ élément de I :

$$\mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta,X)\right) = 0 \qquad (E)$$

Démonstration.
Soit $\theta \in I$. Tout d'abord, la variable aléatoire $\partial_1(h)(\theta,X)$ est finie car X est finie donc $\partial_1(h)(\theta,X)$ admet une espérance. Il suit, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta,X)\right) = \sum_{k=0}^{N} \partial_1(h)(\theta,k)\mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=0}^{N} \partial_1(h)(\theta,k)p(\theta,k)$$

Ensuite :

$$h(\theta,k) = \ln(p(\theta,k))$$

et donc

$$\partial_1(h)(\theta,k) = \frac{\partial_1(p)(\theta,k)}{p(\theta,k)}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta,X)\right) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{\partial_1(p)(\theta,k)}{p(\theta,k)}p(\theta,k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \partial_1(p)(\theta,k) \\
&= 0 && \textit{(d'après la question 24)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta,X)\right) = 0}$$

$\square$

26. En dérivant partiellement par rapport à θ les deux membres de l'égalité (E), montrer que pour tout θ élément de I :

$$\mathbb{E}\left(\partial_{1,1}^2(h)(\theta,X)\right) = -\mathbb{E}\left(\left(\partial_1(h)(\theta,X)\right)^2\right)$$

Démonstration.
Soit $\theta \in I$. Réécrivons l'égalité précédente sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{N} \partial_1(h)(\theta,k)p(\theta,k) = 0$$

Dérivons partiellement par rapport à θ :

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\partial_{1,1}^2(h)(\theta,k)p(\theta,k) + \partial_1(h)(\theta,k)\partial_1(p)(\theta,k)\right) = 0$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \partial_{1,1}^2(h)(\theta,k)p(\theta,k) &= -\sum_{k=0}^{N} \partial_1(h)(\theta,k)\partial_1(p)(\theta,k)\\ &= -\sum_{k=0}^{N} \partial_1(h)(\theta,k)\partial_1(h)(\theta,k)p(\theta,k) \qquad \textit{(voir calcul question } \textbf{\textit{25}}\textit{)}\\ &= -\sum_{k=0}^{N} \partial_1(h)(\theta,k)^2 p(\theta,k)\end{aligned}$$

De plus, comme les variables aléatoires $\partial_{1,1}^2(h)(\theta,X)$ et $\partial_1(h)(\theta,X)^2$ sont finies, on peut réécrire l'égalité précédente à l'aide du théorème de transfert :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\partial_{1,1}^2(h)(\theta,X)\right) = -\mathbb{E}\left(\left(\partial_1(h)(\theta,X)\right)^2\right)}$$

$\square$

27. Montrer que pour tout θ élément de I :

$$g'(\theta) = \sum_{k=0}^{N} f(k)\ \left(\partial_1(h)(\theta,k)\right)\ p(\theta,k)$$

puis :

$$g'(\theta) = \mathbb{E}\left(\left(f(X) - g(\theta)\right)\left(\partial_1(h)(\theta,X)\right)\right)$$

Démonstration.
Soit $\theta \in I$. Par hypothèse :

$$g(\theta) = \mathbb{E}(f(X))$$

ce qui se réécrit, par théorème de transfert :

$$g(\theta) = \sum_{k=0}^{N} f(k)p(\theta,k)$$

Dérivons partiellement par rapport à θ :

$$\begin{aligned}g'(\theta) &= \sum_{k=0}^{N} f(k)\partial_1(p)(\theta,k)\\ &= \sum_{k=0}^{N} f(k)\partial_1(h)(\theta,k)p(\theta,k)\end{aligned}$$

La variable aléatoire $\big(f(X) - g(\theta)\big)\big(\partial_1(h)(\theta, X)\big)$ est finie car X est finie, donc elle admet une espérance. Par linéarité :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\big(f(X) - g(\theta)\big)\partial_1(h)(\theta, X)\right) &= \mathbb{E}\left(f(X)\partial_1(h)(\theta, X)\right) - \mathbb{E}\left(g(\theta)\partial_1(h)(\theta, X)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(f(X)\partial_1(h)(\theta, X)\right) - g(\theta)\mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta, X)\right)\end{aligned}$$

Or, d'après ce qui précède et par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left(f(X)\big(\partial_1(h)(\theta, X)\big)\right) = g'(\theta)$$

et d'après (E) :

$$\mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta, X)\right) = 0$$

$$\boxed{\text{D'où } g'(\theta) = \mathbb{E}\left(\big(f(X) - g(\theta)\big)\big(\partial_1(h)(\theta, X)\big)\right).}$$

□

28. On pose pour tout t réel :

$$L(t) = \mathbb{E}\left(\Big(\big(f(X) - g(\theta)\big) + t\big(\partial_1(h)(\theta, X)\big)\Big)^2\right)$$

a) Développer le polynôme L suivant les puissances décroissantes de t.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}L(t) &= \mathbb{E}\left(\Big(\big(f(X) - g(\theta)\big) + t\big(\partial_1(h)(\theta, X)\big)\Big)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta, X)^2 t^2 + 2\big(f(X) - g(\theta)\big)\partial_1(h)(\theta, X) t + \big(f(X) - g(\theta)\big)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta, X)^2\right) t^2 + 2\mathbb{E}\left(\big(f(X) - g(\theta)\big)\partial_1(h)(\theta, X)\right) t + \mathbb{E}\left(\big(f(X) - g(\theta)\big)^2\right) \quad \textit{(par linéarité)}\end{aligned}$$

Or, puisque $f(X)$ est sans biais :

$$\mathbb{E}\left(\big(f(X) - g(\theta)\big)^2\right) = \mathbb{E}\left(\big(f(X) - \mathbb{E}(f(X))\big)^2\right) = \mathbb{V}(f(X))$$

et, d'après la question ***27***,

$$\mathbb{E}\left(\big(f(X) - g(\theta)\big)\big(\partial_1(h)(\theta, X)\big)\right) = g'(\theta)$$

Enfin, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\left(\partial_1(h)(\theta, X)^2\right) = I_X(\theta)$$

$$\boxed{\text{D'où : } L(t) = I_X(\theta) t^2 + 2g'(\theta) t + \mathbb{V}(f(X)).}$$

□

b) Calculer le discriminant Δ de L et justifier : $\Delta \leqslant 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(g'(\theta))^2 - 4I_X(\theta)\mathbb{V}(f(X)) \\ &= 4\left((g'(\theta))^2 - I_X(\theta)\mathbb{V}(f(X))\right)\end{aligned}$$

- Ensuite, par positivité de la variable aléatoire $\Big(\big(f(X) - g(\theta)\big) + t\big(\partial_1(h)(\theta, X)\big)\Big)^2$ et par croissance de l'espérance :
$$\forall t \in \mathbb{R}, L(t) \geqslant 0$$
Ceci implique que L ne s'annule au plus qu'une fois et donc
$$\boxed{\Delta \leqslant 0}$$

□

c) En déduire l'inégalité de Cramer-Rao.

Démonstration.
D'après ce qui précède :
$$(g'(\theta))^2 - I_X(\theta)\mathbb{V}(f(X)) \leqslant 0$$
d'où
$$(g'(\theta))^2 \leqslant I_X(\theta)\mathbb{V}(f(X))$$
De plus, $I_X(\theta) \geqslant 0$ et par hypothèse $I_X(\theta) \neq 0$ donc $I_X(\theta) > 0$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{V}\left(f(X)\right) \geqslant \frac{\big(g'(\theta)\big)^2}{I_X(\theta)}}$$

□

B. Extension du théorème de Cramer-Rao

On reprend dans cette section IV.2 les notations et hypothèses de la partie II. On admet que, dans ce contexte, le théorème de Cramer-Rao peut se généraliser comme suit :

Théorème 2. *(de Cramer-Rao)*
Soit $T_n = f(X_1, \dots, X_n)$ un estimateur sans biais de $g(\theta)$ à savoir tel que $\mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_n)\big) = g(\theta)$ où g est dérivable sur $]0, +\infty[$. On a alors :
$$\mathbb{V}(T_n) \geqslant \frac{\big(g'(\theta)\big)^2}{n\, I_{X_1}(\theta)}$$
où $I_{X_1}(\theta)$ est l'information de Fisher d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre θ définie et calculée à la partie III.

Il s'agit dans cette section d'exploiter cette nouvelle inégalité de Cramer-Rao. On note :
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

29. Calculer $\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big)$ et $\mathbb{V}\big(\overline{X}_n\big)$.

Démonstration.
La variable aléatoire $\overline{X}_n$ admet une espérance et une variance en tant que combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance et une variance.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big) &= \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) && \textit{(par linéarité)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta \\
&= \frac{1}{n} n\theta \\
&= \theta
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\overline{X}_n) &= \mathbb{V}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \theta \\
&= \frac{1}{n^2} n\theta \\
&= \frac{\theta}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \theta \text{ et } \mathbb{V}(\overline{X}_n) = \frac{\theta}{n}}$$

□

30. Déduire de la généralisation de Cramer-Rao, que $\overline{X}_n$ a le plus petit risque quadratique parmi les estimateurs sans biais de θ.

Démonstration.

- Tout d'abord, $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \theta$ donc $\overline{X}_n$ fait bien partie des estimateurs sans biais de θ.
- Soit $T_n = f(X_1, \ldots, X_n)$ un estimateur sans biais de θ (ici $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$). D'après la généralisation de l'inégalité de Cramer-Rao :
$$\mathbb{V}(T_n) \geqslant \frac{1}{n\, I_{X_1}(\theta)}$$
(car $g'(\theta) = 1$).
- D'après la question ***20.a)***,
$$I_{X_1}(\theta) = \frac{1}{\theta}$$
d'où
$$\mathbb{V}(T_n) \geqslant \frac{1}{n\, I_{X_1}(\theta)} = \frac{\theta}{n} = \mathbb{V}(\overline{X}_n)$$

On a montré que l'estimateur $\overline{X}_n$ a la plus petite variance parmi les estimateurs sans biais de θ.
Or, pour les estimateurs sans biais, la variance coïncide avec le risque quadratique.

$$\boxed{\text{L'estimateur } \overline{X}_n \text{ a le plus petit risque quadratique parmi les estimateurs sans biais de } \theta.}$$

□

31. Montrer que pour $g(\theta) = \exp(-\theta)$ où $\theta \in \,]0, +\infty[$:

$$\mathbb{V}\big(\varphi(S_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\big(g'(\theta)\big)^2}{n\, I_{X_1}(\theta)}$$

Démonstration.

- Rappelons le résultat de la question ***16*** :
$$\mathbb{V}\big(\varphi(S_n)\big) = \exp(-2\theta)\ \left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1\right)$$
D'où :
$$\mathbb{V}\big(\varphi(S_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(-2\theta)\frac{\theta}{n}$$
(on a utilisé l'équivalent usuel $\mathrm{e}^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$)

- D'autre part, si $g : \theta \mapsto \mathrm{e}^{-\theta}$, il vient, pour tout $\theta \in \,]0,+\infty[$:

$$g'(\theta) = -\mathrm{e}^{-\theta}$$

et donc

$$\big(g'(\theta)\big)^2 = \exp(-2\theta)$$

Or,

$$I_{X_1}(\theta) = \frac{1}{\theta}$$

et donc

$$\frac{\big(g'(\theta)\big)^2}{n\, I_{X_1}(\theta)} = \exp(-2\theta)\frac{\theta}{n}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{V}\big(\varphi(S_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\big(g'(\theta)\big)^2}{n\, I_{X_1}(\theta)}.}$$

□

32. Que prouve ce résultat en terme d'optimalité de $\varphi(S_n)$ dans l'estimation de $\exp(-\theta)$?

Démonstration.
Le résultat précédent prouve que la variance de $\varphi(S_n)$ est asymptotiquement minimale parmi les estimateurs sans biais de $\exp(-\theta)$ (d'après la généralisation de l'inégalité de Cramer-Rao). Autrement dit, $\varphi(S_n)$ a asymptotiquement le plus petit risque quadratique parmi tous les estimateurs sans biais de $\exp(-\theta)$. □

33. À la lumière de la partie II, peut-on conclure que lorsque n est grand $\varphi(S_n)$ est le meilleur estimateur de $\exp(-\theta)$ en terme de risque quadratique ?

Démonstration.
Il est possible qu'un estimateur biaisé de $\exp(-\theta)$ ait un plus petit risque quadratique que $\varphi(S_n)$. Ce n'est donc pas nécessairement le meilleur estimateur de $\exp(-\theta)$ en terme de risque quadratique. □

HEC 2019 - loi de Rademacher, loi binomiale, loi uniforme, loi normale, loi de Poisson, convergence en loi, fonctions génératrice des moments, des cumulants et des probabilités

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.
Les cumulants d'ordre 3 *et* 4 *permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion) ; ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.*

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$;
- pour tout variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t\,X}$ admet une espérance, on pose :
$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right) \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln\left(M_X(t)\right);$$
(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de X)
- lorsque, pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre p de X*, noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée $p^{\text{ème}}$ de K_X en 0 :
$$Q_p(X) \ = \ K_X^{(p)}(0).$$

Commentaire

- La fonction génératrice des moments d'une v.a.r. X est un objet classique en probabilités. Comme son nom l'indique, cette fonction permet de retrouver les moments de X (sous réserve d'existence). Plus précisément, si la v.a.r. X admet un moment d'ordre n, alors :
$$\mathbb{E}(X^n) \ = \ M_X^{(n)}(0)$$
- On ne confondra pas cette fonction avec une autre fonction classique en probabilités : la fonction génératrice (des probabilités). Cette dernière n'est définie que pour des v.a.r. X à valeurs entières et positives par la formule :
$$\forall s \in [0,1], \quad G_X(s) \ = \ \mathbb{E}(s^X) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \, \mathbb{P}([X=k])$$
Cette fonction caractérise quant à elle, non pas les moments de X, mais sa loi.
Plus précisément :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X=n]) \ = \ \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$
- L'énoncé propose de démontrer quelques propriétés de la fonction génératrice des moments pour des v.a.r. particulières. Par exemple, dans le cas d'une v.a.r. X à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$:
  - × $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$,
  - × $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{nt}\, M_X(t)$.
  (lien entre la fonction génératrice et la fonction génératrice des moments)

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes à valeurs entières ;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([S=-1]) \; = \; \mathbb{P}([S=+1]) \; = \; \frac{1}{2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
La v.a.r. X est une v.a.r. finie. Ainsi, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X}$ est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ le réel } M_X(t) \text{ est bien défini.}}$$

Commentaire

On rappelle que, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset [\![-n, n]\!] = \{k \mid k \in [\![-n, n]\!]\}$.
On en déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right)(\Omega) \; = \; \mathrm{e}^{t\,X(\Omega)} \; = \; \{\mathrm{e}^{t\,k} \mid k \in [\![-n, n]\!]\}$$

On retrouve bien que la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X}$ est finie.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme X est une v.a.r. discrète, par théorème de transfert :

$$M_X(t) \; = \; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right) \; = \; \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])}$$

- La fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$ des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } M_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

Soit $k \in [\![-n, n]\!]$.
Il faut noter que l'expression $\mathbb{P}([X=k])$ est une constante par rapport à t. Ainsi, pour étudier la régularité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t\,k}\, \mathbb{P}([X=k])$ on peut se contenter d'étudier la régularité de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t\,k}$ (qui, elle, est trivialement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

□

b) Justifier pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $M_X^{(p)}$ existe.
- Commençons par déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $M_X^{(p)}$.
Démontrons par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$
où $\quad \mathcal{P}(p)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X^{(p)}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} k^p \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$.
  - ▸ **Initialisation** :
D'après la question précédente :
$$M_X : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$$
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$$M_X^{(1)}(t) \; = \; M_X'(t) \; = \; \sum_{k=-n}^{n} k \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$$
D'où $\mathcal{P}(1)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(p)$ et démontrons $\mathcal{P}(p+1)$ (*i.e.* $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X^{(p+1)}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} k^{p+1} \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$).
Par hypothèse de récurrence :
$$M_X^{(p)} : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} k^p \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$$
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$M_X^{(p+1)}(t) \; = \; \left(M_X^{(p)}\right)'(t) \; = \; \sum_{k=-n}^{n} k^p \left(k \, \mathrm{e}^{k\,t}\right) \mathbb{P}([X = k]) \; = \; \sum_{k=-n}^{n} k^{p+1} \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$$
D'où $\mathcal{P}(p+1)$.

  Par principe de récurrence : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X^{(p)}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} k^p \, \mathrm{e}^{k\,t} \, \mathbb{P}([X = k])$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On en déduit :
$$M_X^{(p)}(0) \; = \; \sum_{k=-n}^{n} k^p \, \mathrm{e}^{k \times 0} \, \mathbb{P}([X = k]) \; = \; \sum_{k=-n}^{n} k^p \, \mathbb{P}([X = k]) \; = \; \mathbb{E}(X^p)$$
où la dernière égalité est obtenue par théorème de transfert.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } p \in \mathbb{N}^* : M_X^{(p)}(0) = \mathbb{E}(X^p).}$$

Commentaire

L'obtention de l'expression de $M_X^{(p)}$ s'effectue au brouillon :

1) on commence par déterminer les premières dérivées successives de la fonction M_X :

$$\begin{array}{lrcl} \forall t \in \mathbb{R}, & M_X'(t) & = & \sum\limits_{k=-n}^{n} k\, \mathrm{e}^{k\,t}\, \mathbb{P}([X=k]) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & M_X''(t) & = & \sum\limits_{k=-n}^{n} k\left(k\,\mathrm{e}^{k\,t}\right) \mathbb{P}([X=k]) \ = \ \sum\limits_{k=-n}^{n} k^2 \mathrm{e}^{k\,t}\, \mathbb{P}([X=k]) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & M_X^{(3)}(t) & = & \sum\limits_{k=-n}^{n} k^2\left(k\,\mathrm{e}^{k\,t}\right) \mathbb{P}([X=k]) \ = \ \sum\limits_{k=-n}^{n} k^3 \mathrm{e}^{k\,t}\, \mathbb{P}([X=k]) \end{array}$$

2) on en déduit une formule générale :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_X^{(p)}(t) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} k^p\, \mathrm{e}^{k\,t}\, \mathbb{P}([X=k])$$

□

c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X.
On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} G_X(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X=k-n])\, x^k \\ G_Y(x) & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y=k-n])\, x^k \end{array} \right.$$

(i) Vérifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité : $G_X(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{nt}\, M_X(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} G_X\left(\mathrm{e}^t\right) & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X=k-n])\, \left(\mathrm{e}^t\right)^k & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X=k-n])\, \mathrm{e}^{k\,t} & \\ & = & \sum\limits_{k=0-n}^{2n-n} \mathbb{P}([X=k])\, \mathrm{e}^{(k+n)\,t} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \sum\limits_{k=-n}^{n} \left(\mathbb{P}([X=k])\, \mathrm{e}^{k\,t}\, \mathrm{e}^{n\,t}\right) & \\ & = & \mathrm{e}^{n\,t} \sum\limits_{k=-n}^{n} \mathbb{P}([X=k])\, \mathrm{e}^{k\,t} & \\ & = & \mathrm{e}^{n\,t}\, M_X(t) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_X\left(\mathrm{e}^t\right) = \mathrm{e}^{nt}\, M_X(t)}$$

□

(ii) Justifier la relation : $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(\mathrm{e}^t) = G_Y(\mathrm{e}^t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} G_X\left(\mathrm{e}^t\right) & = & \mathrm{e}^{n\,t}\, M_X(t) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mathrm{e}^{n\,t}\, M_Y(t) & \textit{(car, d'après l'énoncé : } M_X = M_Y\textit{)} \\ & = & G_Y\left(\mathrm{e}^t\right) & \textit{(avec le même raisonnement qu'en question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_X\left(\mathrm{e}^t\right) = G_Y\left(\mathrm{e}^t\right)}$$

□

(iii) En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X.

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$.
- Ensuite, d'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X\left(\mathrm{e}^t\right) = G_Y\left(\mathrm{e}^t\right)$$

  Ainsi, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$:

$$\begin{array}{ccc} G_X\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right) & = & G_Y\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ G_X(x) & & G_Y(x) \end{array}$$

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$, on en déduit : $(G_X - G_Y)(x) = 0$.
  Or :

$$\begin{array}{rcl} (G_X - G_Y)(x) & = & G_X(x) - G_Y(x) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X = k-n])\, x^k - \sum\limits_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([Y = k-n])\, x^k \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \left(\mathbb{P}([X = k-n])\, x^k - \mathbb{P}([Y = k-n])\, x^k\right) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{2n} \left(\mathbb{P}([X = k-n]) - \mathbb{P}([Y = k-n])\right) x^k \end{array}$$

  Ainsi, le polynôme $G_X - G_Y$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, *i.e.* :

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ \mathbb{P}([X = k-n]) - \mathbb{P}([Y = k-n]) = 0$$

  D'où :

$$\forall k \in [\![-n, n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) - \mathbb{P}([Y = k]) = 0$$

  Ainsi :

$$\forall k \in [\![-n, n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([Y = k])$$

$$\boxed{\text{Finalement, les v.a.r. } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$$

□

2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
On suppose que les variables aléatoires X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = S\, X_2$.

a) (i) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2.

Démonstration.

- Comme $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$, on a : $X_2(\Omega) = [\![0, 2]\!] = \{0, 1, 2\}$.
- De plus : $S(\Omega) = \{-1, 1\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Y_2(\Omega) = (S\, X_2)(\Omega) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\} = [\![-2, 2]\!].}$$

□

(ii) Calculer les probabilités $\mathbb{P}([Y_2 = y])$ attachées aux diverses valeurs possibles y de Y_2.

Démonstration.

- Tout d'abord, on a l'égalité entre événements :

$$[Y_2 = -2] \ = \ [S\, X_2 = -2] \ = \ [S = -1] \cap [X_2 = 2]$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_2 = -2]) &= \mathbb{P}([S = -1] \cap [X_2 = 2]) \\ &= \mathbb{P}([S = -1])\ \mathbb{P}([X_2 = 2]) \quad \textit{(car } S \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{2} \times \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_2 = -2]) = \frac{1}{8}}$$

- Ensuite :

$$[Y_2 = -1] \ = \ [S = -1] \cap [X_2 = 1]$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_2 = -1]) &= \mathbb{P}([S = -1] \cap [X_2 = 1]) \\ &= \mathbb{P}([S = -1])\ \mathbb{P}([X_2 = 1]) \quad \textit{(car } S \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{2} \times \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_2 = -1]) = \frac{1}{4}}$$

- De même :

$$[Y_2 = 1] = [S = 1] \cap [X_2 = 1] \quad \text{et} \quad [Y_2 = 2] = [S = 1] \cap [X_2 = 2]$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y_2 = 2]) = \frac{1}{8}.}$$

- Enfin : $[Y_2 = 0] = [X_2 = 0]$. Ainsi :

$$\mathbb{P}([Y_2 = 0]) \; = \; \mathbb{P}([X_2 = 0]) \; = \; \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \; = \; \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_2 = 0]) = \frac{1}{4}}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que la famille $([Y_2 = k])_{k \in [\![-2,2]\!]}$ est un système complet d'événements. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_2 = 0]) \; &= \; 1 - \Big(\mathbb{P}([Y_2 = -2]) + \mathbb{P}([Y_2 = -1]) + \mathbb{P}([Y_2 = 1]) + \mathbb{P}([Y_2 = 2])\Big) \\ &= \; 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \; = \; \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

b) Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S + 1)$ suit la même loi que Y_2.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $S(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a : $(S + 1)(\Omega) = \{0, 2\}$.
  De plus $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. D'où, en notant $T_2 = X_2 - (S + 1)$: $T_2(\Omega) \subset \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$$\boxed{T_2(\Omega) \subset [\![-2, 2]\!] \text{ (on rappelle : } Y_2(\Omega) \subset [\![-2, 2]\!] \text{ d'après } \textit{\textbf{2.a)(i)}}\text{)}}$$

- Soit $k \in [\![-2, 2]\!]$.
  La famille $([S = -1], [S = 1])$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([T_2 = k]) \\ = \; & \mathbb{P}([T_2 = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([T_2 = k] \cap [S = 1]) \\ = \; & \mathbb{P}([X_2 - (S+1) = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 - (S+1) = k] \cap [S = 1]) \\ = \; & \mathbb{P}([X_2 - (-1+1) = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 - (1+1) = k] \cap [S = 1]) \\ = \; & \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 = k+2] \cap [S = 1]) \\ = \; & \mathbb{P}([X_2 = k]) \, \mathbb{P}([S = -1]) + \mathbb{P}([X_2 = k+2]) \, \mathbb{P}([S = 1]) && \textit{(car } X_2 \textit{ et } S \textit{ sont indépendantes)} \\ = \; & \frac{1}{2} \, \mathbb{P}([X_2 = k]) + \frac{1}{2} \, \mathbb{P}([X_2 = k+2]) \end{aligned}$$

- On obtient ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([T_2=-2]) &=& \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=-2])+\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=0]) \;=\; \cancel{\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} \;=\; \dfrac{1}{8} \;=\; \mathbb{P}([Y_2=-2])\\[2mm]
\mathbb{P}([T_2=-1]) &=& \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=-1])+\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=1]) \;=\; \cancel{\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} \;=\; \dfrac{1}{4} \;=\; \mathbb{P}([Y_2=-1])\\[2mm]
\mathbb{P}([T_2=0]) &=& \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=0])+\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=2]) \;=\; \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} \;=\; \dfrac{1}{4} \;=\; \mathbb{P}([Y_2=0])\\[2mm]
\mathbb{P}([T_2=1]) &=& \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=1])+\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=3]) \;=\; \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\cancel{\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)} \;=\; \dfrac{1}{4} \;=\; \mathbb{P}([Y_2=1])\\[2mm]
\mathbb{P}([T_2=2]) &=& \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=2])+\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=4]) \;=\; \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}+\cancel{\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)} \;=\; \dfrac{1}{8} \;=\; \mathbb{P}([Y_2=2])
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_2 = X_2-(S+1) \text{ et } Y_2 \text{ suivent la même loi.}}$$

Commentaire

- Lors d'une rédaction classique de détermination de la loi d'une somme, après obtention de la relation :

$$\mathbb{P}([T_2=k]) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=k])+\frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_2=k+2])$$

  On cherche à déterminer si les événements $[X_2=k]$ et/ou $[X_2=k+2]$ sont l'événement impossible.
- Ici, cela varie suivant les valeurs de k. C'est pour cela qu'on effectue le calcul direct des probabilités $\mathbb{P}([T_2=k])$ après l'obtention de la formule précédente.

□

3. Le script **Scilab** suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
n = 10
X = grand(n,2,'bin',2,0.5)
B = grand(n,2,'bin',1,0.5)
S = 2 * B - ones(n,2)
Z1 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)]
Z2 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)]
```

a) Que contiennent les variables `X` et `S` après l'exécution des quatre premières instructions ?

Démonstration.

- L'instruction `X = grand(n,2,'bin',2,0.5)` permet de stocker dans la variable `X` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes où chaque colonne contient une observation d'un `n`-échantillon de loi $\mathcal{B}\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire un `n`-échantillon de la v.a.r. X. Plus précisément, la première colonne de `X` contient une observation $(c_1,\dots,c_n)$ d'un `n`-échantillon $(C_1,\dots,C_n)$ de X, et la deuxième colonne de `X` contient une observation $(c'_1,\dots,c'_n)$ d'un `n`-échantillon $(c'_1,\dots,C'_n)$ de `X`.
  (les v.a.r. C_i et C'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. X)

- L'instruction `B = grand(n,2,'bin',1,0.5)` permet de stocker dans la variable `B` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes où la première colonne contient une observation $(b_1, \ldots, b_n)$ d'un `n`-échantillon $(B_1, \ldots, B_n)$ de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, et la deuxième colonne contient une observation $(b'_1, \ldots, b'_n)$ d'un `n`-échantillon $(B'_1, \ldots, B'_n)$ de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
  (les v.a.r. B_i et B'_i sont indépendantes et ont même loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$)
- On commence par rappeler que l'instruction `ones(n,2)` permet d'obtenir une matrice à `n` lignes et 2 colonnes dont tous les coefficients sont égaux à 1.
  On en déduit que l'instruction `S = 2 * B - ones(n,2)` permet de stocker dans la variable `S` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes.
  La première colonne contient l'observation $(s_1, \ldots, s_n) = (2\,b_1 - 1, \ldots, 2\,b_n - 1)$ du `n`-échantillon $(2\,B_1 - 1, \ldots, 2\,B_n - 1)$.
  La deuxième colonne contient l'observation $(s'_1, \ldots, s'_n) = (2\,b'_1 - 1, \ldots, 2\,b'_n - 1)$ du `n`-échantillon $(2\,B'_1 - 1, \ldots, 2\,B'_n - 1)$.
- Les v.a.r. $2\,B_i - 1$ et $2\,B'_i - 1$ sont indépendantes et de même loi. Déterminons cette loi : on note B une v.a.r. de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et on cherche la loi de $V = 2\,B - 1$.
  - × Tout d'abord, comme $B \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, on a : $B(\Omega) = \{0, 1\}$.
    On en déduit : $V(\Omega) = \{2 \times 0 - 1, 2 \times 1 - 1\} = \{-1, 1\}$.
  - × De plus :
    $$[V = 1] \ = \ [2\,B - 1 = 1] \ = \ [2\,B = 2] \ = \ [B = 1]$$
    D'où : $\mathbb{P}([V = 1]) = \mathbb{P}([B = 1]) = \dfrac{1}{2}$
  - × Enfin, comme la famille $([V = -1], [V = 1])$ est un système complet d'événements :
    $$\mathbb{P}([V = -1]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([V = 1]) \ = \ 1 - \frac{1}{2} \ = \ \frac{1}{2}$$

  On en déduit que la v.a.r. $V = 2\,B - 1$ suit la même loi que la v.a.r. S.
- La variable `S` contient donc une matrice à `n` lignes et 2 colonnes, où la première colonne contient une observation $(s_1, \ldots, s_n)$ d'un `n`-échantillon $(S_1, \ldots, S_n)$ de la v.a.r. S, et la deuxième colonne contient une observation $(s'_1, \ldots, s'_n)$ du `n`-échantillon $(S'_1, \ldots, S'_n)$ de la v.a.r. S.
  (les v.a.r. S_i et S'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. S)

Commentaire

- Comme souvent dans les sujets HEC, l'une des difficultés provient de la prise d'initiatives nécessaires pour répondre à une question.
- Dans cette question par exemple, déterminer la loi de la v.a.r. $V = 2\,B - 1$ n'est pas difficile. C'est prendre l'initiative de déterminer cette loi qui constitue la difficulté.

□

b) Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices `Z1` et `Z2` contient une simulation de la variable aléatoire Y_2.

Démonstration.

- L'instruction `Z1 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)]` permet de stocker dans la variable `Z1` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes.
  Le contenu de la première colonne est donné par la commande `S(1:n,1) .* X(1:n,1)` et celui de la deuxième colonne par `X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)`.
- L'instruction `S(1:n,1) .* X(1:n,1)` permet d'obtenir une matrice colonne à `n` lignes contenant l'observation $(d_1, \ldots, d_n) = (s_1 \times c_1, \ldots, s_n \times c_n)$ du `n`-échantillon $(S_1 \, C_1, \ldots, S_n \; C_n)$.
  Or, les S_i suivent la même loi que S et les C_i suivent la même loi que X_2. Ainsi, les $S_i \, C_i$ suivent la même loi que Y_2.
  La première colonne de `Z1` contient donc une observation $(d_1, \ldots, d_n)$ d'un `n`-échantillon $(D_1, \ldots, D_n)$ de Y_2.
  (les v.a.r. D_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)
- L'instruction `X(1:n,1) - S(1:n,1) - ones(n,1)` permet d'obtenir une matrice colonne à `n` lignes contenant l'observation $(d'_1, \ldots, d'_n) = (c_1 - s_1 - 1, \ldots, c_n - s_n - 1)$ du `n`-échantillon $(C_1 - S_1 - 1, \ldots, C_n - S_n - 1)$.
  Or, les S_i suivent la même loi que S et les C_i suivent la même loi que X_2. Ainsi, les $C_i - S_i - 1$ suivent la même loi que $X_2 - S - 1$. De plus, d'après la question ***2.b)***, la v.a.r. $X_2 - S - 1$ suit la même loi que Y_2.
  La deuxième colonne de `Z1` contient donc une observation $(d'_1, \ldots, d'_n)$ d'un `n`-échantillon $(D'_1, \ldots, D'_n)$ de Y_2.
  (les v.a.r. D'_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)
- De même, l'instruction `Z2 = [S(1:n,1) .* X(1:n,1) , X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)]` permet de stocker dans la variable `Z2` une matrice à `n` lignes et 2 colonnes.
  Le contenu de la première colonne est donné par la commande `S(1:n,1) .* X(1:n,1)` et celui de la deuxième colonne par `X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)`.
- La première colonne de `Z2` est identique à celle de `Z1`, donc la première colonne de `Z2` contient l'observation $(d_1, \ldots, d_n)$ du `n`-échantillon $(D_1, \ldots, D_n)$ de Y_2.
- L'instruction `X(1:n,2) - S(1:n,2) - ones(n,1)` permet d'obtenir une matrice colonne à `n` lignes contenant l'observation $(d''_1, \ldots, d''_n) = (c'_1 - s'_1 - 1, \ldots, c'_n - s'_n - 1)$ du `n`-échantillon $(C'_1 - S'_1 - 1, \ldots, C'_n - S'_n - 1)$.
  Or, les S'_i suivent la même loi que S et les C'_i suivent la même loi que X_2. Ainsi, les $C'_i - S'_i - 1$ suivent la même loi que $X_2 - S - 1$, donc que Y_2.
  La deuxième colonne de `Z2` contient donc une observation $(d''_1, \ldots, d''_n)$ d'un `n`-échantillon $(D''_1, \ldots, D''_n)$ de Y_2.
  (les v.a.r. D''_i sont indépendantes et ont même loi que la v.a.r. Y_2)

Finalement, chacun des coefficients des matrices `Z1` et `Z2` contient une simulation de la v.a.r. Y_2.

Commentaire

On aurait pu utiliser davantage les commandes Scilab. En effet, l'appel classique permettant d'extraire la première colonne de la matrice `S` est plutôt `S(:,1)` (que `S(1:n,1)`). □

c) On modifie la première ligne du script précédent en affectant à `n` une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple, 100000) et en lui adjoignant les deux instructions 7 et 8 suivantes :

```
7  p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))) / n
8  p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))) / n
```

Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour `p1` et `p2` après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

Dans le langage **Scilab**, la fonction `length` fournit la « longueur » d'un vecteur ou d'une matrice et la fonction `find` calcule les positions des coefficients d'une matrice pour lesquels une propriété est vraie, comme l'illustre le script suivant :

```
--> A = [1 ; 2 ; 0 ; 4]
--> B = [2 ; 2 ; 4 ; 3]
--> length(A)
   ans = 4.
--> length([A , B])
   ans = 8.
--> find(A < B)
   ans = 1. 3. // car 1 < 2 et 0 < 4, alors que 2 ⩾ 2 et 4 ⩾ 3
```

Démonstration.

- Commençons par commenter l'instruction :

```
7  p1 = length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))) / n
```

  × L'instruction `find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2))` permet d'obtenir une matrice ligne contenant les positions des coefficients des matrices `Z1(1:n,1)` et `Z1(1:n,2)` égaux. Autrement dit, on obtient une matrice ligne contenant les indices i tels que $d_i = d'_i$.
  (on rappelle que $(d_1, \dots, d_n)$ est une observation d'un `n`*-échantillon $(D_1, \dots, D_n)$ de $S\,X_2$ et $(d'_1, \dots, d'_n)$ est une observation d'un* `n`*-échantillon $(D'_1, \dots, D'_n)$ de $X_2 - S - 1$)*

  × L'instruction `length(find(Z1(1:n,1) == Z1(1:n,2)))` permet d'obtenir la longueur de la matrice précédente. Ainsi, on obtient le nombre de fois où $d_i = d'_i$, pour $i \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$.

  × Enfin, on divise ce nombre par la taille `n` de l'observation.
  Or, par loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\frac{\text{nombre de fois où } d_i = d'_i}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1])$$

$$\boxed{\text{La variable } \texttt{p1} \text{ contient une valeur approchée de } \mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1]).}$$

- Commentons ensuite l'instruction :

```
8  p2 = length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))) / n
```

  × L'instruction `find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2))` permet d'obtenir une matrice ligne contenant les positions des coefficients des matrices `Z1(2:n,1)` et `Z1(2:n,2)` égaux. Autrement dit, on obtient une matrice ligne contenant les indices i tels que $d_i = d''_i$.
  (on rappelle que $(d_1, \dots, d_n)$ est une observation d'un `n`*-échantillon $(D_1, \dots, D_n)$ de $S\,X_2$ et $(d''_1, \dots, d''_n)$ est une observation d'un* `n`*-échantillon $(D''_1, \dots, D''_n)$ de $X'_2 - S - 1$, où la v.a.r. X'_2 suit la même loi que X_2)*

  × L'instruction `length(find(Z2(1:n,1) == Z2(1:n,2)))` permet d'obtenir la longueur de la matrice précédente. Ainsi, on obtient le nombre de fois où $d_i = d''_i$, pour $i \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$.

× Enfin, on divise ce nombre par la taille `n` de l'observation.
Or, par loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\frac{\text{nombre de fois où } d_i = d''_i}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}\big(\big[S\,X_2 = X'_2 - S - 1\big]\big)$$

$$\boxed{\text{La variable } \texttt{p2} \text{ contient une valeur approchée de } \mathbb{P}([S\,X_2 = X'_2 - S - 1]) \text{ où la v.a.r. } X'_2 \text{ suit la même loi que } X_2.}$$

Commentaire

- Le programme proposé par l'énoncé n'est ici rien d'autre qu'une illustration de l'idée naturelle pour obtenir une approximation de $\mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1])$:
  × simuler un grand nombre de fois ($\mathtt{n} = 100000$) les v.a.r. $S\,X_2$ et $X_2 - S - 1$.
  Formellement, on souhaite obtenir une observation $(d_1, \dots, d_n)$ d'un `n`-échantillon $(D_1, \dots, D_n)$ de la v.a.r. $S\,X_2$, et une observation $(d'_1, \dots, d'_n)$ d'un `n`-échantillon $(D'_1, \dots, D'_n)$ de la v.a.r. $X_2 - S - 1$.
  × de compter le nombre de fois où $d_i = d'_i$, pour $i \in [\![1, \mathtt{n}]\!]$.
- L'objectif de cette question **Scilab** est de revenir sur un point important en probabilités :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \quad \not\Rightarrow \quad X = Y$$

(mais bien sûr, si $X = Y$, alors X et Y ont même loi)
- On peut avoir la confirmation du point précédent en exécutant le programme **Scilab**.
On obtient :

```
p1 =
    0.1261
p2 =
    0.2179
```

On constate qu'on a $\mathtt{p1} \neq 1$ et $\mathtt{p2} \neq 1$. Ainsi, ici :
× les v.a.r. $S\,X_2$ et $X_2 - S - 1$ ont même loi,
× mais $\mathbb{P}([S\,X_2 = X_2 - S - 1]) \neq 1$. Cela démontre en particulier : $S\,X_2 \neq X_2 - S - 1$. □

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = S\,X_n$.

a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
La v.a.r. X_n est une v.a.r. finie. Ainsi, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X_n}$ est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_{X_n} \text{ défini sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} M_{X_n}(t) & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X_n}\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,t}\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(par théorème de transfert } (X_n(\Omega) = [\![0,n]\!])\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k\,t} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} & \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \mathrm{e}^{k\,t} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \\ & = & \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \left(\mathrm{e}^t\right)^k\ 1^{n-k} & \\ & = & \dfrac{1}{2^n} \left(\mathrm{e}^t + 1\right)^n & \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_{X_n}(t) = \frac{1}{2^n}\left(1 + \mathrm{e}^t\right)^n}$$

□

b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall t \in \mathbb{R},\ M_{Y_n}(t) = \dfrac{1}{2^{n+1}} \left((1+\mathrm{e}^t)^n + (1+\mathrm{e}^{-t})^n\right)$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  La v.a.r. Y_n est une v.a.r. finie (car les v.a.r. X_n et S le sont). Ainsi, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,Y_n}$ est également une v.a.r. finie. Elle admet donc des moments à tout ordre, en particulier une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_{Y_n} \text{ défini sur } \mathbb{R}.}$$

- Déterminons la loi de Y_n.
  - × Tout d'abord, comme $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $S(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a : $Y_n(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$.
  - × Soit $k \in [\![-n,n]\!]$.
    La famille $([S=-1], [S=1])$ forme un système complet d'événements.
    Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y_n = k]) & = & \mathbb{P}([S=-1] \cap [Y_n = k]) + \mathbb{P}([S=1] \cap [Y_n = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([S=-1] \cap [S\,X_n = k]) + \mathbb{P}([S=1] \cap [S\,X_n = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([S=-1] \cap [-X_n = k]) + \mathbb{P}([S=1] \cap [X_n = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([S=-1])\ \mathbb{P}([X_n = -k]) + \mathbb{P}([S=1])\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \textit{(car les v.a.r. } S \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k]) + \dfrac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \end{array}$$

    Trois cas se présentent alors :

    - si $k \in [\![-n,0[\![$, alors $[X_n = k] = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) \ = \ \frac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k]) + \cancel{\frac{1}{2}\ \mathbb{P}(\varnothing)} \ = \ \frac{1}{2}\ \mathbb{P}([X_n = -k])$$

- si $k = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_n = 0]) &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_n = 0]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_n = 0]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ &= \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

- si $k \in]\!]0,n]\!]$, alors $[X_n = -k] = \varnothing$. Donc :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \cancel{\frac{1}{2}\,\mathbb{P}(\varnothing)} + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([X_n = k])$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,Y_n}\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{k\,t}\,\mathbb{P}([Y_n = k]) \\ &= \sum_{k=-n}^{-1}\left(\mathrm{e}^{k\,t}\,\mathbb{P}([Y_n = k])\right) + \mathrm{e}^{0\,t}\,\mathbb{P}([Y_n = 0]) + \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{k\,t}\,\mathbb{P}([Y_n = k])\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{-1}\left(\mathrm{e}^{k\,t}\,\mathbb{P}([X_n = -k])\right) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{k\,t}\,\mathbb{P}([X_n = k])\right) \end{aligned}$$

× Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{-1} \mathrm{e}^{k\,t}\,\mathbb{P}([X_n = -k]) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-j\,t}\,\mathbb{P}([X_n = j]) && \textit{(par changement d'indice } j = -k\textit{)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-j\,t}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\,\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^j\,1^{n-j} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\,\left(\mathrm{e}^{-t}\right)^j\,1^{n-j}\right) - 1\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left((\mathrm{e}^{-t}+1)^n - 1\right) && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

× De même :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k\,t}\,\mathbb{P}([X_n = k]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k\,t}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\,\left(\mathrm{e}^{t}\right)^k\,1^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\,\left(\mathrm{e}^{t}\right)^k\,1^{n-k}\right) - 1\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left((\mathrm{e}^{t}+1)^n - 1\right) && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)} \end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
M_{Y_n}(t) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}\left((1+\mathrm{e}^{-t})^n - 1\right) + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}\left((1+\mathrm{e}^{t})^n - 1\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}(1+\mathrm{e}^{-t})^n - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}(1+\mathrm{e}^{t})^n - \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+\mathrm{e}^{-t})^n + (1+\mathrm{e}^{t})^n\right) - \frac{\cancel{2}}{2^{n+\cancel{1}}} + \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+\mathrm{e}^{-t})^n + (1+\mathrm{e}^{t})^n\right) - \cancel{\frac{1}{2^n}} + \cancel{\frac{1}{2^n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}\ \left((1+\mathrm{e}^{t})^n + (1+\mathrm{e}^{-t})^n\right)}$$

□

c) En utilisant l'égalité $(1+\mathrm{e}^{-t})^n = \mathrm{e}^{-nt}\,(1+\mathrm{e}^{t})^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrons l'égalité : $(1+\mathrm{e}^{-t})^n = \mathrm{e}^{-nt}(1+\mathrm{e}^{t})^n$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-n\,t}\ (1+\mathrm{e}^{t})^n &= \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n\ (1+\mathrm{e}^{t})^n \\
&= \left(\mathrm{e}^{-t}(1+\mathrm{e}^{t})\right)^n \\
&= (\mathrm{e}^{-t}+1)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ (1+\mathrm{e}^{-t})^n = \mathrm{e}^{-nt}(1+\mathrm{e}^{t})^n}$$

- Il s'agit de démontrer que les v.a.r. Y_n et $X_n - H_n$ ont même loi. On peut déjà remarquer : $Y(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$. Or, en question ***1.c)***, on a démontré que, si deux v.a.r. X et Y vérifient :
  × $X(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$,
  × $Y(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$,
  × $M_X \ = \ M_Y$,

  alors X et Y ont même loi.
  Pour répondre à cette question, il suffit donc de trouver une v.a.r. H_n indépendante de X_n telle que :

$$(X_n - H_n)(\Omega) \subset [\![-n,n]\!] \quad \text{et} \quad M_{Y_n} = M_{X_n - H_n}$$

  Pour déterminer une telle v.a.r. H_n, on commencera par supposer qu'elle existe pour en déduire des propriétés sur sa loi, puis on choisira une v.a.r. vérifiant ces propriétés, et enfin on établira que l'on est bien dans le cadre d'application de la question ***1.c)***.

- Supposons qu'il existe une telle v.a.r. H_n. Alors, soit $t \in \mathbb{R}$:
  × d'une part :

$$\begin{aligned}
M_{X_n - H_n}(t) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(X_n - H_n)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X_n}\ \mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X_n}\right)\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) && \textit{(car, par lemme des coalitions, les v.a.r. } \mathrm{e}^{t\,X_n} \textit{ et } \mathrm{e}^{-t\,H_n} \textit{ sont indépendantes)} \\
&= M_{X_n}(t)\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\ (1+\mathrm{e}^{t})^n\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) && \textit{(d'après la question 4.a))}
\end{aligned}$$

× d'autre part :

$$\begin{array}{rcll} M_{Y_n}(t) & = & \dfrac{1}{2^{n+1}}\left((1+\mathrm{e}^t)^n + (1+\mathrm{e}^{-t})^n\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{1}{2^{n+1}}\left((1+\mathrm{e}^t)^n + \mathrm{e}^{-nt}(1+\mathrm{e}^t)^n\right) & \textit{(d'après l'indication de l'énoncé)} \\ & = & \dfrac{1}{2^{n+1}}\ (1+\mathrm{e}^t)^n\left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right) & \\ & = & \dfrac{1}{2^{n}}\ (1+\mathrm{e}^t)^n \times \dfrac{1}{2}\ \left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right) & \end{array}$$

Ainsi, si H_n vérifie les propriétés souhaitées :

$$\begin{array}{rcl} M_{X_n - H_n}(t) = M_{Y_n}(t) & \Leftrightarrow & \cancel{\dfrac{1}{2^n}\ (1+\mathrm{e}^t)^n}\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) = \cancel{\dfrac{1}{2^n}\ (1+\mathrm{e}^t)^n} \times \dfrac{1}{2}\ \left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right) \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right) \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) = \mathrm{e}^{-0\,t}\ \dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{-nt}\ \dfrac{1}{2} \end{array}$$

- On semble faire apparaître ici le théorème de transfert. On choisit donc une v.a.r. H_n qui vérifie cette égalité. On choisit alors une v.a.r. H_n, indépendante de X_n telle que :
  × $H_n(\Omega) = \{0, n\}$,
  × $\mathbb{P}([H_n = 0]) = \mathbb{P}([H_n = n]) = \dfrac{1}{2}$.
- Vérifions qu'avec cette v.a.r. H_n, nous sommes dans le cadre d'application de la question ***1.c)***.
  × Tout d'abord, comme $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $H_n(\Omega) = \{0, n\}$, alors : $(X_n - H_n)(\Omega) \subset [\![-n, n]\!]$.
  × Ensuite, la v.a.r. $\mathrm{e}^{-t\,H_n}$ admet une espérance en tant que v.a.r. finie (car H_n est une v.a.r. finie). Ainsi, par théorème de transfert, soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-t\,H_n}\right) = \mathrm{e}^{-0\,t}\ \mathbb{P}([H_n = 0]) + \mathrm{e}^{-nt}\ \mathbb{P}([H_n = n]) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{-nt}\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-nt}\right)$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} M_{Y_n}(t) & = & \dfrac{1}{2^n}\ (1+\mathrm{e}^t)^n \times \dfrac{1}{2}\ (1+\mathrm{e}^{-t})^n & \\ & = & M_{X_n}(t) \times \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-t\,H_n}) & \\ & = & \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\,X_n})\ \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-t\,H_n}) & \\ & = & \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\,X_n}\ \mathrm{e}^{-t\,H_n}) & \textit{(car les v.a.r. } e^{t\,X_n} \textit{ et } e^{-t\,H_n} \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & M_{X_n - H_n}(t) & \end{array}$$

  D'où : $M_{Y_n} = M_{X_n - H_n}$

  $\boxed{\text{D'après } \textbf{\textit{1.c)}}\text{, on en déduit que les v.a.r. } Y_n \text{ et } X_n - H_n \text{ suivent la même loi.}}$

Commentaire

Les termes « en utilisant ... » de cette question font hésiter quant à la nécessité de démontrer l'égalité énoncée. Dans le doute, on le démontre.

□

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et $\mathcal{D}_X$ le domaine de définition de la fonction K_X.

a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, la v.a.r. $e^{0\,X} = 1$ (v.a.r. constante égale à 1) est une v.a.r. finie. Elle admet donc une espérance. Donc $M_X(0)$ est bien défini. De plus :

$$M_X(0) \;=\; \mathbb{E}\left(e^{0\,X}\right) \;=\; \mathbb{E}(1) \;=\; 1$$

- Ainsi, $K_X(0)$ est bien défini et :

$$K_X(0) \;=\; \ln\big(M_X(0)\big) \;=\; \ln(1) \;=\; 0$$

$$\boxed{K_X(0) = 0}$$

□

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = a\,X + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel $a\,t$ appartient à $\mathcal{D}_X$, l'égalité :

$$K_Y(t) \;=\; b\,t + K_X(a\,t)$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $a\,t \in \mathcal{D}_X$.

- Comme $a\,t \in \mathcal{D}_X$, alors $K_X(a\,t)$ est bien défini, donc $M_X(a\,t)$ également et : $M_X(a\,t) > 0$.
- De plus :

$$M_X(a\,t) \;=\; \mathbb{E}\left(e^{a\,t}\right) \;=\; \mathbb{E}\left(e^{t\,(a\,X)}\right) \;=\; \mathbb{E}\left(e^{t\,(a\,X+b)-b\,t}\right) \;=\; \mathbb{E}\left(e^{t\,Y}\,e^{-b\,t}\right) \;=\; e^{-b\,t}\,\mathbb{E}\left(e^{t\,Y}\right)$$

Or, par définition de $M_Y(t)$ (si cette quantité existe) : $M_Y(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\,T}\right)$.
D'après le calcul précédent, on en déduit que le réel $M_Y(t)$ est bien défini et :

$$M_Y(t) \;=\; e^{b\,t}\;M_X(a\,t)$$

- Comme : $M_X(a\,t) > 0$ et $e^{b\,t} > 0$, alors : $M_Y(t) = e^{b\,t}\;M_X(a\,t) > 0$.
  On en déduit que $K_Y(t)$ est bien défini. Et enfin :

$$K_Y(t) \;=\; \ln\big(M_Y(t)\big) \;=\; \ln\left(e^{b\,t}\;M_X(a\,t)\right) \;=\; b\,t + \ln\big(M_X(a\,t)\big) \;=\; b\,t + K_X(a\,t)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } a\,t \in \mathcal{D}_X \,:\, K_Y(t) = b\,t + K_X(a\,t).}$$

Commentaire

On notera que la difficulté de cette question ne réside pas dans la démonstration de la relation entre $K_Y(t)$ et $K_X(a\,t)$ mais bien dans la démonstration de l'existence de tous les objets manipulés.

□

c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi.
Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variables aléatoire X ?

Démonstration.

- Soit $t \in \mathcal{D}_X$.
Les v.a.r. X et $-X$ ont même loi. On en déduit que les v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X}$ et $\mathrm{e}^{-t\,X}$ ont même loi.
Or, comme $t \in \mathcal{D}_X$, $K_X(t)$ existe, donc $\mathrm{e}^{t\,X}$ admet une espérance $(M_X(t))$ et : $M_X(t) > 0$.
On en déduit que la v.a.r. $\mathrm{e}^{-t\,X}$ admet une espérance $(M_{-X}(t) = M_X(-t))$ et : $M_X(-t) > 0$.
D'où : $-t \in \mathcal{D}_X$.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } t \in \mathcal{D}_X, \text{ on a : } -t \in \mathcal{D}_X.}$$

- Soit $t \in \mathcal{D}_X$, alors $-t \in \mathcal{D}_X$.
  - Ainsi, d'après la question précédente (appliquée à $a = -1$ et $b = 0$) :

$$K_{-X}(t) \;=\; 0 \times t + K_X(-t) \;=\; K_X(-t)$$

  - De plus, comme X et $-X$ ont même loi (on rappelle que $M_X(t)$ et $M_{-X}(t)$ sont bien définis car $t \in \mathcal{D}_X$ et $-t \in \mathcal{D}_X$) :

$$M_{-X}(t) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(-X)}\right) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right) \;=\; M_X(t)$$

  Ainsi : $K_{-X}(t) \;=\; \ln\big(M_{-X}(t)\big) \;=\; \ln\big(M_X(t)\big) \;=\; K_X(t)$.

  On en déduit : $K_X(t) = K_{-X}(t) = K_X(-t)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si les v.a.r. } X \text{ et } -X \text{ suivent la même loi : } \forall t \in \mathcal{D}_X,\ K_X(t) = K_X(-t).}$$

- Supposons maintenant que la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_X$. Soit $p \in \mathbb{N}$:
  × tout d'abord : $Q^{(2p+1)}(X) = K_X^{(2p+1)}(0)$,
  × ensuite : $\forall t \in \mathcal{D}_X$, $K_X(t) = K_X(-t)$.
  Alors, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathcal{D}_X$, $K_X^{(n)}(t) = (-1)^n\, K_X^{(n)}(-t)$.
  En particulier, pour tout $t \in \mathcal{D}_X$:

$$K_X^{(2p+1)}(t) \;=\; (-1)^{2p+1}\, K_X^{(2p+1)}(-t) \;=\; -K_X^{(2p+1)}(-t)$$

  Comme $0 \in \mathcal{D}_X$ (d'après ***5.a)***), on en déduit :

$$K_X^{(2p+1)}(0) = -K^{(2p+1)}(0) \;\Leftrightarrow\; 2\,K_X^{(2p+1)}(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; K_X^{(2p+1)}(0) = 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } X \text{ et } -X \text{ suivent la même loi, sous réserve d'existence : } \forall p \in \mathbb{N},\ Q^{(2p+1)}(X) = 0.}$$

Commentaire

- Remarquons que si K_X n'est pas dérivable sur $\mathcal{D}_X$ alors on ne peut rien dire des cumulants de X, puisque ces derniers n'existent pas.
- Dans le programme ECE, on trouve la propriété :

Les v.a.r. X et Y ont même loi	$\Leftrightarrow$	Les v.a.r. X et Y ont même fonction de répartition

- On peut alors démontrer que si X et Y sont des v.a.r. discrètes (resp. à densité), on a :

• Les v.a.r. X et Y ont même loi • Les v.a.r. X et Y admettent un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$	$\Rightarrow$	$\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$

  Cette dernière propriété est aussi vérifiée pour les v.a.r. quelconques mais n'est pas explicitement écrite dans ce cas précis. Toutefois, on peut considérer qu'on y a accès puisque le programme précise : « on admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques ».
- Enfin, on utilise dans cette question la propriété :

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \quad \Rightarrow \quad f(X) \text{ et } f(Y) \text{ ont même loi}$$

  où f est une fonction (ici $x \mapsto e^{t\,x}$).
  Cette propriété est facile à démontrer dans le cas de v.a.r. discrètes ou à densité. On l'admettra pour le cas de v.a.r. quelconques. □

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y.

a) Monter que pour tout réel t appartenant à la fois à $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$, on a : $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$.

- Comme $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$, les quantités $K_X(t)$ et $K_Y(t)$ sont bien définies.
  En particulier, $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ sont bien définies et : $M_X(t) > 0$ et $M_Y(t) > 0$.
  Ainsi, les v.a.r. $e^{t\,X}$ et $e^{t\,Y}$:
  × admettent une espérance,
  × sont indépendantes par lemme des coalitions, car X et Y sont indépendantes.

  On en déduit que la v.a.r. $e^{t\,X} \times e^{t\,Y} = e^{t\,(X+Y)}$ admet une espérance.

  $\boxed{\text{Ainsi, la quantité } M_{X+Y}(t) \text{ est bien définie.}}$

Commentaire

- On utilise ici le fait que si deux v.a.r. U et V sont indépendantes et admettent une espérance alors, la v.a.r. produit UV admet une espérance donnée par : $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V)$. L'hypothèse d'indépendance est ici cruciale pour démontrer l'existence de l'espérance du produit et pour obtenir sa valeur.

Commentaire

- Dans le cas général, la v.a.r. produit UV admet une espérance si les v.a.r. U et V admettent **un moment d'ordre** 2.
- On peut se demander d'où provient cette hypothèse liée aux moments d'ordre 2.
  Elle est issue d'un théorème de domination. Détaillons ce point.
  Remarquons tout d'abord : $(U-V)^2 \geqslant 0$.
  On en déduit : $U^2 - 2\,UV + V^2 \geqslant 0$.
  Et, en réordonnant : $UV \leqslant \frac{1}{2}\,U^2 + \frac{1}{2}\,V^2$. Ou encore :
  $$0 \ \leqslant \ |UV| \ \leqslant \ \frac{1}{2}\,U^2 + \frac{1}{2}\,V^2$$
  Comme U et V admettent un moment d'ordre 2, la v.a.r. $\frac{1}{2}\,U^2 + \frac{1}{2}\,V^2$ admet une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
  Ainsi, par théorème de domination (présenté seulement dans le programme ECS), la v.a.r. $|UV|$ admet une espérance. Il en est de même de la v.a.r. UV.

- De plus :
$$\begin{array}{rcll} M_{X+Y}(t) & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,(X+Y)}\right) & \\ & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\ \mathrm{e}^{t\,Y}\right) & \\ & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,X}\right)\ \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,Y}\right) & \textit{(car les v.a.r. } \mathrm{e}^{t\,X} \textit{ et } \mathrm{e}^{t\,Y} \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & M_X(t)\ M_Y(t) & \end{array}$$

- Enfin, comme $M_X(t) > 0$ et $M_Y(t) > 0$, alors : $M_{X+Y}(t) > 0$. Donc $K_{X+Y}(t)$ est bien définie.
  On obtient :
$$K_{X+Y}(t) \ = \ \ln\big(M_{X+Y}(t)\big) \ = \ \ln\big(M_X(t)\,M_Y(t)\big) \ = \ \ln\big(M_X(t)\big) + \ln\big(M_Y(t)\big) \ = \ K_X(t) + K_Y(t)$$

$$\boxed{\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y,\ K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)}$$
□

b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X, Y et $X+Y$.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Si K_X est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathcal{D}_X$ et K_Y est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathcal{D}_Y$, alors, d'après la question précédente, K_{X+Y} est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$ et :
$$\forall t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y,\quad K_{X+Y}^{(p)}(t) \ = \ K_X^{(p)}(t) + K_X^{(p)}(t)$$
Or $0 \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$. Donc :
$$Q_p(X+Y) \ = \ K_{X+Y}^{(p)}(0) \ = \ K_X^{(p)}(0) + K_Y^{(p)}(0) \ = \ Q_p(X) + Q_p(Y)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ si } Q_p(X) \text{ et } Q_p(Y) \text{ sont bien définis, alors :} \\ Q_p(X+Y) \ = \ Q_p(X) + Q_p(Y).\end{array}}$$
□

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que la fonction M_U est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R}, M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  Le réel $M_U(t)$ existe si et seulement si la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,U}$ admet une espérance.
  Par théorème de transfert, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,U}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\,dx$ est absolument convergente.
  Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{t\,x}$ et f_U étant à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ (f_U est une densité de probabilité), cela revient à démonter que cette intégrale est convergente.
- De plus, la fonction f_u est nulle en dehors de $[0,1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\,dx$$

- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\,dx$ est bien définie.
  Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,U}$ admet une espérance.

$$\boxed{\text{La fonction } M_U \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $t = 0$, alors d'après la question ***5.a)*** : $M_U(0) = 1$.
  × si $t \neq 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} M_U(t) & = & \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,U}\right) & \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t\,x} f_U(x)\,dx & \textit{(après les points précédents)} \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t\,x}\,dx & \\ & = & \left[\dfrac{1}{t}\,\mathrm{e}^{t\,x}\right]_0^1 & \textit{(car } t \neq 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{t}\left(\mathrm{e}^t - 1\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } M_U : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.}$$

□

b) Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.

Démonstration.

- La fonction M_U est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient $\dfrac{f_1}{f_2}$ avec :
  - $\times$ $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t - 1$ dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$,
  - $\times$ $f_2 : t \mapsto t$ dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Soit $t \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0, +\infty[$.

$$M_U'(t) \;=\; \frac{\mathrm{e}^t \times t - (\mathrm{e}^t - 1) \times 1}{t^2}$$

$$\boxed{\forall t \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]0, +\infty[, \ M_U(t) = \frac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2}}$$

$\square$

c) Trouver la limite du quotient $\dfrac{M_U(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{M_U(t) - 1}{t} \;=\; \frac{\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} - 1}{t} \;=\; \frac{\frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t}}{t} \;=\; \frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2}$$

- Déterminons, si elle existe, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2}$.
  - $\times$ Tout d'abord : $\mathrm{e}^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$. Ainsi : $\mathrm{e}^t - 1 - t = \dfrac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$. D'où :

$$\mathrm{e}^t - 1 - t \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$$

  - $\times$ On en déduit :

$$\frac{\mathrm{e}^t - 1 - t}{t^2} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{1}{\cancel{t^2}} \, \frac{\cancel{t^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t \to 0} \frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{1}{2}.}$$

$\square$

d) Montrer que la fonction M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{M_U(t) - M_U(0)}{t - 0} \;=\; \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_U \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } M_U'(0) = \frac{1}{2}.}$$

- De plus, d'après la question ***7.b)***, la fonction M_U est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_U \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la dérivabilité sur ces intervalles (question ***7.b)***).
- On cherche enfin à montrer que la fonction M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, c'est-à-dire que la fonction M_U' est continue en 0. On rappelle :

$$M_U' : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On cherche donc à montrer : $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} = \frac{1}{2}$.

× On sait déjà : $\mathrm{e}^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$. Ainsi :

$$t\,\mathrm{e}^t \ = \ t\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right) \ = \ t + t^2 + \frac{t^3}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1 \ &= \ \cancel{t} + t^2 + \frac{t^3}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^3) - \left(\cancel{1} + \cancel{t} + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right) + \cancel{1} \\ &= \ \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \qquad \textit{(car } t^3 = \underset{t\to 0}{o}(t^2)\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi : $t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$.

× On obtient :

$$M_U'(t) \ = \ \frac{t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t^2} \ \underset{t\to 0}{\sim} \ \frac{\frac{\cancel{t^2}}{2}}{\cancel{t^2}} \ = \ \frac{1}{2}$$

On en déduit : $\displaystyle\lim_{t\to 0} M_U'(t) \ = \ \frac{1}{2} \ = \ M_U'(0)$.
La fonction M_U' est donc continue en 0.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } M_U \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

- On pouvait également déterminer le DL à l'ordre 2 « $t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1 = \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$ » en appliquant la formule de Taylor-Young à la fonction $t \mapsto t\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$).
- L'utilisation de la formule de Taylor-Young serait un peu plus cohérente au regard du programme d'ECE. On ne privilégie cependant pas cette méthode ici puisqu'elle est bien plus chronophage que celle présentée.

□

8. Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

a) Exprimer K_X en fonction de M_U, où la variable aléatoire U a été définie dans la question ***7.***

Démonstration.

- Montrons que la fonction K_U est bien définie, *i.e.* : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_U(t) > 0$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $t \in]-\infty, 0[$:

$$\begin{aligned} M_u(t) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^t - 1}{t} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^t - 1 < 0 \qquad \textit{(car } t < 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad e^t < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad t < 0 \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln \textit{ sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

  La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi.
  × si $t = 0$, alors : $M_U(0) = 1 > 0$.
  × si $t \in]0, +\infty[$, alors, avec un raisonnement similaire au cas $t \in]-\infty, 0[$, on obtient également : $M_U(t) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } K_U \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

- L'esprit du sujet est ici de faire l'étude des fonctions M_X et K_X dans le cas particulier de certaines lois usuelles. C'est pourquoi on exploite l'expression explicite de M_U pour démontrer l'existence de K_U.
- On pourrait en fait démontrer dans un cadre très général que si $M_X(t)$ est bien définie, alors, comme la v.a.r. e^{tX} est à valeurs **strictement** positives : $M_X(t) > 0$.
  On démontrera cette implication dans la partie III qui, elle traite du cas général.

- De plus, rappelons :

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = (\beta - \alpha)\, U + \alpha \hookrightarrow \mathcal{U}([\alpha, \beta])$$

  Ainsi, en notant $Y = (\beta - \alpha)\, U + \alpha$, on obtient que les v.a.r. Y et X ont même loi.
- Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $(\beta - \alpha)\, t \in \mathbb{R}$. On en déduit, d'après la question ***5.b)***, que $K_Y(t)$ existe et :

$$K_Y(t) \;=\; \alpha\, t + K_U\big((\beta - \alpha)\, t\big) \;=\; \alpha\, t + \ln\Big(M_U\big((\beta - \alpha)\, t\big)\Big)$$

  (on rappelle que, comme la fonction K_Y est bien définie sur $\mathbb{R}$, la fonction M_Y aussi et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_Y(t) > 0$)
- Enfin, comme les v.a.r. X et Y ont même loi, alors les v.a.r. e^{tX} et e^{tY} ont même loi.
  Or, comme la fonction M_Y est bien définie sur $\mathbb{R}$, la v.a.r. e^{tY} admet une espérance strictement positive. Ainsi, la v.a.r. e^{tX} admet la même espérance strictement positive, *i.e.* la fonction M_X est définie sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) = M_Y(t) > 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que la fonction } K_X \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ et :} \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad K_X(t) \;=\; \alpha\, t + \ln\Big(M_U\big((\beta - \alpha)\, t\big)\Big).\end{array}}$$

□

b) Justifier que la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et établir l'égalité : $Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction $\widetilde{M_U} : t \mapsto M_u\big((\beta-\alpha)\,t\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (on rappelle que M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après ***7.d)***).
De plus, comme $M_U(]-\infty,+\infty[) \subset]0,+\infty[$ (démontré dans la question précédente), pour tout $t \in \mathbb{R}$: :
$$\widetilde{M_U}(t) = M_U\big((\beta-\alpha)\,t\big) > 0$$
- Ensuite, la fonction $t \mapsto \ln\Big(M_u\big((\beta-\alpha)\,t\big)\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car la composée $\ln \circ \tilde{M_U}$ de :
  - × $\tilde{M_U} : t \mapsto M_U\big((\beta-\alpha)\,t\big)$ qui :
    - est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
    - vérifie : $\tilde{M_U}(]-\infty,+\infty[) \subset]0,+\infty[$
  - × $\ln$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

> On en déduit que la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Par définition de $Q_1(X)$, on a : $Q_1(X) = K_X'(0)$.
Or, d'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$K_X'(t) \;=\; \alpha + \frac{(\beta-\alpha)\,M_U'\big((\beta-\alpha)\,t\big)}{M_U\big((\beta-\alpha)\,t\big)}$$
On en déduit :
$$\begin{aligned} Q_1(X) &= K_X'(0) \;=\; \alpha + \frac{(\beta-\alpha)\,M_U'(0)}{M_U(0)} \\ &= \alpha + \frac{(\beta-\alpha)\,\frac{1}{2}}{1} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{7.d)}}\textit{)} \\ &= \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} \\ &= \frac{\alpha+\beta}{2} \end{aligned}$$

> Finalement, comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\alpha,\beta])$: $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = Q_1(X)$.

□

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

a) Déterminer les fonctions M_T et K_T.

Démonstration.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, la quantité $M_T(t)$ est bien définie si la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,T}$ admet une espérance.
Or, par théorème de transfert, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,T}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{t\,n}\, \mathbb{P}([T=n])$ est absolument convergente.
Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{k\,t}\, \mathbb{P}([T=k]) & = & \sum\limits_{k=0}^{N} \mathrm{e}^{k\,t}\, \dfrac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} & \textit{(car } T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\left(\mathrm{e}^t\right)^k \lambda^k}{k!} & \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\left(\lambda\, \mathrm{e}^t\right)^k}{k!} & \end{array}$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série exponentielle $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ en $x = \lambda\, \mathrm{e}^t$. Cette série est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\left(\lambda\, \mathrm{e}^t\right)^k}{k!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda\, \mathrm{e}^t\right)^k}{k!} = \exp\left(\lambda\, \mathrm{e}^t\right)$$

On en déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{t\,n}\, \mathbb{P}([T=n])$ converge. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,T}$ admet une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } M_T \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

- De plus, soit $t \in \mathbb{R}$:

$$M_T(t) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{t\,T}\right) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda}\, \exp\left(\lambda\, \mathrm{e}^t\right) \;=\; \exp\left(-\lambda + \lambda\, \mathrm{e}^t\right) \;=\; \exp\left(\lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)\right)$$

$$\boxed{M_T : t \mapsto \exp\left(\lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)\right)}$$

- On a bien, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $M_T(t) = \exp\left(\lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)\right) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } K_T \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$K_T(t) \;=\; \ln\left(M_T(t)\right) \;=\; \ln\left(\exp\left(\lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)\right)\right) \;=\; \lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)$$

$$\boxed{K_T : t \mapsto \lambda\,(\mathrm{e}^t - 1)}$$

□

b) En déduire les cumulants de T.

Démonstration.

- Tout d'abord, la fonction K_T est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que transformée affine de la fonction exp de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } T \text{ admet des cumulants à tout ordre.}}$$

- Ensuite, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $K'_T(t) = \lambda\, \mathrm{e}^t$.
  On en déduit, par récurrence immédiate, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $K_T^{(n)}(t) = \lambda\, \mathrm{e}^t$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : Q_n(X) = K_T^{(n)}(0) = \lambda.}$$

□

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

a) Justifier pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$ est convergente si et seulement si :
  - l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$ est convergente.
  - et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$ est convergente.
- Démontrons tout d'abord la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$.
  La fonction $h_t : x \mapsto \exp\left(t\,x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} h_t(x)\,dx$ est impropre seulement en $+\infty$.
  - Tout d'abord, la fonction h_t est continue sur le **segment** $[0, 1]$.
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} h_t(x)\,dx$ est bien définie.
  - Par ailleurs :
    × $\forall x \in [1, +\infty[,\ \exp\left(t\,x - \dfrac{x^2}{2}\right) \geqslant 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.
    × $\exp\left(t\,x - \dfrac{x^2}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
    × $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 (> 1).
    Elle est donc convergente.

    Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} h_t(x)\,dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale impropre } \int_{0}^{+\infty} h_t(x)\,dx \text{ est convergente.}}$$

- Il reste à démontrer la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx$.
  La fonction h_t est continue sur $]-\infty, 0]$ donc cette intégrale est impropre seulement en $-\infty$.
  En effectuant le changement de variable affine $\boxed{u = -x}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \exp\left(t\,x - \frac{x^2}{2}\right)\,dx &= \int_{0}^{+\infty} \exp\left(-t\,u - \frac{(-u)^2}{2}\right)(-\,du) \\
&= -\int_{0}^{+\infty} \exp\left(-t\,u - \frac{u^2}{2}\right)\,du \;=\; -\int_{0}^{+\infty} f_{-t}(u)\,du
\end{aligned}$$

En appliquant le résultat précédent en $-t \in \mathbb{R}$, on conclut que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{-t}(u)\, du$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale impropre } \int_{-\infty}^{0} h_t(x)\, dx \text{ est convergente.}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale impropre } \int_{-\infty}^{+\infty} h_t(x)\, dx \text{ est bien convergente.}}$$

Commentaire

- Le programme officiel précise que « les changements de variables **non affines** ne seront pratiqués qu'avec des intégrales sur un segment ». Il est donc autorisé, sous réserve de convergence, d'effectuer un changement de variable affine sur une intégrale généralisée (ce qui est fait dans cette question).
- Ici, on pose le changement de variable affine $\boxed{u = -x}$. Il faut s'habituer à effectuer ce changement de variable classique à la volée. Rappelons comment le présenter formellement.

$$\left|\begin{array}{l} u = -x \text{ (et donc } x = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dx \quad \text{ et } \quad dx = -\ du \\ \bullet\ x = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

- La fonction intégrande $h_t : x \mapsto \mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{2}}$:
  × n'admet pas d'équivalent plus simple en $+\infty$,
  × tend très rapidement vers 0 en $+\infty$.

  Du fait de ces deux points, on opte dans la démonstration pour un critère de négligeabilité. De manière informelle, la présence du terme $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ produit une convergence extrêmement rapide de h_t vers 0 en $+\infty$. L'intégrande h_t apparaît donc suffisamment petite en $+\infty$ pour que l'intégrale sur $[1, +\infty[$ associée soit convergente. Formellement, cette idée est concrétisée en comparant h_t à l'intégrande $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, positive et dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ associée est convergente.

- La démonstration de la propriété $\exp\left(t\,x - \dfrac{x^2}{2}\right) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ n'est pas forcément un attendu de la question. Prendre l'initiative de la comparaion à la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ démontre la bonne compréhension des mécanismes en jeu. Il faut évidemment savoir comment faire cette démonstration dont on donne ci-dessous les détails :

$$\frac{\mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = x^2\ \mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{2}} = \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}}\ \mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{4}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  En effet :
  × en posant $u = \frac{x^2}{4}$, on obtient : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}} = \lim_{u \to +\infty} 4\, \frac{u}{\mathrm{e}^u} = 0$ *(par croissances comparées)*.
  × $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{t\,x - \frac{x^2}{2}} = 0$.

□

b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbb{R},\ M_Z(t) = \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Le réel $M_Z(t)$ existe si et seulement si la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,Z}$ admet une espérance.
  Or, par théorème de transfert, la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,Z}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t\,x}\ f_Z(x)\ dx$ est absolument convergente.
  Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{t\,x}$ et f_Z étant à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ (f_Z est une densité de probabilité), cela revient à démonter que cette intégrale est convergente.

  $$\boxed{\text{D'après la question précédente, cette intégrale est convergente pour tout } t \in \mathbb{R}. \text{ Ainsi, } M_Z \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

- Remarquons que pour tout $x \in \left]-\infty, +\infty\right[$:

  $$\mathrm{e}^{t\,x}\ f_Z(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{t\,x}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,x^2} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(x^2-2\,t x)} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(x-t)^2+\frac{1}{2}\,t^2} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(x-t)^2}$$

- On effectue alors le changement de variable affine $\boxed{u = x - t}$.

  $$\left|\begin{array}{l} u = x - t \text{ (et donc } x = u - t) \\ \hookrightarrow du = \ dx \quad \text{ et } \quad dx = \ du \\ \bullet\ x = -\infty \ \Rightarrow \ u = -\infty \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow \ u = +\infty \end{array}\right.$$

  On obtient alors :

  $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t\,x}\ f_Z(x)\ dx &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(x-t)^2}\ dx \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,u^2}\ du \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(u)\ du \ = \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \qquad \textit{(car } f_Z \textit{ est une densité de probabilité)} \end{aligned}$$

  $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

□

c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- On note Y la v.a.r. définie par : $Y = \sigma\,Z + \mu$ (où Z est toujours une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$).
  Alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.
  De plus, d'après la question ***5.b)***, pour tout t tel que $\sigma\,t \in \mathcal{D}_Z$:

  $$K_Y(t) \ = \ \mu\,t + K_Z(\sigma\,t)$$

- Déterminons donc d'abord K_Z.
  - × Tout d'abord, remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $M_Z(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} > 0$.
    Ainsi, K_Z est définie sur $\mathbb{R}$, *i.e.* : $\mathcal{D}_Z = \mathbb{R}$.
  - × De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

    $$K_Z(t) \ = \ \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2}\right) \ = \ \frac{1}{2}\,t^2$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\sigma\, t \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_Z$. Ainsi, d'après la question ***5.b)*** :

$$K_Y(t) \;=\; \mu\, t + K_Z(\sigma\, t) \;=\; \mu\, t + \frac{1}{2}\,(\sigma\, t)^2$$

$$\boxed{\text{Finalement : } K_Y : t \mapsto \mu\, t + \frac{\sigma^2}{2}\, t^2.}$$

- La fonction K_Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } Y \text{ admet des cumulants à tout ordre.}}$$

- On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
  × $K_Y'(t) = \mu + \sigma^2\, t$ et ainsi : $Q_1(Y) = K_Y'(0) = \mu$.
  × $K_Y''(t) = \sigma^2$ et ainsi : $Q_2(Y) = K_Y''(0) = \sigma^2$.
  × pour tout $p \in [\![3, +\infty[\![$, $K_Y^{(p)}(t) = 0$ et ainsi : $Q_p(Y) = K_Y^{(p)}(0) = 0$.

$$\boxed{\text{En conclusion : } Q_1(Y) = \mu,\ Q_2(Y) = \sigma^2 \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\},\ Q_p(Y) = 0.}$$

□

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

a) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une variable aléatoire W.

Démonstration.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons X_i une v.a.r. de loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On suppose de plus que les v.a.r. X_i sont indépendantes.
  Alors, par stabilité des lois de Poisson, la v.a.r. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.
  On en déduit que S_n et T_n suivent la même loi. Ainsi, les v.a.r. $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}} = W_n$ ont même loi.
- La suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est constituée de v.a.r. :
  × indépendantes,
  × de même loi,
  × admettant la même espérance 1,
  × admettant la même variance $1 \neq 0$.
  Ainsi, comme $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, la v.a.r. centrée réduite associée à S_n est :

$$S_n^* \;=\; \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \;=\; \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

- Alors, d'après le théorème central limite :

$$S_n^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} W \quad \text{où} \quad W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

  On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{S_n^*}(t) = \Phi(t)$.
  (la fonction Φ est la fonction de répartition de W)
- Or les v.a.r. $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ et $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$ ont même loi, donc même fonction de répartition.
  On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{W_n}(t) = \Phi(t)$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la suite de v.a.r. } (W_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } W \text{ où } W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

Commentaire

- La forme de la v.a.r. $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$ dans le contexte de convergence de v.a.r. doit faire penser **systématiquement** au théorème central limite (TCL).
- De manière générale, si les X_i ont pour espérance m et variance σ^2, alors :
$$S_n^* \ = \ \frac{S_n - n\,m}{\sigma\,\sqrt{n}}$$
On voit bien apparaître la division par $\sqrt{n}$ qui est très caractéristique de l'utilisation du TCL.
- Rappelons aussi que si on pose : $V_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, alors :
$$V_n^* \ = \ \sqrt{n}\,\frac{V_n - m}{\sigma}$$
(on notera : $V_n^* = S_n^*$)
On voit alors apparaître le produit par $\sqrt{n}$ qui est aussi caractéristique du TCL.
- Pour pouvoir justifier de l'application de ce théorème dans cette question, on introduit la v.a.r. S_n qui suit la même loi que T_n et satisfait bien aux hypothèses du TCL.
On rappelle, comme remarqué en question ***3.c)***, que deux v.a.r. qui suivent la même loi ne sont pas forcément égales (on n'a d'ailleurs pas du tout besoin dans cette question de l'égalité $S_n = T_n$). Cependant on peut raisonnablement penser qu'un candidat précisant « $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ » (et non : $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$) ne serait pas sanctionné.

$\square$

b) Déterminer la fonction K_{W_n}.

Démonstration.

- Comme $T_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$, d'après la question ***9.a)*** :
$$K_{T_n} : t \mapsto n(\mathrm{e}^t - 1)$$
- De plus : $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}} \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,T_n - \dfrac{n}{\sqrt{n}} \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,T_n - \sqrt{n}$.
Ainsi, soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,t \in \mathbb{R}$ et, d'après la question ***5.b)*** :
$$K_{W_n}(t) \ = \ -\sqrt{n}\,t + K_{T_n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,t\right) \ = \ -\sqrt{n}\,t + n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}\,t} - 1\right)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } K_{W_n} : t \mapsto -\sqrt{n}\,t + n\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - 1\right).}$$

$\square$

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} K_{W_n}(t) = K_W(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.

  Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{t}{\sqrt{n}} = 0$. On peut donc appliquer le développement limité précédent en choisissant $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$. On obtient :

$$e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right) = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} K_{W_n}(t) &= -\sqrt{n}\,t + n\left(\cancel{1} + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) - \cancel{1}\right) \\ &= -\sqrt{n}\,t + n\,\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1) \\ &= -\cancel{\sqrt{n}}\,t + \cancel{\sqrt{n}}\,t + \frac{t^2}{2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1) \\ &= \frac{t^2}{2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1) \end{aligned}$$

  On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} K_{W_n}(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

- Or, comme $W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, d'après la question ***10.c)*** : $K_W(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } t \in \mathbb{R} : \lim_{n \to +\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} = K_W(t).}$$

Commentaire

- Soit f une fonction et $(a, x_0) \in \mathbb{R}^2$.
  On rappelle la propriété utilisée dans le deuxième point :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = a + \underset{x \to x_0}{o}(1)$$

- On peut remarquer que cette question ***11.*** nous fait démontrer, **dans le cas particulier d'une loi de Poisson**, l'implication suivante :

$$W_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} W \quad \Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R},\ K_{W_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} K_W(t)$$

  On peut se poser la question de la généralisation de cette propriété. En effet, il existe un lien entre M_X et F_X, mais cela serait hors de portée du programme ECE.

□

Partie III. Cumulant d'ordre 4

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.
On admet alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, on a : $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.

De plus, on pose : $\mu_4(X) = \mathbb{E}\left(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^4\right)$.

Commentaire

Dans la définition de μ_4, on sous-entend que la v.a.r. $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^4$ admet une espérance.
Dans le cours, on démontre les propriétés suivantes :

× si X admet une espérance, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$ (c'est la v.a.r. centrée associée à X).
Dans ce cas, on a : $\mu_1(X) = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = 0$.

× si X admet un moment d'ordre 2, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$.
Dans ce cas, on a : $\mu_2(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big) = \mathbb{V}(X)$.
(la variance est le moment centré d'ordre 2)

De manière générale si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$, il en est de même de $X - \mathbb{E}(X)$.
En effet :

$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(-\mathbb{E}(X)\big)^{n-k} \; X^k$$

Ainsi, la v.a.r. $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^n$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des v.a.r. X^0, X_1, $\dots$, X^n, qui admettent toutes une espérance.

12. Justifier les égalités : $Q_1(X) = \mathbb{E}(X)$ et $Q_2(X) = \mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- La fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I car elle est la composée $K_X = \ln \circ M_X$ où :
  × la fonction M_X est :
    - est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I,
    - telle que $M_X(I) \subset \,]0, +\infty[$.
      En effet, comme : $\forall t \in I$, $\mathrm{e}^{tX} > 0$, on a : $\forall t \in I$, $M_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) > 0$.

  × la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $]0, +\infty[$.
- Déterminons les dérivées successives de K_X. Soit $t \in I$.
  × Tout d'abord : $K_X'(t) = \dfrac{1}{M_X(t)} \times M_X'(t)$.

$$\begin{array}{rcll} Q_1(X) & = & K_X'(0) & \textit{(par définition)} \\ & = & \dfrac{1}{M_X(0)} \times M_X'(0) & \textit{(d'après le résultat précédent en } t = 0 \in I\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{M_X(0)} \times \mathbb{E}(X) & \textit{(d'après le résultat admis dans l'énoncé)} \\ & = & \dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^0)}\, \mathbb{E}(X) \ = \ \mathbb{E}(X) & \end{array}$$

$$\boxed{Q_1(X) = \mathbb{E}(X)}$$

× Ensuite : $K_X''(t) = \left(-\dfrac{1}{\big(M_X(t)\big)^2} \times M_X'(t)\right) \ M_X'(t) + \dfrac{1}{M_X(t)} \times M_X''(t)$.

$$\begin{array}{rcll} Q_1(X) & = & K_X''(0) & \textit{(par définition)} \\ & = & \left(-\dfrac{1}{\big(M_X(0)\big)^2} \times M_X'(0)\right) \ M_X'(0) + \dfrac{1}{M_X(0)} \times M_X''(0) & \textit{(d'après le résultat précédent en } t = 0 \in I\textit{)} \\ & = & -\dfrac{1}{(1)^2} \times \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(X) + \dfrac{1}{1} \times \mathbb{E}(X^2) & \textit{(d'après le résultat admis dans l'énoncé)} \\ & = & \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \ = \ \mathbb{V}(X) & \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \end{array}$$

$$\boxed{Q_2(X) = \mathbb{V}(X)}$$

Commentaire

- On se sert ici du résultat stipulant que toute v.a.r. X qui admet une espérance vérifie :

$$\boxed{X > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X) > 0} \ (*)$$

Ce résultat n'est pas officiellement au programme des classes préparatoires commerciales.
Seul le résultat plus faible suivant (nommé parfois positivité de l'espérance) figure :

$$\boxed{X \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X) \geqslant 0} \ (**)$$

On notera au passage que l'on obtient le même résultat en supposant l'hypothèse plus faible : $\mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big) = 1$.

- Pour démontrer le résultat $(*)$, on peut procéder par l'absurde.
Supposons $X > 0$ et `NON`$(\mathbb{E}(X) > 0)$ (autrement dit $\mathbb{E}(X) \leqslant 0$).

  × Comme $X > 0 \geqslant 0$, alors, d'après $(**)$: $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
  Comme $\mathbb{E}(X) \leqslant 0$, on en déduit $\mathbb{E}(X) = 0$.

  × D'après l'inégalité de Markov : $\forall a > 0, \ \mathbb{P}\big([X > a]\big) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a} = 0$.
  Une probabilité étant toujours positive, on démontre ainsi : $\forall a > 0, \ \mathbb{P}\big([X > a]\big) = 0$.

  × Démontrons, à l'aide de cette dernière égalité : $\mathbb{P}\big([X > 0]\big) = 0$.
  Pour ce faire, on remarque tout d'abord : $[X > 0] = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \big[X > \frac{1}{n}\big]$ *(démonstration par double inclusion)*
  On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X > 0]\big) & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \big[X > \frac{1}{n}\big]\Big) & \\ & = & \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{N} \big[X > \frac{1}{n}\big]\Big) & \textit{(d'après la propriété de la limite monotone)} \\ & = & \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}\big(\big[X > \frac{1}{N}\big]\big) & \textit{(car } \big(\big[X > \frac{1}{N}\big]\big)_{N \in \mathbb{N}^*} \textit{ est une suite croissante d'événements)} \\ & = & \lim\limits_{N \to +\infty} 0 \ = \ 0 & \textit{(car } \mathbb{P}\big(\big[X > \frac{1}{N}\big]\big) = 0\textit{)} \end{array}$$

  Absurde ! □

13. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose : $S = X_1 - X_2$.

a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :

$$\mathbb{E}(S^4) \; = \; 2\,\mu_4(X) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, les v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi que X, v.a.r. qui admet une espérance. Ainsi $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_2)$ et :

$$\begin{array}{rcl} S & = & X_1 - X_2 \\ & = & X_1 - X_2 - \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \\ & = & \big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big) - \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big) \end{array}$$

- On en déduit, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcl} S^4 & = & \Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big) - \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)\Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k} \Big(-\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^k\Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k \big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k} \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^k \end{array}$$

Remarquons alors que :

× les v.a.r. $X_1 - \mathbb{E}(X_1)$ et $X_2 - \mathbb{E}(X_2)$ admettent des moments à tout ordre $r \in [\![0, 4]\!]$ car suivent la même loi que $X - \mathbb{E}(X)$ qui admet un moment d'ordre 4.

× d'après le lemme des coalitions, pour tout entier $k \in [\![0, 4]\!]$, les v.a.r. $\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k}$ et $\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^k$ sont indépendantes car X_1 et X_2 le sont.

On en déduit que pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, la v.a.r. $\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k} \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^k$ admet une espérance. Et par propriété de l'espérance :

$$\mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k} \big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^k\Big) \; = \; \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k}\Big)\, \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^k\Big)$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S^4 \text{ admet une espérance comme combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance.}}$$

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(S^4) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k\, \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^{4-k}\Big)\, \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^k\Big) \\ & = & \quad 1 \;\; \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^4\Big) \\ & & -4 \;\; \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^3\Big)\, \cancel{\mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^1\Big)} \qquad \textit{(car } X_2 - \mathbb{E}(X_2) \textit{ est la v.a.r. centrée associée à } X_2\textit{)} \\ & & +6 \;\; \mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^2\Big)\, \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^2\Big) \\ & & -4 \;\; \cancel{\mathbb{E}\Big(\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big)^1\Big)}\, \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^3\Big) \qquad \textit{(car } X_1 - \mathbb{E}(X_1) \textit{ est la v.a.r. centrée associée à } X_1\textit{)} \\ & & +1 \;\; \mathbb{E}\Big(\big(X_2 - \mathbb{E}(X_2)\big)^4\Big) \\ & = & \mu_4(X_1) \; + \; 6\,\mathbb{V}(X_1)\;\mathbb{V}(X_2) \; + \; \mu_4(X_2) \end{array}$$

Enfin, comme X_1 et X_2 ont même loi que X :

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_2) \quad \text{et} \quad \mu_4(X_1) = \mu_4(X) = \mu_4(X_2)$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } \mathbb{E}(S^4) = 2\,\mu_4(X_1) + 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2.}$$

□

b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe $\mathcal{C}^4$ sur I et que pour tout $t \in I$, on a :

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)\,M_S(t) + 3\,K_S^{(3)}(t)\,M_S'(t) + 3\,K_S''(t)\,M_S''(t) + K_S'(t)\,M_S^{(3)}(t)$$

Démonstration.
Soit $t \in I$ tel que $-t \in I$.

- Comme $-t \in I$, la quantité $M_X(-t)$ est bien définie. On a alors :

$$\begin{array}{ccccccc} M_X(-t) & = & \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-t\,X}\big) & = & \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{t\,(-X)}\big) & = & M_{-X}(t) \\ \shortparallel & & & & & & \shortparallel \\ M_{X_2}(-t) & & & & & & M_{-X_2}(t) \end{array}$$

(car X et X_2 ont même loi)

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } t \in I \text{ tel que } -t \in I, \text{ on a : } M_{-X_2}(t) = M_{X_2}(-t).}$$

- D'autre part :

$$\mathrm{e}^{t\,S} = \mathrm{e}^{t\,(X_1 - X_2)} = \mathrm{e}^{t\,X_1} \times \mathrm{e}^{-t\,X_2}$$

Les v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X_1}$ et $\mathrm{e}^{-t\,X_2}$:

× admettent toutes les deux une espérance car M_{X_1} est définie en t et M_{X_2} est définie en $-t$ (car on a supposé $-t \in I$).

× sont indépendantes d'après le lemme des coalitions puisque X_1 et X_2 le sont.

On en déduit que la v.a.r. $\mathrm{e}^{t\,X_1} \times \mathrm{e}^{-t\,X_2}$ admet une espérance, donnée par :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{t\,S}\big) & = & \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{t\,X_1} \times \mathrm{e}^{-t\,X_2}\big) & = & \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{t\,X_1}\big) \times \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-t\,X_2}\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ M_S(t) & & & & M_{X_1}(t) \times M_{X_2}(-t) \\ & & & & \shortparallel \\ & & & & M_X(t) \times M_X(-t) \end{array}$$

(d'après le point précédent)

(car les v.a.r. X_2 et X_1 ont même loi que X)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout intervalle } J \subset I \text{ symétrique par rapport à l'origine, on a :} \\ \forall t \in J,\ M_S(t) = M_X(t) \times M_X(-t).\end{array}}$$

> En particulier, la fonction M_S est de classe $\mathcal{C}^4$ sur tout intervalle $J \subset I$ symétrique par rapport à l'origine, comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^4$ sur cet intervalle. On en déduit, comme en question ***12***, que la fonction K_S est elle aussi de classe $\mathcal{C}^4$ sur J.

Dans la suite, on note $J \subset I$ un intervalle symétrique par rapport à l'origine. Soit $t \in J$.

- Tout d'abord : $K_S'(t) = \dfrac{1}{M_S(t)} \times M_S'(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall t \in J,\ M_S'(t) = K_S'(t) \times M_S(t).}$$

- En remarquant : $\big(M_S\big)^{(4)}(t) = \big(M_S'\big)^{(3)}(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \big(M_S\big)^{(4)}(t) \\
= \ & \big(K_S' \times M_S\big)^{(3)}(t) \\
= \ & \Big(\big(K_S' \times M_S\big)'\Big)^{(2)}(t) \\
= \ & \Big(K_S'' \times M_S + K_S' \times M_S'\Big)^{(2)}(t) \\
= \ & \Big(\big(K_S'' \times M_S + K_S' \times M_S'\big)'\Big)^{(1)}(t) \\
= \ & \Big(\big(K_S''' \times M_S + K_S'' \times M_S'\big) + \big(K_S'' \times M_S' + K_S' \times M_S''\big)\Big)^{(1)}(t) \\
= \ & \Big(K_S''' \times M_S + 2\, K_S'' \times M_S' + K_S' \times M_S''\Big)^{(1)}(t) \\
= \ & \Big(\big(K_S'''' \times M_S + K_S''' \times M_S'\big) + 2\,\big(K_S''' \times M_S' + K_S'' \times M_S''\big) + \big(K_S'' \times M_S'' + K_S' \times M_S'''\big)\Big)(t) \\
= \ & \Big(K_S'''' \times M_S + 3\, K_S''' \times M_S' + 3\, K_S'' \times M_S'' + K_S' \times M_S'''\Big)(t) \\
= \ & K_S^{(4)}(t)\, M_S(t) + 3\, K_S^{(3)}(t)\, M_S'(t) + 3\, K_S''(t)\, M_S''(t) + K_S'(t)\, M_S^{(3)}(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in J,\ M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t)\, M_S(t) + 3\, K_S^{(3)}(t)\, M_S'(t) + 3\, K_S''(t)\, M_S''(t) + K_S'(t)\, M_S^{(3)}(t)}$$

Commentaire

- Lors de l'étude de $M_S(t)$ (pour $t \in I$) la quantité $M_{X_2}(-t)$ apparaît naturellement. Or, cette quantité existe seulement si $-t \in I$. C'est pourquoi on a décidé dans cette question de restreindre à la démonstration à un intervalle $J \subset I$ symétrique par rapport à l'origine.
- Dans la correction, on a déterminé la dérivée quatrième de M_S en dérivant successivement trois fois la fonction M_S'. On aurait pu utiliser directement la formule de Leibniz qui stipule que si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I, on a :

$$\boxed{\big(f \times g\big)^{(n)} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ f^{(n-k)} \times g^{(k)}}$$

Cette formule n'apparaît pas explicitement dans le programme ECE (mais est bien présente dans le programme ECS de première année). Il est toutefois très classique de la présenter lors de la première année ECE. On pouvait l'utiliser directement ici et écrire :

$$\begin{aligned}
\big(M_S\big)^{(4)}(t) \ &= \ \big(M_S'\big)^{(3)}(t) \ = \ \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}\ {K_S'}^{(3-k)} \times \big(M_S\big)^{(k)} \\
&= \ \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}\ K_S^{(4-k)} \times \big(M_S\big)^{(k)} \\
&= \ K_S^{(4)}(t)\, M_S(t) + 3\, K_S^{(3)}(t)\, M_S'(t) + 3\, K_S''(t)\, M_S''(t) + K_S'(t)\, M_S^{(3)}(t)
\end{aligned}$$

La présence des coefficients 1, 3, 3, 1 dans la formule à démontrer doit mettre sur la piste de l'utilisation d'une formule utilisant les coefficients binomiaux. □

c) En déduire l'égalité : $\mathbb{E}(S^4) \;=\; Q_4(S) + 3\left(\mathbb{V}(S)\right)^2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que la fonction M_S est de classe $\mathcal{C}^4$ sur l'intervalle J (qu'on peut choisir ouvert) qui contient l'origine. On admet donc, comme dans l'énoncé :

$$\forall k \in [\![1,4]\!],\ M_S^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left(S^k\right)$$

- La v.a.r. S vérifiant les mêmes hypothèses que la v.a.r. X de début de la **Partie III**, on en déduit, que le résultat de la question ***12*** est vérifié pour la v.a.r. S. Plus précisément :

$$Q_1(S) = \mathbb{E}(S) \quad \text{et} \quad Q_2(S) = \mathbb{V}(S)$$

Remarquons au passage :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S) & = & \mathbb{E}(X_1 - X_2) & \\ & = & \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \;=\; 0 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \end{array}$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S) & = & \mathbb{E}\left(S^2\right) - \cancel{\left(\mathbb{E}(S)\right)^2} & \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \\ & = & \mathbb{E}\left(S^2\right) & \end{array}$$

- On applique alors l'égalité précédente à $t = 0 \in J$:

$$\begin{array}{cl} & M_S^{(4)}(0) \\ = & K_S^{(4)}(0) \times M_S(0) \;+\; 3\,K_S^{(3)}(0) \times M_S'(0) \;+\; 3\,K_S''(0) \times M_S''(0) \;+\; K_S'(0) \times M_S^{(3)}(0) \\ = & Q_4(S) \times M_S(0) \;+\; 3\,Q_3(S) \times M_S'(0) \;+\; 3\,Q_2(S) \times M_S''(0) \;+\; Q_1(S) \times M_S^{(3)}(0) \\ = & Q_4(S) \times \mathbb{E}\left(e^0\right) \;+\; 3\,Q_3(S) \times \mathbb{E}(S) \;+\; 3\,Q_2(S) \times \mathbb{E}\left(S^2\right) \;+\; Q_1(S) \times \mathbb{E}\left(S^3\right) \\ = & Q_4(S) \;+\; 3\,Q_3(S) \times \cancel{\mathbb{E}(S)} \;+\; 3\,\mathbb{V}(S) \times \mathbb{E}\left(S^2\right) \;+\; \cancel{\mathbb{E}(S)} \times \mathbb{E}\left(S^3\right) \\ = & Q_4(S) \;+\; 3\,\mathbb{V}(S) \times \mathbb{V}(S) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{E}(S^4) \;=\; M_S^{(4)}(0) \;=\; Q_4(S) + 3\left(\mathbb{V}(S)\right)^2.}$$

□

14. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation : $Q_4(X) \;=\; \mu_4(X) - 3\left(\mathbb{V}(X)\right)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} Q_4(S) & = & \mathbb{E}(S^4) - 3\left(\mathbb{V}(S)\right)^2 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{13.c)}}\textit{)} \\ & = & \left(2\,\mu_4(X) + 6\left(\mathbb{V}(X)\right)^2\right) - 3\left(\mathbb{V}(S)\right)^2 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{13.a)}}\textit{)} \\ & = & \left(2\,\mu_4(X) + 6\left(\mathbb{V}(X)\right)^2\right) - 3\left(\mathbb{V}(X_1 - X_2)\right)^2 & \\ & = & \left(2\,\mu_4(X) + 6\left(\mathbb{V}(X)\right)^2\right) - 3\left(\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2)\right)^2 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } -X_2 \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\ & = & \left(2\,\mu_4(X) + 6\left(\mathbb{V}(X)\right)^2\right) - 3\left(\mathbb{V}(X_1) + (-1)^2\,\mathbb{V}(X_2)\right)^2 & \\ & = & \left(2\,\mu_4(X) + 6\left(\mathbb{V}(X)\right)^2\right) - 3\left(\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)\right)^2 & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\ & = & 2\,\mu_4(X) + 6\left(\mathbb{V}(X)\right)^2 - 12\left(\mathbb{V}(X)\right)^2 \;=\; 2\,\mu_4(X) - 6\left(\mathbb{V}(X)\right)^2 & \end{array}$$

- Il reste alors à exprimer $Q_4(S)$ en fonction de $Q_4(X)$.
  Rappelons tout d'abord qu'on a démontré en question ***13.b)*** que pour tout $t \in J$:

$$M_S(t) \;=\; M_X(t)\; M_X(-t)$$

  On en conclut :

$$\begin{array}{rcl} K_S(t) & = & \ln\big(M_S(t)\big) \\[6pt] & = & \ln\big(M_X(t) \times M_X(-t)\big) \\[6pt] & = & \ln\big(M_X(t)\big) + \ln\big(M_X(-t)\big) \\[6pt] & = & K_X(t) + K_X(-t) \end{array}$$

  Ainsi, par dérivations successives des deux membres de cette égalité :

$$\begin{array}{lrcl} & K'_S(t) & = & K'_X(t) - K'_X(-t) \\[6pt] \text{donc} & K''_S(t) & = & K''_X(t) - \big(-K''_X(-t)\big) \\ & & = & K'_X(t) + K'_X(-t) \\[6pt] \text{et} & K_S^{(3)}(t) & = & K_X^{(3)}(t) - K_X^{(3)}(-t) \\[6pt] \text{enfin} & K_S^{(4)}(t) & = & K_X^{(4)}(t) + K_X^{(4)}(-t) \end{array}$$

  En particulier, pour $t = 0 \in J$:

$$\begin{array}{ccccc} K_S^{(4)}(0) & = & K_X^{(4)}(0) + K_X^{(4)}(0) & = & 2\,K_X^{(4)}(0) \\ \parallel & & & & \parallel \\ Q_4(S) & & & & 2\,Q_4(X) \end{array}$$

- On en conclut, d'après ce qui précède :

$$2\,Q_4(X) \;=\; 2\,\mu_4(X) - 6\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2$$

$$\boxed{\text{Finalement : } Q_4(X) \;=\; \mu_4(X) - 3\,\big(\mathbb{V}(X)\big)^2.}$$

□

HEC 2020 - couple de variables aléatoires à densité, loi exponentielle, loi de Bernoulli, loi binomiale, inégalité de Boole

On s'intéresse dans ce sujet au problème de la *double dépense* de *bitcoins* par un groupe d'individus mal intentionnés.
On rappelle que le bitcoin est une monnaie virtuelle dont l'utilisation pour des transactions est associée à une structure unique appelée *blockchain*, partagée sur le réseau des usagers de cette monnaie et ayant pour but de sécuriser ces transactions.
La modélisation étudiée ne nécessite pas de connaissances particulières sur le *bitcoin* et la *blockchain*.

Partie I - Deux résultats généraux

On démontre dans cette partie deux résultats préliminaires, aux questions ***5.*** et ***6***. Ces résultats seront utilisés dans la suite du sujet et pourront être admis.

Calcul d'une probabilité

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé, à densité et indépendantes.
On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et Y.
On suppose que Y est à valeurs positives et possède une densité f_Y dont la restriction à $[0, +\infty[$ est continue sur cet intervalle.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $H(x) = \mathbb{P}(\, [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant x]\,)$.

1. a) Montrer que H est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ qui admet une limite finie en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{On suppose} & x & \leqslant & y \\ \text{on a alors} & [Y \leqslant x] & \subset & [Y \leqslant y] \\ \text{donc} & [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant x] & \subset & [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant y] \\ \text{donc} & \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant x]\big) & \leqslant & \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant y]\big) \\ & \shortparallel & & \shortparallel \\ & H(x) & & H(y) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } H \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Commentaire

- La seule difficulté de cette question est de connaître la définition de croissance d'une fonction. Pour les fonctions dérivables, la propriété de croissance est souvent obtenue à l'aide de la caractérisation à l'aide du signe de la dérivée. Rappelons cependant que la définition de croissance n'utilise pas de propriété de régularité de la fonction.
- Démontrons formellement l'inclusion : $[Y \leqslant x] \ \subset \ [Y \leqslant y]$.
  Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $\omega \in [Y \leqslant x]$.
  On a alors $Y(\omega) \leqslant x$ et ainsi :
  $$Y(\omega) \leqslant x \leqslant y$$
  On en conclut : $\omega \in [Y \leqslant y]$.

- La fonciton H est :
  - $\times$ croissante sur $\mathbb{R}_+$.
  - $\times$ majorée. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant x] \big) \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par le théorème de la limite monotone, que la fonction admet une limite finie en } +\infty.}$$

□

b) En utilisant la suite $\big(H(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,)$.
Que vaut $H(0)$?

Démonstration.
On note $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé évoqué dans l'énoncé.

- Démontrons tout d'abord : $\Omega = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} [Y \leqslant k]$. On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $\omega \in \Omega$. Notons $m = \lceil Y(\omega) \rceil$. On a alors :

$$Y(\omega) \leqslant \lceil Y(\omega) \rceil = m$$

Ainsi : $\omega \in [Y \leqslant m] \ \subset \ \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} [Y \leqslant k]$.

$$\boxed{\Omega \ \subset \ \bigcup_{k=0}^{+\infty} [Y \leqslant k]}$$

($\supset$) Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[Y \leqslant k] \in \mathscr{A}$, alors : $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} [Y \leqslant k] \in \mathscr{A}$.

$$\boxed{\text{En particulier : } \bigcup_{k=0}^{+\infty} [Y \leqslant k] \ \subset \ \Omega.}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl} [X \leqslant Y] & = & [X \leqslant Y] \cap \left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} [Y \leqslant k] \right) \\ & = & \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \Big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant k] \Big) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \text{Finalement } \ \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \big) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \Big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant k] \Big) \right) & \\ & = & \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{N} \Big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant k] \Big) \right) & \textit{(d'après le théorème de la limite monotone)} \\ & = & \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant N] \big) & \textit{(car } \big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant k] \big)_{k\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite croissante d'événements)} \\ & = & \lim\limits_{N\to+\infty} H(N) & \\ & = & \lim\limits_{x\to+\infty} H(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \lim_{x\to+\infty} H(x) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \big).}$$

Commentaire

- Cette question est à juger comme difficile car elle exige beaucoup d'initiatives de la part du candidat. Il y a là un saut de difficulté par rapport à la question précédente.
- On n'a pas détaillé ci-dessus le fait que $\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. C'est une application directe de la question précédente. En effet, on a démontré que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$x \leqslant y \ \Rightarrow \ [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant x] \subset [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant y]$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En choisissant $x = n$ et $y = n+1$ on obtient le résultat souhaité, à savoir :

$$[X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant n] \subset [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant n+1]$$

- Par définition :

$$\begin{array}{rcll} H(0) & = & \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant 0]\big) & \\ & \leqslant & \mathbb{P}\big([Y \leqslant 0]\big) & \textit{(car } [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant 0] \subset [Y \leqslant 0]\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\big([Y < 0]\big) & \textit{(car } Y \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \mathbb{P}(\varnothing) & \textit{(car } Y \textit{ est à valeurs positives)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{H(0) = 0}$$

□

2. Soit (u, v) un couple de réels positifs tels que : $u < v$.

a) Montrer : $H(v) - H(u) = \mathbb{P}(\,[X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\,)$. Puis :

$$F_X(u)\ \dfrac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v-u} \ \leqslant\ \dfrac{H(v) - H(u)}{v-u} \ \leqslant\ F_X(v)\ \dfrac{F_Y(v) - F_Y(u)}{v-u}$$

Démonstration.

- Il s'agit de démontrer :

$$\begin{array}{rcl} H(v) & = & H(u) + \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\big) \\ & = & \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant u]\big) + \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\big) \end{array}$$

où $H(v) = \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant v]\big)$. Pour ce faire, démontrons :

$$[X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant v] \ = \ [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant u] \ \cup \ [X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]$$

ou plus simplement : $[Y \leqslant v] \ = \ [Y \leqslant u] \ \cup \ [u < Y \leqslant v]$.

Commentaire

L'énoncé demande ici de démontrer une égalité entre probabilités de différents événements. Il est classique, pour ce faire, d'agir comme suit :

1) on démontre tout d'abord une égalité entre les événements concernés.

2) on applique alors l'application probabilité $\mathbb{P}$ de part et d'autre de l'égalité. On conclut à l'aide des propriétés de $\mathbb{P}$.

Il est à noter que l'égalité entre événements à démontrer est évidemment issue de l'égalité entre probabilité à démontrer. Pour ce faire, on aura en tête les triptyques :

union / incompatibilité / somme	intersection / indépendance / produit

On procède par double inclusion. Soit $\omega \in \Omega$.

($\subset$) Supposons $\omega \in [Y \leqslant v]$. Ainsi : $Y(\omega) \leqslant v$.
Deux cas se présentent alors :

× si $Y(\omega) \leqslant u$ alors $\omega \in [Y \leqslant u]$.

× si $\mathtt{NON}(Y(\omega) \leqslant u)$ alors $Y(\omega) > u$.
Comme on sait de plus : $Y(\omega) \leqslant v$, on en conclut : $\omega \in [u < Y \leqslant v]$.

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \omega \in [Y \leqslant u] \cup [u < Y \leqslant v].}$$

($\subset$) Supposons $\omega \in [Y \leqslant u] \cup [u < Y \leqslant v]$. Ainsi : $Y(\omega) \leqslant u \ \ \mathtt{OU} \ \ u < Y(\omega) \leqslant v$.
Deux cas se présentent alors :

× si $Y(\omega) \leqslant u$ alors, comme $u < v$, on a $Y(\omega) \leqslant u < v$ et ainsi $\omega \in [Y \leqslant v]$.

× si $\mathtt{NON}(Y(\omega) \leqslant u)$ alors, comme $Y(\omega) \leqslant u \ \mathtt{OU} \ u < Y(\omega) \leqslant v$, on a forcément : $u < Y(\omega) \leqslant v$. En particulier : $Y(\omega) \leqslant v$, et donc : $\omega \in [Y \leqslant v]$.

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \omega \in [Y \leqslant v].}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } [Y \leqslant v] \ = \ [Y \leqslant u] \ \cup \ [u < Y \leqslant v].}$$

Commentaire

- La démonstration de cette égalité a été développée ici afin d'illustrer la méthode. Cependant, cette égalité n'étant pas mentionnée dans l'énoncé, il est probable que l'écrire suffise à récupérer une grande partie des points alloués à la question.
- L'égalité initiale entre probabilités fait apparaître une différence entre probabilités de certains événements. Une telle égalité est généralement la conséquence d'une égalité entre événements où apparaît une différence ensembliste d'événements. Plus précisément, on pourrait mettre ici en place le raisonnement suivant :

$$[Y \leqslant v] \ \setminus \ [Y \leqslant u] = [u < Y \leqslant v] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\big([Y \leqslant v]\big) - \mathbb{P}\big([Y \leqslant u]\big) = \mathbb{P}\big([u < Y \leqslant v]\big)$$

Profitons-en pour rappeler que pour tout événement $(A, B) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \setminus B) \ = \ \mathbb{P}\big(A \setminus A \cap B\big) \ = \ \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Afin de faciliter la résolution de cette question, on a préféré ici réordonner les termes de l'égalité de sorte à faire apparaître une somme entre probabilités d'événements. Une telle égalité est issue d'une réunion d'événements (le plus souvent incompatibles ou à tout le moins d'intersection négligeable) ce qui permet d'éviter d'avoir à gérer une différence ensembliste. Ce qui amène ici au raisonnement suivant :

$$[Y \leqslant u] \ \cup \ [u < Y \leqslant v] = [Y \leqslant v] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\big([Y \leqslant u]\big) + \mathbb{P}\big([u < Y \leqslant v]\big) = \mathbb{P}\big([Y \leqslant v]\big)$$

- Ainsi

$$[Y \leqslant v] \ = \ [Y \leqslant u] \ \cup \ [u < Y \leqslant v]$$

et

$$\begin{aligned} [X \leqslant Y] \ \cap \ [Y \leqslant v] \ &= \ [X \leqslant Y] \cap \Big([Y \leqslant u] \ \cup \ [u < Y \leqslant v]\Big) \\ &= \ [X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant u] \ \cup \ [X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v] \end{aligned}$$

enfin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \ \cap \ [Y \leqslant v]\big) \ &= \ \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant u] \ \cup \ [X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\big) \\ &= \ \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant u]\big) + \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\big) \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par incompatibilité des deux événements considérés. En effet :

$$[Y \leqslant u] \cap [u < Y \leqslant v] = \varnothing$$

et ainsi : $[X \leqslant Y] \cap [Y \leqslant u] \ \cap \ [X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v] = \varnothing$.

$$\boxed{\text{On a bien : } H(v) - H(u) = \mathbb{P}\big(\, [X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v] \,\big).}$$

- Remarquons alors :

$$[X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v] \ \subset \ [X \leqslant v] \cap [u < Y \leqslant v]$$

Démontrons cette inclusion.

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $\omega \in [X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]$.

On en déduit	$\omega \in [X \leqslant Y]$ et $\omega \in [u < Y \leqslant v]$.
Autrement dit	$X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ et $u < Y(\omega) \leqslant v$.
En particulier	$X(\omega) \leqslant Y(\omega) \leqslant v$, ce qui s'écrit : $\omega \in [X \leqslant v]$.
Finalement	$\omega \in [X \leqslant v] \cap [u < Y \leqslant v]$.

$$\boxed{[X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v] \ \subset \ [X \leqslant v] \cap [u < Y \leqslant v]}$$

En particulier, par croissance de l'application $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\big) \ \leqslant \ \mathbb{P}\big([X \leqslant v] \cap [u < Y \leqslant v]\big)$$

- On a alors :

$$\begin{aligned} H(v) - H(u) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]\big) \\ &\leqslant \mathbb{P}\big([X \leqslant v] \cap [u < Y \leqslant v]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant v]\big) \times \mathbb{P}\big([u < Y \leqslant v]\big) \quad \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ &= F_X(v) \times \big(F_Y(v) - F_Y(u)\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En divisant par } v-u>0 \text{, on obtient bien : } \dfrac{H(v)-H(u)}{v-u} \leqslant F_X(v)\ \dfrac{F_Y(v)-F_Y(u)}{v-u}.}$$

- On raisonne de même pour l'inégalité de gauche. On établit initialement l'égalité :

$$[X \leqslant u] \cap [u < Y \leqslant v] \ \subset \ [X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]$$

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons $\omega \in [X \leqslant u] \cap [u < Y \leqslant v]$.

On en déduit	$\omega \in [X \leqslant u]$ et $[u < Y \leqslant v]$.
Autrement dit	$X(\omega) \leqslant u$ et $u < Y(\omega) \leqslant v$.
En particulier	$X(\omega) \leqslant u < Y(\omega)$, ce qui démontre : $\omega \in [X \leqslant Y]$.
Finalement	$\omega \in [X \leqslant Y] \cap [u < Y \leqslant v]$.

On conclut alors, par un raisonnement similaire au précédent :

$$\boxed{F_X(u)\ \dfrac{F_Y(v)-F_Y(u)}{v-u} \ \leqslant \ \dfrac{H(v)-H(u)}{v-u}.}$$

Commentaire

- Cette question peut sembler difficile car elle demande de nouveau une prise d'initiative importante. En particulier, il peut paraître difficile de penser à établir les inclusions entre événements qui permettent d'obtenir le résultat final. Il est conseillé d'opérer par rétro-ingénierie : on part du résultat final pour essayer d'en déduire le résultat intermédiaire qui permettra de conclure. Pour ce faire, on commence généralement par opérer par équivalence afin de pouvoir écrire le résultat final sous une forme plus simple. Par exemple, ici, on pouvait procéder comme suit :

$$\begin{array}{cll}
& F_X(u)\,\dfrac{F_Y(v)-F_Y(u)}{v-u} \leqslant \dfrac{H(v)-H(u)}{v-u} & \\
\Leftrightarrow & F_X(u)\,\big(F_Y(v)-F_Y(u)\big) \leqslant H(v)-H(u) & \textit{(car } v-u>0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & \mathbb{P}\big([X\leqslant u]\big)\,\mathbb{P}\big([u<Y\leqslant v]\big) \leqslant H(v)-H(u) & \textit{(par définition de } F_X \textit{ et propriété du cours)} \\
\Leftrightarrow & \mathbb{P}\big([X\leqslant u]\big)\,\mathbb{P}\big([u<Y\leqslant v]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([X\leqslant Y]\cap[u<X\leqslant v]\big) & \\
\Leftrightarrow & \mathbb{P}\big([X\leqslant u]\cap[u<Y\leqslant v]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([X\leqslant Y]\cap[u<X\leqslant v]\big) & \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)}
\end{array}$$

  Une inégalité entre probabilité est généralement obtenue par une inclusion entre événements. Il doit donc être naturel de penser à établir une telle inclusion. Notons enfin que l'on perd ici l'équivalence : l'inclusion entre événements **suffit** à démontrer l'inégalité entre probabilités.
- Au passage, soulignons de nouveau l'importance du triptyque :

intersection / indépendance / produit

  Lorsque la propriété établit une égalité qui comporte un produit de probabilités, il est naturel de penser que ce produit est obtenu comme probabilité d'une intersection d'événements.
- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-question. Mais il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives. Ainsi, un sujet de type `TOP3` proposera un découpage en sous-questions bien moins détaillé qu'un sujet `TOP5`. Le même thème amène à un traitement différent lorsqu'il est abordé dans un sujet du `TOP3` ou du `TOP5`. En guise d'illustration, on peut noter que la propriété qu'il s'agit de démontrer dans cette **Partie I**, à savoir :

$$\mathbb{P}\big([X\leqslant Y]\big) = \int_0^{+\infty} F_X(t)\,f_Y(t)\,dt$$

  (sous les hypothèses de l'énoncé)

  est aussi utilisée (elle est admise) dans l'exercice 1 de l'énoncé `EML 2019`. □

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, H est dérivable en x et : $H'(x) = F_X(x)\,f_Y(x)$.

Démonstration.

- Les fonctions f_X et f_Y sont continues sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
  On en déduit que les fonctions F_X et F_Y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

En particulier, F_X et F_Y sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}_+$.

  On en déduit que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$: $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{F_Y(x)-F_Y(x_0)}{x-x_0} = F_Y'(x_0) = f_Y(x_0)$.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Rappelons tout d'abord, que d'après la question précédente, pour tout $x > x_0$:

$$F_X(x_0)\ \frac{F_Y(x) - F_Y(x_0)}{x - x_0} \ \leqslant\ \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} \ \leqslant\ F_X(x)\ \frac{F_Y(x) - F_Y(x_0)}{x - x_0}$$

(résultat de la question précédente avec $v = x$ et $u = x_0$)

On a :

× $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F_X(x_0) = F_X(x_0)$,

et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{F_Y(x) - F_Y(x_0)}{x - x_0} = F_Y'(x_0) = f_Y(x_0)$ car F_Y est dérivable en x_0.

× $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F_X(x) = F_X(x_0)$ car F_X est continue (à droite) en x_0,

et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{F_Y(x) - F_Y(x_0)}{x - x_0} = F_Y'(x_0) = f_Y(x_0)$ car F_Y est dérivable en x_0.

On en déduit, par théorème d'encadrement que la fonction H admet une limite à droite à droite en x_0, donnée par :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} \ =\ H_d'(x_0) \ =\ F_X(x_0)\ f_Y(x_0)$$

En utilisant de nouveau le résultat de la question précédente, on obtient, pour tout $x < x_0$:

$$F_X(x)\ \frac{F_Y(x_0) - F_Y(x)}{x_0 - x} \ \leqslant\ \frac{H(x_0) - H(x)}{x_0 - x} \ \leqslant\ F_X(x_0)\ \frac{F_Y(x_0) - F_Y(x)}{x_0 - x}$$

(résultat de la question précédente avec $v = x_0$ et $u = x$)

Ce qui s'écrit (en multipliant chaque quotient par $\frac{-1}{-1}$) :

$$F_X(x)\ \frac{F_Y(x) - F_Y(x_0)}{x - x_0} \ \leqslant\ \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} \ \leqslant\ F_X(x_0)\ \frac{F_Y(x) - F_Y(0)}{x - x_0}$$

On en déduit alors, en utilisant de nouveau par le théorème d'encadrement, que la fonction H admet une limite à gauche en x_0, donnée par :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} \ =\ H_g'(x_0) \ =\ F_X(x_0)\ f_Y(x_0)$$

- Finalement, la fonction H est dérivable à droite et à gauche en x_0. De plus :

$$H_g'(x_0) \ =\ F_X(x_0)\ f_Y(x_0) \ =\ H_d'(x_0)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x_0 \in \mathbb{R}_+, \text{ la fonction } H \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } H'(x_0) = F_X(x_0)\ f_Y(x_0).}$$ □

c) En conclure que pour tout x réel positif : $H(x) = \displaystyle\int_0^x F_X(t)\, f_Y(t)\ dt$.

Démonstration.
Dans les questions précédentes, on a établi que la fonction H :

× est dérivable sur $\mathbb{R}_+$,

× admet pour dérivée sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $h : t \mapsto F_X(t)\, f_Y(t)$,

× vérifie : $H(0) = 0$.

On en déduit que la fonction H est la primitive sur $\mathbb{R}_+$ et qui s'annule en 0 de la fonction h.

En conclusion, la fonction H est telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ H(x) = \int_0^x h(t)\ dt = \int_0^x F_X(t)\, f_Y(t)\ dt.$$

Commentaire

On est confronté ici à une question bilan qui consiste simplement à rappeler puis utiliser certains résultats précédents. Ces résultats étant fournis par l'énoncé, cette question peut être traitée même si les questions précédentes ne l'ont pas été. Il faut s'habituer à repérer ces questions qui permettent de prendre facilement des points.

□

3. Démontrer : $\mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,) = \displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\ dt$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X \leqslant Y]\big) &= \lim_{x \to +\infty} H(x) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x F_X(t)\, f_Y(t)\ dt && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)} \\ &= \int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\ dt \end{aligned}$$

Rappelons que l'on a démontré, en question ***1.***, que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x F_X(t)\, f_Y(t)\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$ ($= \mathbb{P}\big([X \leqslant Y]\big)$). Cela signifie, par définition, que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\ dt$ est convergente. Cela justifie la dernière égalité.

$$\boxed{\mathbb{P}(\,[X \leqslant Y]\,) = \int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\ dt}$$

Commentaire

- Il s'agit là encore d'une question bilan qui ne présente pas de difficulté particulière. Cela démontre au passage qu'il n'y a pas forcément de progression croissante de la difficulté des questions dans les énoncés des épreuves de concours. En conséquence, même si on ne parvient pas à traiter plusieurs questions d'affilée, il ne faut pas pour autant passer toute la **Partie I**. Il faut au contraire s'atteler à essayer de traiter les questions qui suivent, ce qui permettra à terme de tomber sur une question dont la résolution est plus simple.

Commentaire

- Dans l'épreuve `EML 2019`, on admet l'écriture :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant Y]\big) = \int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\, dt$$

Il est par contre demandé de justifier la convergence de cette intégrale à l'aide d'un théorème de comparaison. Rappelons cette démonstration :

× $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_X(t)\, f_Y(t) \leqslant f_Y(t)$

En effet, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant F_X(t) \leqslant 1$ et l'inégalité souhaitée est alors obtenue par multiplication par $f_Y(t) \geqslant 0$.

× l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_Y(t)\, dt$ est convergente (et vaut 1) en tant que moment d'ordre 0 de la v.a.r. Y. En effet, comme Y est à valeurs positives, f_Y est nulle en dehors de $[0, +\infty[$ et :

$$\mathbb{E}(Y^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f_Y(t)\, dt$$

Ainsi, par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\, dt$ est convergente.

- On pouvait aussi opérer à l'aide d'un équivalent. En effet, comme : $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$, on a :

$$F_X(t)\, f_Y(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} f_Y(t)$$

□

4. En utilisant la fonction $K : x \mapsto \mathbb{P}([X < Y] \cap [Y \leqslant x])$, on montrerait de même et nous l'admettrons :

$$\mathbb{P}([X < Y]) = \int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_Y(t)\, dt = \mathbb{P}([X \leqslant Y])$$

Que peut-on en déduire pour $\mathbb{P}([X = Y])$?

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$[X \leqslant Y] = [X < Y] \cup [X = Y]$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X \leqslant Y]\big) &= \mathbb{P}\big([X < Y] \cup [X = Y]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([X < Y]\big) + \mathbb{P}\big([X = Y]\big) \quad \textit{(car les événements } [X<Y] \textit{ et } [X=Y] \textit{ sont incompatibles)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([X = Y]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant Y]\big) - \mathbb{P}\big([X < Y]\big) = 0.}$$

□

5. *Application aux lois exponentielles*

On suppose que U et V sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ, réels strictement positifs.

Soit θ un réel positif ou nul.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = U - \theta$.

Démonstration.

- Notons $h_\theta : x \mapsto x - \theta$ de sorte que $X = h_\theta(U)$.
  Comme $U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on **considère** $X(\Omega) = [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \big(h_\theta(U)\big)(\Omega) \\ &= h_\theta\big(U(\Omega)\big) \\ &= h_\theta\big([0,+\infty[\big) \\ &= [h_\theta(0), \lim_{x\to+\infty} h_\theta(x)[&& \textit{(car la fonction } h_\theta \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,+\infty[) \\ &= [-\theta, +\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } X(\Omega) = [-\theta, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x < -\theta$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) = [-\theta, +\infty[$. Donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}\big(\,[X \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x \geqslant -\theta$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\big(\,[X \leqslant x]\,\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\,[U - \theta \leqslant x]\,\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\,[U \leqslant x + \theta]\,\big) \\ &= 1 - \exp\big(-\lambda\,(x+\theta)\big) && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } x+\theta \geqslant 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient finalement : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\theta \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,x} & \text{si } x \geqslant -\theta \end{cases}.}$$

Commentaire

- Cette question consiste à déterminer la loi de Y, transformée de la v.a.r. X. Ce type de question est extrêmement fréquent dans les sujets traitant de v.a.r. à densité. La résolution de ce type de question ne présente aucune difficulté majeure. Il s'agit simplement de se référer à la rédaction usuelle.
- En particulier, il faut savoir déterminer la loi d'une transformée affine, du carré et de la partie entière d'une v.a.r. à densité X. Cela fait partie du bagage culturel mathématique nécessaire avant d'affronter les écrits de concours.
- Il faut ajouter à ce bagage la détermination de la loi du minimum et du maximum de v.a.r. à densité indépendantes. Il suffit une nouvelle fois de mettre en place la rédaction usuelle associée à ce type de questions.

Commentaire

- Profitons-en pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$
Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq \,]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  × l'ensemble des valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on se permet d'écrire :

  « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0, 1]$. »

  × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
  On se permet alors d'écrire :

  « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient par une disjonction de cas).

□

b) En déduire que pour tout $\theta \geqslant 0$:
$$\mathbb{P}(\,[U - \theta \leqslant V]\,) \;=\; 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que la v.a.r. $X = U - \theta$ est une v.a.r. à densité en tant que transformée affine d'une v.a.r. à densité.
- Ainsi, on a :
  × les v.a.r. X et V sont à densité.
  × les v.a.r. $X = U - \theta$ et V sont indépendantes d'après le lemme des coalitions et car U et V le sont.

× comme $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, on peut considérer $V(\Omega) = [0, +\infty[$.
Autrement dit, on considère que la v.a.r. V est à valeurs positives.

× une densité f_V de la v.a.r. V est donnée par :

$$f_V : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu\, \mathrm{e}^{-\mu\, t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Et ainsi : $f_V|_{[0,+\infty[} : t \mapsto \mu\, \mathrm{e}^{-\mu\, t}$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

On est dans le cadre d'application du résultat démontré en question ***4***.

Commentaire

- Comme précisé dans la question précédente, on se permet de considérer $V(\Omega) = [0, +\infty[$. En réalité, pour toute v.a.r. qui suit une loi exponentielle, cette propriété n'est vérifiée que presque sûrement (avec probabilité 1). Autrement dit, on a toujours, sans hypothèse supplémentaire : $\mathbb{P}\big([V \geqslant 0]\big) = 1$. Il est à noter que c'est l'énoncé qui nous amène à considérer $V(\Omega) = [0, +\infty[$. En effet, cette hypothèse est nécessaire pour se placer dans le cadre d'application du résultat démontré en question ***4***. Il aurait donc été préférable que l'énoncé précise que V est une v.a.r. à valeurs positives, en début de question ***5***.
- Comme signalé au-dessus, il est primordial de savoir déterminer la transformée affine d'une v.a.r. à densité. Ici, on ne demande pas explicitement d'obtenir une densité de la v.a.r. X. On utilise ici le résultat du cours qui affime que la transformée affine d'une v.a.r. à densité est une v.a.r. à densité. On peut aussi démontrer que X est une v.a.r. à densité en établissant que F_X est :
  × continue sur $\mathbb{R}$,
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([U - \theta \leqslant V]\big) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant V]\big) \\
&= \int_0^{+\infty} F_X(t)\, f_V(t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\big)\, \mu\, \mathrm{e}^{-\mu\, t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mu\, \mathrm{e}^{-\mu\, t}\, dt - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}\, \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\, \mu\, \mathrm{e}^{-\mu\, t}\, dt && \textit{(par linéarité de l'intégration, les intégrales en présence étant convergentes)} \\
&= \mathbb{E}\big(V^0\big) - \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}\, \mu \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\, \mathrm{e}^{-\mu\, t}\, dt \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}\, \mu\, \frac{1}{\lambda + \mu} \int_0^{+\infty} (\lambda + \mu)\, \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)\, t}\, dt \\
&= 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}\, \mathbb{E}\big(W^0\big) && \textit{(où } W \textit{ est une v.a.r. de loi } \mathcal{E}(\lambda + \mu)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient bien : } \mathbb{P}\big([U - \theta \leqslant V]\big) = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\, \mathrm{e}^{-\lambda\,\theta}.}$$

□

Inégalité de Boole

6. On considère $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé.

a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n)$: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{1} B_k\right) = \mathbb{P}(B_1)$.
- D'autre part : $\sum\limits_{k=1}^{1} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$

On a bien : $\mathbb{P}(B_1) \leqslant \mathbb{P}(B_1)$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\textit{i.e.} : \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_k)\right)$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} B_k\right) & = & \mathbb{P}\left(\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1}\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k\right) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k\right) \cap B_{n+1}\right) & \textit{(d'après la formule du crible)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_k) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k\right) \cap B_{n+1}\right) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
& \leqslant & \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(B_k) + \mathbb{P}(B_{n+1}) &
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k).}$$

□

b) On suppose que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(B_k)$ converge. Démontrer :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$$

Démonstration.

- Tout d'abord, par le théorème de la limite monotone : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{N} B_k\right)$.
- Comme la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(B_k)$ est supposée convergente, on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente :

$$\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{N} B_k\right) \leqslant \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}(B_k) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)}$$

□

Partie II - Une compétition entre deux groupes

Dans toute la suite du sujet, on désigne par p un réel de l'intervalle $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On modélise une compétition entre deux groupes d'individus A et B avec les règles suivantes.

- Le groupe A doit résoudre une suite de problèmes $(P_k)_{k\geqslant 1}$ dans l'ordre des indices. Au temps $t = 0$, le groupe commence la résolution du problème P_1, ce qui lui prend un temps représenté par la variable aléatoire X_1. Une fois P_1 résolu, le groupe aborde immédiatement le problème P_2, et on note X_2 le temps consacré à la résolution de P_2 par le groupe A, et ainsi de suite.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire donnant le temps consacré à la résolution du problème P_k par le groupe A.
- De même, le groupe B doit résoudre dans l'ordre une suite de problèmes $(Q_k)_{k\geqslant 1}$; la résolution du premier problème Q_1 commence au temps $t = 0$ et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire donnant le temps consacré par le groupe B à la résolution du problème Q_k.
- À ce jeu est associé un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies les suites de variables aléatoires $(X_k)_{k\geqslant 1}$ et $(Y_k)_{k\geqslant 1}$, et on fait les hypothèses suivantes :
  - × pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi exponentielle de paramètre p, notée $\mathcal{E}(p)$, et Y_k suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(q)$;
  - × pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k$ sont indépendantes.
- On établit alors la liste de tous les problèmes résolus *dans l'ordre où ils le sont par les deux groupes*. En cas de simultanéité temporelle de la résolution par les deux groupes d'un de leurs problèmes, on placera d'abord le problème résolu par A dans la liste puis celui résolu par B.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire de Bernoulli associée à l'événement « le $n^{\text{ème}}$ problème placé dans la liste est un problème résolu par le groupe A ».
  Par exemple, si la liste des cinq premiers problèmes résolus est $(P_1, P_2, Q_1, P_3, Q_2)$, alors $U_1 = 1$, $U_2 = 1$, $U_3 = 0$, $U_4 = 1$ et $U_5 = 0$.
- Pour tout $n \geqslant 0$, on note aussi S_n la variable aléatoire donnant le nombre de problèmes qui ont été résolus par A présents dans la liste des n premiers problèmes résolus. En particulier, S_0 vaut toujours 0.

7. ***a)*** Que représente la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$?

b) On suppose que $X_1 = 5$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 2$, $Y_1 = 2$, $Y_2 = 2$, $Y_3 = 4$ et $Y_4 = 2$.
Déterminer U_1, …, U_7.
Peut-on aussi en déduire la valeur de U_8 ?

c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il simule le jeu et, pour n, p donnés, affiche la liste des valeurs U_1, U_2, …, U_n :

```
p = float(input('p = '))
n = int(input('n = '))
q = 1 - p
U = np.zeros(n)
sommeX = rd.exponential(1/p)
sommeY = rd.exponential(1/q)
mini = min(sommeX, sommeY)
for k in range(n):
    if sommeX == ...:
        U[k] = ...
        sommeX = sommeX + rd.exponential(1/p)
    else:
        sommeY = ...
    mini = min(sommeX, sommeY)
...
```

Démonstration.
On propose le script suivant :

```
p = float(input('p = '))
n = int(input('n = '))
q = 1 - p
U = np.zeros(n)
sommeX = rd.exponential(1/p)
sommeY = rd.exponential(1/q)
mini = min(sommeX, sommeY)
for k in range(n):
    if sommeX == mini:
        U[k] = 1
        sommeX = sommeX + rd.exponential(1/p)
    else:
        sommeY = sommeY + rd.exponential(1/q)
    mini = min(sommeX, sommeY)
print(U)
```

□

d) Quelle(s) instruction(s) faut-il ajouter pour afficher la valeur de S_n ?

8. *Loi de U_n*
Dans cette question, on démontre par récurrence sur $n \geqslant 1$: $\mathbb{P}(\,[U_n = 1]\,) = p$.

a) Démontrer : $\mathbb{P}(\,[U_1 = 1]\,) = \mathbb{P}(\,[X_1 \leqslant Y_1]\,) = p$.

b) ***(i)*** Démontrer, pour tout réel $x < 0$: $\mathbb{P}_{[U_1=1]}(\,[Y_1 - X_1 \leqslant x]\,) = 0$.

(ii) Soit x un réel positif ou nul.
Établir : $\mathbb{P}_{[U_1=1]}(\,[Y_1 - X_1 \leqslant x]\,) = \dfrac{1}{p}\ \mathbb{P}(\,[X_1 \leqslant Y_1 \leqslant X_1 + x]\,)$,
puis calculer $\mathbb{P}_{[U_1=1]}(\,[Y_1 - X_1 \leqslant x]\,)$.

c) On peut interpréter ce résultat en disant que la *loi conditionnelle de* $Y_1 - X_1$ *sachant* $[U_1 = 1]$ est une loi exponentielle. Quelle est son paramètre ?
Par analogie, quelle est la loi conditionnelle de $X_1 - Y_1$ sachant $[U_1 = 0]$? (on n'attend pas une démonstration précise mais un argument de bon sens pour justifier le résultat proposé).

d) On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(\,[U_n = 1]\,) = p$.
Déduire de cette hypothèse et de la question précédente :

$$\mathbb{P}_{[U_1=1]}(\,[U_{n+1} = 1]\,) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[U_1=0]}(\,[U_{n+1} = 1]\,) = \ p$$

e) Conclure.

9. On montrerait aussi par récurrence, et nous l'admettrons, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ sont mutuellement indépendantes.
En déduire la loi de S_n.

Démonstration.
On remarque que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$. De plus :

- les variables aléatoires U_k sont indépendantes
- pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de stabilité des lois binomiales : } S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

□

Soit $r \in \mathbb{N}$, on s'intéresse, dans les questions qui suivent, à la probabilité a_r de l'événement :

A_r : « il existe un $n \geqslant r$ tel que, lorsque n problèmes en tout ont été résolus, le groupe A en a résolu r de plus que le groupe B »

10. ***a)*** Justifier : $a_0 = 1$.

b) Démontrer, pour tout $r \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}_{[U_1=1]}(A_r) = \mathbb{P}(A_{r-1}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[U_1=0]}(A_r) = \mathbb{P}(A_{r+1})$$

c) En déduire, pour tout $r \geqslant 1$: $a_{r+1} = \dfrac{1}{q}\, a_r - \dfrac{p}{q}\, a_{r-1}$.

d) En remarquant que $1 - 4pq = (1-2p)^2$, donner une expression de a_r en fonction de p, q, r et de deux constantes que l'on introduira.

11. Le cas $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Montrer que, dans les cas $p = \dfrac{1}{2}$ et $p > \dfrac{1}{2}$, la suite $(a_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est constante et égale à 1.

12. Le cas $p < \dfrac{1}{2}$.

a) Soit k un entier naturel.

(i) Établir : $A_{2k} = \displaystyle\bigcup_{i \geqslant k} [S_{2i} = i + k]$.

(ii) Montrer que pour tout $i \geqslant k$, on a : $\mathbb{P}(\,[S_{2i} = i+k]\,) = \dbinom{2i}{i+k} p^{i+k}\, q^{i-k}$.

(iii) Après avoir donné la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j}$, démontrer :

$$\forall i \geqslant k, \ \binom{2i}{i+k} \leqslant 4^i$$

(iv) En déduire l'inégalité :

$$\sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\,[S_{2i} = k+i]\,) \ \leqslant \ \left(\frac{p}{q}\right)^k \ \frac{(4pq)^k}{1-4pq}$$

b) Montrer en utilisant l'inégalité de Boole (voir question ***6.***) que si $p < \dfrac{1}{2}$, alors : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = 0$.

c) Conclure en utilisant la question ***10.d)***, que si $p < \dfrac{1}{2}$, alors :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \ a_r = \left(\frac{p}{q}\right)^r$$

On a ainsi établi dans les questions ***11.*** et ***12.*** :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad a_r = \begin{cases} \left(\dfrac{p}{q}\right)^r & \text{si } p < \dfrac{1}{2} \\[2ex] 1 & \text{si } p \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ce résultat pourra être admis et utilisé dans la suite du sujet.

Partie III - La *blockchain* et la stratégie de la *double dépense*

On utilise, dans cette partie, les notations et résultats de la partie **II**.
Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
La *blockchain* est formée d'une suite de blocs, chacun associé à plusieurs transactions. Elle contient l'historique de toutes les transactions effectuées depuis la création du *bitcoin*.
Avant d'être placé dans la *blockchain*, un nouveau bloc doit être validé. Cette validation nécessite la mise en oeuvre d'une grande puissance de calcul pour résoudre un problème dépendant fortement du contenu du bloc et des blocs qui le précèdent.
Les individus qui valident les blocs sont appelés mineurs.
Il est possible qu'à un instant donné, coexistent sur le réseau deux *blockchains*, valides et différentes. Dans ce cas, le réseau choisira celle qui comporte le plus de blocs et l'autre sera abandonnée.
Par prudence, lorsqu'un bloc est validé, il est recommandé d'attendre que $n-1$ blocs le suivant soient aussi validés pour considérer que les transactions incluses dans le bloc soient honnêtes.
Un groupe de mineurs mal intentionnés, noté A, peut essayer de dépenser deux fois les mêmes *bitcoins* en procédant ainsi :

- le groupe A demande la validation de l'achat d'un bien d'un montant de s *bitcoins* qu'il a en sa possession.
- lorsque le bloc K incluant cette transaction est proposé à la validation sur le réseau, A modifie ce bloc en K', qu'il ne diffuse pas, en remplaçant l'achat par une vente des s *bitcoins* en euros à son profit par exemple. Il se met alors à la validation de ce nouveau bloc et crée ainsi une deuxième instance de la *blockchain* qu'il continue à développer sans la diffuser.
- lorsque le groupe B, représentant l'ensemble des autres mineurs du réseau, a validé K ainsi que les $n-1$ blocs suivants, le vendeur du bien considère que la transaction est valide et fournit le bien.
- le groupe A attend alors d'avoir une *blockchain* plus longue que celle de B, qui est publique, pour la diffuser donc invalider la *blockchain* publique et l'achat du bien. Le crédit en *bitcoins* du vendeur du bien est alors annulé.

On reprend et on complète la modélisation de la partie précédente pour déterminer la probabilité que la stratégie de la *double dépense* réussisse et le choix de n pour que cette probabilité soit faible.
Une première phase du jeu, décrit dans la partie **II**, s'achève à l'instant aléatoire t où le problème Q_n est ajouté à la liste des problèmes résolus.
Le groupe de mineurs A est ensuite déclaré vainqueur s'il se trouve un instant $t' \geqslant t$ où le nombre de problèmes résolus par A dans la liste des problèmes résolus depuis le début du jeu, est strictement supérieur au nombre de ceux résolus par B dans cette même liste. On note G_n cet événement.
On détermine, dans cette partie, la probabilité de G_n en fonction de n et de p.

13. On s'intéresse tout d'abord à la loi de la variable aléatoire T_n égale au nombre de problèmes résolus par le groupe A lorsque l'on place Q_n dans la liste des problèmes résolus.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $[T_n = k] = [S_{n+k-1} = k] \cap [U_{n+k} = 0]$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{aligned} & \omega \in [S_{n+k-1} = k] \quad \cap \quad [U_{n+k} = 0] \\ \Leftrightarrow \quad & \omega \in [S_{n+k-1} = k] \quad \texttt{ET} \quad \omega \in [U_{n+k} = 0] \\ \Leftrightarrow \quad & S_{n+k-1}(\omega) = k \quad \texttt{ET} \quad U_{n+k}(\omega) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\omega \in [S_{n+k-1} = k] \cap [U_{n+k} = 0]$$

$\Leftrightarrow$ dans les $n+k-1$ premiers problèmes résolus, k l'ont été par le groupe A
et
le $(n+k)^{\text{ème}}$ problème a été résolu par le groupe B

$\Leftrightarrow$ sur les $n+k-1$ premiers problèmes, k ont été résolus par le groupe A, et $n-1$ l'ont été par le groupe B
et
le dernier problème (le $(n+k)^{\text{ème}}$) est résolu par le groupe B (c'est donc le $n^{\text{ème}}$ problème résolu par B, c'est-à-dire Q_n)

$\Leftrightarrow$ sur les $n+k-1$ premiers problèmes, k ont été résolus par le groupe A
et
Q_n est le $(n+k)^{\text{ème}}$ problème résolu

$\Leftrightarrow$ lorsque Q_n est résolu par le groupe B, k problèmes ont été résolus par le groupe A

$\Leftrightarrow$ $T_n(\omega) = k$

$\Leftrightarrow$ $\omega \in [T_n = k]$

$$\boxed{\text{On en déduit : } [T_n = k] = [S_{n+k-1} = k] \cap [U_{n+k} = 0].}$$

$\square$

b) En déduire : $\mathbb{P}(\,[T_n = k]\,) = \dbinom{n+k-1}{k} p^k\, q^n$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([T_n = k]) \;=\; \mathbb{P}([S_{n+k-1} = k] \cap [U_{n+k} = 0])$$

- Or, d'après la question ***9.*** : $S_{n+k-1} = \sum\limits_{i=1}^{n+k-1} U_i$.
  Ainsi, par lemme des coalitions, les v.a.r. S_{n+k-1} et U_{n+k} sont indépendantes.
- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_n = k]) & = & \mathbb{P}([S_{n+k-1} = k]) \times \mathbb{P}([U_{n+k} = 0]) & \\ & = & \dbinom{n+k-1}{k} p^k\, q^{(n+\cancel{k}-1)-\cancel{k}} \times q & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{8.}} \textit{ et } \textbf{\textit{9.}}\textit{)} \\ & = & \dbinom{n+k-1}{k} p^k\, q^n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\,[T_n = k]\,) = \dbinom{n+k-1}{k} p^k\, q^n}$$

$\square$

14. a) En utilisant la formule des probabilités totales, établir :

$$\mathbb{P}(G_n) \; = \; \mathbb{P}(\,[T_n \geqslant n+1]\,) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\,[T_n = k]\,)\, a_{n+1-k}$$

Démonstration.

- Le famille $\big(\, [T_n = k] \,\big)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([T_n = k] \cap G_n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([T_n = k])\, \mathbb{P}_{[T_n=k]}(G_n) \quad \textit{(car : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T_n = k]) = 0\textit{)} \end{aligned}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
  Si l'événement $[T_n = k]$ est réalisé, c'est que, lorsque Q_n est résolu par le groupe B, le groupe A a déjà résolu k problèmes. Deux cas se présentent alors :
  × si $k \in [\![0, n]\!]$, alors l'événement G_n est réalisé si et seulement s'il existe un instant $t' \geqslant t$ où le nombre de problèmes résolus par le groupe A est strictement supérieur au nombre de problèmes résolus par le groupe B
  (on rappelle que t est l'instant où le problème Q_n est résolu par le groupe B)

  Comme l'événement $[T_n = k]$ est réalisé, à l'instant t :
  - le groupe A a résolu k problèmes ($k \in [\![0, n]\!]$)
  - le groupe B a résolu n problèmes.

  Le groupe A a donc $n-k$ problèmes de retard sur le groupe B. L'événement G_n est donc réalisé si et seulement s'il existe $t' \geqslant t$ où le groupe A a résolu $n-k+1$ problèmes de plus que le groupe B, c'est-à-dire si et seulement si l'événement A_{n-k+1} est réalisé.

  $\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[T_n=k]}(G_n) \; = \; \mathbb{P}(A_{n-k+1}) \; = \; a_{n-k+1}.}$

  × si $k \in [\![n+1, +\infty[\![$, alors l'événement G_n est toujours réalisé. En effet, à l'instant T où le problème Q_n est résolu par le groupe B :
  - le groupe A a résolu k problèmes ($k > n$)
  - le groupe B a résolu n problèmes.

  $\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[T_n=k]}(G_n) = 1.}$

- On en conclut :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k])\, \mathbb{P}_{[T_n=k]}(G_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_n = k])\, \mathbb{P}_{[T_n=k]}(G_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k])\, a_{n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_n = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k])\, a_{n+1-k} + \mathbb{P}([T_n \geqslant n+1]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(G_n) \; = \; \mathbb{P}(\,[T_n \geqslant n+1]\,) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\,[T_n = k]\,)\, a_{n+1-k}.}$$

□

b) Dans le cas où $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, en déduire : $\mathbb{P}(G_n) = 1$.

Démonstration.
Supposons : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $n - k + 1 \in \mathbb{N}$, d'après le résultat établi en fin de **Partie II** :

$$a_{n+1-k} \ = \ 1$$

Commentaire

- Citer les hypothèses d'un théorème avant son utilisation est **indispensable**. Lorsque ce théorème n'est pas un résultat du cours mais un résultat démontré dans un sujet de concours, ce réflexe doit perdurer.
- On utilise par exemple dans cette question un résultat démontré dans la partie précédente. On n'omettra donc en aucun cas de vérifier que l'on est placé dans le bon cadre d'application de cette propriété (ici $r = n + 1 - k \in \mathbb{N}$).

- On obtient, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) \times 1 + \mathbb{P}([T_n \geqslant n+1]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_n = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([T_n = k]) \\
&= 1 && \textit{(car } \big([T_n = k] \big)_{k \in \mathbb{N}} \textit{ forme un système complet d'événements)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(G_n) = 1}$$

□

c) De même lorsque $p < \dfrac{1}{2}$, démontrer :

$$\mathbb{P}(G_n) \ = \ 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} \left(p^k\, q^n - p^{n+1}\, q^{k-1} \right)$$

Démonstration.
Supposons : $p < \dfrac{1}{2}$.

- Tout d'abord, d'après la question ***14.a)*** :

$$\mathbb{P}(G_n) \ = \ \mathbb{P}([T_n \geqslant n+1]) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k])\, a_{n+1-k}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n \geqslant n+1]) &= 1 - \mathbb{P}([T_n < n]) \\
&= 1 - \mathbb{P}([T_n \leqslant n]) && \textit{(car } T_n \textit{ est à valeurs entières)} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k])
\end{aligned}$$

- On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(G_n) & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) + \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k])\, a_{n+1-k} \\ & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k])\, (1 - a_{n+1-k}) \\ & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([T_n = k]) \left(1 - \left(\dfrac{p}{q}\right)^{n+1-k}\right) \qquad \text{\textit{(d'après le résultat de fin de} \textbf{Partie II}, \textit{car} } n+1-k \in \mathbb{N}) \\ & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} p^k\, q^n \left(1 - \dfrac{p^{n+1-k}}{q^{n+1-k}}\right) \qquad \text{\textit{(d'après} \textbf{13.b)}\textit{)}} \\ & = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} \left(p^k\, q^n - \dfrac{p^{n+1}}{q^{1-k}}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(G_n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} \left(p^k\, q^n - p^{n+1}\, q^{k-1}\right).}$$

□

15. *Une meilleure expression de* $\mathbb{P}(G_n)$ *lorsque* $p < \dfrac{1}{2}$

Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n(x) \ = \ (1-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(G_n) = 1 - u_n(p) + \dfrac{p}{q}\, u_n(q)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rl} & 1 - u_n(p) + \dfrac{p}{q}\, u_n(q) \\ = & 1 - (1-p)^n \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} p^k + \dfrac{p}{q}\, (1-q)^n \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} q^k \\ = & 1 - q^n \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} p^k + \dfrac{p}{q}\, p^n \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} q^k \\ = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} p^k\, q^n + \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} p^{n+1}\, q^{k-1} \\ = & 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n+k-1}{k} \left(p^k\, q^n - p^{n+1}\, q^{k-1}\right) \\ = & \mathbb{P}(G_n) \qquad \text{\textit{d'après} \textbf{14.c)}} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(G_n) = 1 - u_n(p) + \frac{p}{q}\, u_n(q)}$$

□

b) Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, établir la relation :

$$u_{n+1}(x) \ = \ u_n(x) + (1-x)^n \, x^{n+1} \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} \, x \right)$$

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& u_{n+1}(x) \\
= \ & (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{(n+\cancel{1}) + k - \cancel{1}}{k} \, x^k \\
= \ & (1-x)\,(1-x)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} \, x^k \\
= \ & (1-x)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} \, x^k - x\,(1-x)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} \, x^k \\
= \ & (1-x)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} \, x^k - x\,(1-x)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \, x^k + \binom{2n+1}{n+1} \, x^{n+1} \right) \\
= \ & (1-x)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} \, x^k - x\,(1-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \, x^k - x^{n+1}\,(1-x)^n \binom{2n+1}{n+1} \, x \quad (*)
\end{aligned}$$

- Simplifions légèrement le $2^{\text{ème}}$ terme de la somme $(*)$ ci-dessus.

$$\begin{aligned}
x\,(1-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \, x^k \ &= \ (1-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \, x^{k+1} \\
&= \ (1-x)^n \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k-1}{k-1} \, x^k \quad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

- Rassemblons maintenant les 2 premiers termes de $(*)$.

$$\begin{aligned}
& (1-x)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} \, x^k - (1-x)^n \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k-1}{k-1} \, x^k \\
= \ & (1-x)^n \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} \, x^k - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k-1}{k-1} \, x^k \right) \\
= \ & (1-x)^n \left(\binom{n}{0} \, x^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k} \, x^k - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k-1}{k-1} \, x^k \right) \\
= \ & (1-x)^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1} \right) x^k \right) \\
= \ & (1-x)^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k-1}{k} \, x^k \right) \quad \textit{(par triangle de Pascal)} \\
= \ & (1-x)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k-1}{k} \, x^k
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$
\begin{aligned}
& u_{n+1}(x) \\
= \ & (1-x)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k-1}{k} \ x^k - x^{n+1} \, (1-x)^n \ \binom{2n+1}{n+1} \ x \\
= \ & (1-x)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} \ x^k + \binom{2n}{n+1} \ x^{n+1} \right) - x^{n+1} \, (1-x)^n \ \binom{2n+1}{n+1} \ x \\
= \ & (1-x)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} \ x^k + x^{n+1} \, (1-x)' \ \binom{2n}{n+1} - x^{n+1} \, (1-x)^n \ \binom{2n+1}{n+1} \ x \\
= \ & u_n(x) + x^{n+1} \, (1-x)^n \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} \ x \right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1}(x) = u_n(x) + x^{n+1} \, (1-x)^n \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} \ x \right)}$$ □

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(G_{n+1}) \ = \ \mathbb{P}(G_n) - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \ (pq)^{n+1} \ \binom{2n+1}{n+1}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(G_{n+1}) \\
= \ & 1 - u_{n+1}(p) + \frac{p}{q} \ u_{n+1}(q) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{15.a)}}\textit{)} \\
= \ & 1 - \left(u_n(p) + p^{n+1} \, q^n \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} \ p \right) \right) + \frac{p}{q} \left(u_n(q) + q^{n+1} \, p^n \left(\binom{2n}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} \ q \right) \right) \\
& & \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \left(1 - u_n(p) + \frac{p}{q} \ u_n(q) \right) - p^{n+1} \, q^n \left(\cancel{\binom{2n}{n+1}} - \binom{2n+1}{n+1} \ p \right) + p^{n+1} \, q^n \left(\cancel{\binom{2n}{n+1}} - \binom{2n+1}{n+1} \ q \right) \\
= \ & \mathbb{P}(G_n) - p^{n+1} \, q^n \ \binom{2n+1}{n+1} (q-p) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{15.a)}}\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}(G_n) - p^{n+1} \, q^{n+1} \ \frac{1}{q} \ \binom{2n+1}{n+1} (q-p) \\
= \ & \mathbb{P}(G_n) - (p\,q)^{n+1} \ \binom{2n+1}{n+1} \left(1 - \frac{p}{q} \right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(G_{n+1}) \ = \ \mathbb{P}(G_n) - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \ (pq)^{n+1} \ \binom{2n+1}{n+1}}$$ □

d) Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(G_n) \;=\; \frac{p}{q} - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \mathbb{P}(G_n) \;=\; \frac{p}{q} - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part, d'après ***14.c)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_1) &= 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{\cancel{1} + k - \cancel{1}}{k} \left(p^k\, q - p^2\, q^{k-1}\right) \\
&= 1 - \left(\left(p^0\, q - \frac{p^2}{q}\right) + \left(p\, q - p^2\, q^0\right) \right) \\
&= (1-q) + \frac{p^2}{q} - p\, q + p^2 \\
&= p + \frac{p^2}{q} - p\, q + p^2
\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \sum_{k=1}^{1} \binom{2k-1}{k} (p\, q)^k &= \frac{p}{q} - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \binom{1}{1} (p\, q)^1 \\
&= \frac{p}{q} - p\, q \left(1 - \frac{p}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q} - p\, q + p^2
\end{aligned}$$

- Vérifions alors : $p + \frac{p^2}{q} - p\, q + p^2 = \frac{p}{q} - p\, q + p^2$.

$$\begin{aligned}
p + \frac{p^2}{q} - \cancel{p\, q} + \cancel{p^2} - \left(\frac{p}{q} - \cancel{p\, q} + \cancel{p^2}\right) &= p + \frac{p^2}{q} - \frac{p}{q} \\
&= p \left(1 + \frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right) \\
&= p\, \frac{q + p - 1}{q} \\
&= p\, \frac{1-1}{q} \;=\; 0 \qquad \textit{(car } p + q = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

On a ainsi bien démontré :

$$\mathbb{P}(G_1) \;=\; \frac{p}{q} - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \sum_{k=1}^{1} \binom{2k-1}{k} (p\, q)^k$$

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}(G_{n+1}) = \dfrac{p}{q} - \left(1 - \dfrac{p}{q}\right) \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$).

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}(G_{n+1}) & \\ = & \mathbb{P}(G_n) - \left(1 - \dfrac{p}{q}\right) (p\,q)^{n+1} \dbinom{2n+1}{n+1} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{15.c)}}\textit{)} \\ = & \left(\dfrac{p}{q} - \left(1 - \dfrac{p}{q}\right) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (p\,q)^k\right) - \left(1 - \dfrac{p}{q}\right) (p\,q)^{n+1} \dbinom{2n+1}{n+1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ = & \dfrac{p}{q} - \left(1 - \dfrac{p}{q}\right) \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (p\,q)^k + \binom{2n+1}{n+1} (p\,q)^{n+1}\right) & \\ = & \dfrac{p}{q} - \left(1 - \dfrac{p}{q}\right) \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{2k-1}{k} (pq)^k & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(G_n) = \dfrac{p}{q} - \left(1 - \dfrac{p}{q}\right) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k.}$$

□

16. *Application à la sécurisation des transactions*
Connaissant $p < \dfrac{1}{2}$, on cherche à limiter le risque que la stratégie mise en place par le groupe de mineurs A réussisse.

a) Après avoir établi la formule $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k} \dbinom{n-1}{k-1}$ lorsque $k \in [\![1, n]\!]$, écrire une fonction **Python** qui calcule les coefficients binomiaux.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- Tout d'abord :

$$k \binom{n}{k} = k \, \frac{n!}{k! \, (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \, (n-k)!}$$

- Par ailleurs :

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \, \frac{(n-1)!}{(k-1)! \, ((n-\cancel{1}) - (k-\cancel{1}))!} = \frac{n!}{(k-1)! \, (n-k)!}$$

Ainsi : $k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient n individus)
On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant un élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure un représentant de ces individus).*
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{n}{k}$ possibilités.
On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
(on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $k\ \binom{n}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.
On choisit ensuite $k-1$ éléments dans E qui, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
(on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $k-1$ individus)
Ainsi, il y a $n\ \binom{n-1}{k-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat.

- En itérant la formule précédente, on obtient :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\,\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2} = \cdots = \frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)}{k\,(k-1)\,\cdots\,1}$$

(cette formule se démontre rigoureusement par récurrence)

- On propose alors la fonction **Python** suivante.

```
1 def coeffBin(k, n):
2     c = 1
3     for i in range(1, k+1):
4         c = c * (n-i+1) / i
5     return c
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  × cette fonction se nomme `coeffBin`,
  × elle prend en paramètre les variables `k` et `n`.

```
1 def coeffBin(k, n):
```

  On initialise ensuite la variable `c` à 1 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder un produit puisque 1 est l'élément neutre de l'opérateur produit).

```
2     c = 1
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable `c` pour qu'elle contienne la quantité $\binom{n}{k}$.

Or, d'après ce qui précède :

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)}{k\,(k-1)\,\cdots\,1} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(n-i+1)}{\prod\limits_{i=1}^{k} i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i}$$

Pour cela, on utilise alors une structure conditionnelle (boucle `for`) :

```
    for i in range(1, k+1):
        c = c * (n-i+1) / i
```

- **Fin de la fonction**
  À l'issue de cette boucle, la variable `c` contient la quantité $\prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{n-i+1}{i} = \dbinom{n}{k}$.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Python** correct démontre la bonne de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. On procèdera de même dans les autres questions **Python**.
- Comme expliqué plus haut, on initialise `c` à 1 puisque cette variable doit contenir un produit, et que le réel 1 est l'élément neutre pour l'opérateur produit.
  On rappelle qu'on procède de même avec l'initialisation d'une somme stockée dans une variable `S` : on initialise la variable `S` à 0 car le réel 0 est l'élément neutre pour l'opérateur de sommation.
- On remarque que le programme proposé permet bien d'obtenir : $\dbinom{n}{0} = 1$.
  En effet, si $\mathtt{k} = 0$, alors :
  1) la variable `c` est initialisée à 1,
  2) la boucle qui suit n'est pas effectuée puisque la matrice `1:0` est une matrice vide,
  3) la fonction renvoie donc bien 1 lorsque `k` vaut 0.
- On pouvait exploiter plus directement la relation : $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$.
  On obtient la fonction **Python** suivante :

```
def coeffBinRec(k, n):
if k == 0:
c = 1
else:
c = (n/k) * coeffBinRec(k-1, n-1)
return c
```

On remarque que la définition de la fonction `coeffBinRec` fait appel à elle-même. On dit que la fonction `coeffBinRec` est définie de manière *récursive*. Cette manière de coder est ici rendue naturelle par la formule démontrée juste avant.

Commentaire

- Par exemple, lorsqu'on effectue l'appel `coeffBinRec(2,3)` (pour obtenir la valeur de $\binom{3}{2}$), le calcul s'effectue de la façon suivante :

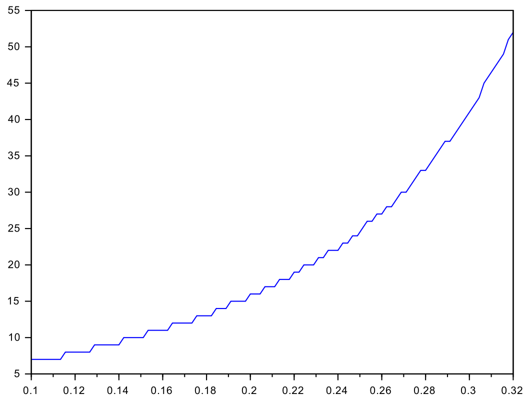
$$\begin{aligned}\texttt{coeffBinRec}(2,3) &= \frac{3}{2} \times \texttt{coeffBinRec}(2,1) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} \times \texttt{coeffBinRec}(1,0) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} \times 1 \;=\; \frac{3\times 2}{2\times 1} \;=\; \binom{3}{2}\end{aligned}$$

Remarquons que le calcul est certain d'aboutir puisque l'appel `coeffBinRec(k,n)` nécessite les appels de `coeffBinRec(k-1, n-1)`, puis `coeffBinRec(k-2, n-2)`, ..., puis `coeffBinRec(1, n-(k-2))`, et enfin `coeffBinRec(0, n-(k-1))` (dont on connaît la valeur).

$\square$

b) Écrire un script **Python** qui détermine n_p, le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(G_n) \leqslant \varepsilon$ pour $p < \frac{1}{2}$ et $\varepsilon > 0$ saisis au clavier par l'utilisateur.

NB : Pour $\varepsilon = 10^{-4} = 0,1\%$ et p variant entre 10% et 32%, on obtient pour la représentation de n_p en fonction de p :



Démonstration.
On rappelle le résultat suivant, obtenu à la question ***15.d)*** pour le cas $p < \frac{1}{2}$:

$$\mathbb{P}(G_n) \;=\; \frac{p}{q} - \left(1 - \frac{p}{q}\right) \sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(G_n) \leqslant \varepsilon \iff \sum_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k \geqslant \frac{\frac{p}{q} - \varepsilon}{1 - \frac{p}{q}}$$

On propose alors le script **Python** suivant, qui repose sur le calcul de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{2k-1}{k} (pq)^k$.

```
p = float(input('p = '))
eps = float(input('eps = '))
q = 1 - p
borne = (p/q - eps)/(1 - p/q)
S = 0
n = 0
while S < borne:
    n = n + 1
    S = S + coeffBin(n, 2*n-1) * (p*q)**n
print(n)
```

□

HEC 2008 (Exercice) - fonction de deux variables, méthode des moindres carrés, droite de régression linéaire

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 2, on considère un nuage de n points du plan, c'est-à-dire un n-uplet $\big((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\big)$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les réels x_1, x_2, ..., x_n (resp. y_1, y_2, ..., y_n) ne sont pas tous égaux.
On appelle moyenne arithmétique $\overline{x}$ et écart-type σ_x du n-uplet $x = (x_1, \ldots, x_n)$, les réels suivants :

$$\overline{x} \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{et} \qquad \sigma_x \ = \ \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2}$$

On définit de même la moyenne arithmétique $\overline{y}$ et l'écart-type σ_y du n-uplet $y = (y_1, \ldots, y_n)$.
La covariance $\text{cov}(x, y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $r(x, y)$ du couple (x, y) sont donnés par :

$$\text{cov}(x, y) \ = \ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) \qquad \text{et} \qquad r(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles qui, à tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, associe le réel $f(a, b)$ tel que :

$$f(a, b) \ = \ \sum_{k=1}^{n} (a\,x_k + b - y_k)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & f(a, b) \\ = \ & \sum_{k=1}^{n} (a\,x_k + b - y_k)^2 \\ = \ & \sum_{k=1}^{n} \big(a^2\,(x_k)^2 + b^2 + (y_k)^2 + 2\,a\,b\,x_k - 2\,a\,x_k\,y_k - 2\,b\,y_k\big) \\ = \ & \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2\right) a^2 + n\,b^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) a\,b - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k\right) a - 2\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) b + \sum_{k=1}^{n} (y_k)^2 \end{aligned}$$

- La fonction f est donc polynomiale.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Commentaire

On peut aussi remarquer que f est une somme de carrés de fonctions polynomiales et donc est, à ce titre, une fonction polynomiale. Les calculs ci-dessus sont en réalité superflus si on a en tête que l'espace des fonctions polynomiales est stable par somme et par produit.

$\square$

2. a) Écrire le système d'équations (S) permettant de déterminer les points critiques de f.

Démonstration.

- Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 (et 2) sur $\mathbb{R}^2$. Déterminons les.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
  - × Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(a,b) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \big(2\, x_k\, (a\, x_k + b - y_k)\big) \\ & = & 2 \left(a \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 + b \sum\limits_{k=1}^{n} x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\, y_k \right) \\ & = & 2 \left(a \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 + b \times (n\, \bar{x}) - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\, y_k \right) \quad \textit{(par définition de } \bar{x}\textit{)} \end{array}$$

Exprimons maintenant $\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\, y_k$ en fonction de $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x et $\mathrm{cov}(x, y)$ pour simplifier l'expression de $\partial_1(f)(a, b)$.

- Comme $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \sigma_x^2 & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \big((x_k)^2 - 2\, \bar{x}\, x_k + \bar{x}^2\big) \\ & = & \dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 - 2\, \bar{x} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + n\, \bar{x}^2 \right) \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 - 2\, \bar{x} \times \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right) + \bar{x}^2 \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 - 2\, \bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 - \bar{x}^2 \end{array}$$

Ainsi : $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2 = \sigma_x^2 + \bar{x}^2$.

$$\boxed{\text{D'où : } \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = n\big(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\big).}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(x,y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})\,(y_k - \bar{y}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_k - \bar{y}\, x_k - \bar{x}\, y_k + \bar{x}\, \bar{y}) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k - \bar{y} \sum_{k=1}^{n} x_k - \bar{x} \sum_{k=1}^{n} y_k + n\, \bar{x}\, \bar{y} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k - \bar{y} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right) - \bar{x} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k \right) + \bar{x}\, \bar{y} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k - \bar{y}\, \bar{x} - \cancel{\bar{x}\, \bar{y}} + \cancel{\bar{x}\, \bar{y}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k - \bar{x}\, \bar{y}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = \mathrm{cov}(x,y) + \bar{x}\, \bar{y}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = n\big(\mathrm{cov}(x,y) + \bar{x}\, \bar{y}\big).}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\partial_1(f)(a,b) &= 2 \left(a \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 + n\, \bar{x}\, b - \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \right) \\
&= 2\Big(n\ (\sigma_x^2 + \bar{x}^2)\ a + n\, \bar{x}\, b -,\ \big(\mathrm{cov}(x,y) + \bar{x}\, \bar{y}\big)\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(a,b) = 2\, n \Big(\big(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\big)\ a + \bar{x}\, b - \mathrm{cov}(x,y) - \bar{x}\, \bar{y} \Big)}$$

× Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\partial_2(f)(a,b) &= \sum_{k=1}^{n} \big(2 \times 1 \times (a\, x_k + b - y_k)\big) \\
&= 2 \left(a \sum_{k=1}^{n} x_k + n\, b - \sum_{k=1}^{n} y_k \right) \\
&= 2\big(a \times (n\, \bar{x}) + n\, b - n\, \bar{y}\big) && \textit{(par définition de } \bar{x} \textit{ et } \bar{y}\textit{)} \\
&= 2\, n\ (a\, \bar{x} + b - \bar{y})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_2(f)(a,b) = 2\, n\ (a\, \bar{x} + b - \bar{y})}$$

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a,b) \text{ est un point critique de } f \quad \Leftrightarrow \quad \nabla(f)(a,b) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(f)(a,b) & = & 0 \\ \partial_2(f)(a,b) & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{c}(a,b) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\,n\,\Big(\left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right)\, a + \bar{x}\, b - \mathrm{cov}(x,y) - \bar{x}\,\bar{y} \Big) \ = \ 0 \\ 2\,n\,\left(a\,\bar{x} + b - \bar{y}\right) \ = \ 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right)\, a + \bar{x}\, b - \mathrm{cov}(x,y) - \bar{x}\,\bar{y} \ = \ 0 \\ a\,\bar{x} + b - \bar{y} \ = \ 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Le système } (S) \text{ souhaité est le système : } \left\{ \begin{array}{l} \left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right)\, a + \bar{x}\, b - \mathrm{cov}(x,y) - \bar{x}\,\bar{y} \ = \ 0 \\ a\,\bar{x} + b - \bar{y} \ = \ 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) Résoudre le système (S). En déduire que f admet un unique point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ que l'on exprimera en fonction de $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x^2 et $\mathrm{cov}(x,y)$.

Démonstration.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{c}(a,b) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right)\, a + \bar{x}\, b - \mathrm{cov}(x,y) - \bar{x}\,\bar{y} \ = \ 0 \\ a\,\bar{x} + b - \bar{y} \ = \ 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right)\, a + \bar{x}\, b \ = \ \mathrm{cov}(x,y) + \bar{x}\,\bar{y} \\ b \ = \ \bar{y} - a\,\bar{x} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\sigma_x^2 + \bar{x}^2\right)\, a + \bar{x}\,\left(\bar{y} - a\,\bar{x}\right) \ = \ \mathrm{cov}(x,y) + \bar{x}\,\bar{y} \\ b \ = \ \bar{y} - a\,\bar{x} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\sigma_x^2 + \cancel{\bar{x}^2} - \cancel{\bar{x}^2}\right)\, a + \cancel{\bar{x}\bar{y}} \ = \ \mathrm{cov}(x,y) + \cancel{\bar{x}\bar{y}} \\ b \ = \ \bar{y} - a\,\bar{x} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} \\ b & = & \bar{y} - a\,\bar{x} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} \\ b & = & \bar{y} - \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}\ \bar{x} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ admet un unique point critique } (\hat{a}, \hat{b}) = \left(\dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}\ ,\ \bar{y} - \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}\ \bar{x} \right).}$$

Commentaire

- La difficulté de la recherche de points critiques réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(a,b) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Ici, on fait apparaître une équation du type :

$$b = \psi(a)$$

  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
  C'est la stratégie qu'on a adoptée ci-dessus.

$\square$

c) Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
  - × Tout d'abord :
  $$\partial^2_{1,1}(f)(a,b) \; = \; 2\,n\;(\sigma_x^2 + \bar{x}^2)$$
  - × Ensuite :
  $$\partial^2_{1,2}(f)(a,b) \; = \; \partial^2_{2,1}(f)(a,b) \; = \; 2\,n\,\bar{x}$$
    La première égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'**ouvert** $\mathbb{R}^2$.
  - × Enfin :
  $$\partial^2_{2,2}(f)(a,b) \; = \; 2\,n$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, & \partial^2_{1,1}(f)(a,b) \; = \; 2\,n\;(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) \\[2mm] & \partial^2_{1,2}(f)(a,b) \; = \; \partial^2_{2,1}(f)(a,b) \; = \; 2\,n\,\bar{x} \\[2mm] & \partial^2_{2,2}(f)(a,b) \; = \; 2\,n \end{array}}$$

Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial^2_{1,2}(f)(a,b)$ et $\partial^2_{2,1}(f)(a,b)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On rappelle que la matrice hessienne de f en (a,b) est :

$$\nabla^2(f)(a,b) \;=\; \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(a,b) & \partial^2_{1,2}(f)(a,b) \\ \partial^2_{2,1}(f)(a,b) & \partial^2_{2,2}(f)(a,b) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) & 2\,n\,\bar{x} \\ 2\,n\,\bar{x} & 2\,n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } H \;=\; \nabla^2(f)(\hat{a},\hat{b}) \;=\; \begin{pmatrix} 2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) & 2\,n\,\bar{x} \\ 2\,n\,\bar{x} & 2\,n \end{pmatrix}.}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \det(H - \lambda\, I_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} 2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) - \lambda & 2\,n\,\bar{x} \\ 2\,n\,\bar{x} & 2\,n - \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \big(2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) - \lambda\big)\,(2\,n - \lambda) - (2\,n\,\bar{x})^2 \\ &= \lambda^2 - \big(2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2) + 2\,n\big)\,\lambda + 4\,n^2\,(\sigma_x^2 + \cancel{\bar{x}^2}) - \cancel{4\,n^2\,\bar{x}^2} \\ &= \lambda^2 - 2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2 + 1)\,\lambda + 4\,n^2\,\sigma_x^2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } H &\Leftrightarrow H - \lambda\, I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(H - \lambda\, I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2 + 1)\,\lambda + 4\,n^2\,\sigma_x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ est racine de } Q \end{aligned}$$

où Q est le polynôme de degré 2 défini par :

$$Q(X) \;=\; X^2 - 2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2 + 1)\,X + 4\,n^2\,\sigma_x^2$$

Commentaire

À ce stade de l'étude de la nature d'un point critique, le calcul de $\det(H - \lambda\, I_2)$ nous fournit toujours un polynôme de degré 2 en λ. Notons le Q. Deux cas se présentent alors :

× l'expression de Q est « simple » (c'est par exemple le cas lorsque les coefficients de Q sont numériques). Dans ce cas :

1) on détermine explicitement les racines de Q par factorisation ou calcul de discriminant.

2) les racines de Q sont les valeurs propres de H d'après les équivalences ci-dessus.

3) on en déduit le signe des valeurs propres de H et ainsi la nature du point critique étudié.

× l'expression de Q est « compliquée » (c'est par exemple le cas lorsque l'expression de Q dépend de plusieurs paramètres, comme ici). Dans ce cas, **on ne cherchera pas** à déterminer les racines de Q explicitement. On procèdera de la manière suivante :

1) on justifie l'existence de valeurs propres λ_1 et λ_2 de H (la matrice H est symétrique).

2) les valeurs propres de H sont racines de Q d'après les équivalences ci-dessus. On en déduit la factorisation de Q suivante : $Q(X) = (X - \lambda_1)\,(X - \lambda_2)$

3) on identifie les coefficients des deux expressions de Q pour en déduire des relations sur λ_1 et λ_2 (elles sont appelées *relations coefficients / racines*).

4) on détermine le signe de λ_1 et λ_2 (valeurs propres de H) grâce à ces relations, et on obtient ainsi la nature du point critique étudié.

- La matrice H est une matrice symétrique (réelle). Elle est donc diagonalisable. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres **éventuellement égales**.
- D'après les équivalences précédentes, on en déduit que λ_1 et λ_2 sont racines de Q. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} Q(X) & = & (X-\lambda_1)\,(X-\lambda_2) \\ & = & X^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\,X + \lambda_1\,\lambda_2 \end{array}$$

D'où, par définition de Q :

$$X^2 - 2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2 + 1)\,X + 4\,n^2\,\sigma_x^2 \;=\; X^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\,X + \lambda_1\,\lambda_2$$

Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2, on en déduit le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 2\,n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2 + 1) & (*) \\[2mm] \lambda_1\,\lambda_2 & = & 4\,n^2\,\sigma_x^2 & (**) \end{array} \right.$$

× L'équation $(**)$ implique : $\lambda_1\,\lambda_2 > 0$.
On en déduit que λ_1 et λ_2 ont même signe. Le point $(\hat{a}, \hat{b})$ est donc un extremum local de f sur $\mathbb{R}^2$.

× L'équation $(*)$ implique : $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$.
Or λ_1 et λ_2 ont même signe. D'où : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que la fonction } f \text{ admet un mimimum local en } (\hat{a}, \hat{b}).}$$

□

d) Établir la formule suivante : $f(\hat{a}, \hat{b}) = n\,\sigma_y^2\,\big(1 - r^2(x,y)\big)$.

Démonstration.

- Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. D'après ***1.*** :

$$\begin{array}{rl} & f(a,b) \\ = & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k)^2\right)\ a^2 + n\,b^2 + 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\ a\,b - 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,y_k\right)\ a - 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)\ b + \sum\limits_{k=1}^{n} (y_k)^2 \\ = & n\,(\sigma_x^2 + \bar{x}^2)\,a^2 + n\,b^2 + 2\,n\,\bar{x}\,a\,b - 2\,n\,\big(\mathrm{cov}(x,y) + \bar{x}\,\bar{y}\big)\,a - 2\,n\,\bar{y}\,b + n\,(\sigma_y^2 + \bar{y}^2) \end{array}$$

La deuxième égalité est obtenue grâce aux relations démontrées en ***2.a)***. Ainsi :

$$f(a,b) \;=\; n\Big((\sigma_x^2 + \bar{x}^2)\,a^2 + b^2 + 2\,\bar{x}\,a\,b - 2\,\big(\mathrm{cov}(x,y) + \bar{x}\,\bar{y}\big)\,a - 2\,\bar{y}\,b + (\sigma_y^2 + \bar{y}^2)\Big)$$

- D'après ***2.b)*** : $\hat{b} = \bar{y} - \bar{x}\,\hat{a}$. On obtient alors :

$$\begin{array}{rl} & f(\hat{a}, \hat{b}) \\ = & n\Big((\sigma_x^2 + \bar{x}^2)\,\hat{a}^2 + (\bar{y} - \bar{x}\,\hat{a})^2 + 2\,\bar{x}\,\hat{a}\,(\bar{y} - \bar{x}\,\hat{a}) - 2\,\big(\mathrm{cov}(x,y) + \bar{x}\,\bar{y}\big)\,\hat{a} \\ - & 2\,\bar{y}\,(\bar{y} - \bar{x}\,\hat{a}) + \sigma_y^2 + \bar{y}^2\Big) \\ = & n\big(\sigma_x^2\,\hat{a}^2 + \cancel{\bar{x}^2\,\hat{a}^2} + \bar{y}^2 - \cancel{2\,\bar{x}\,\bar{y}\,\hat{a}} + \cancel{\bar{x}^2\,\hat{a}^2} + \cancel{2\,\bar{x}\,\bar{y}\,\hat{a}} - \cancel{2\,\bar{x}^2\,\hat{a}^2} - 2\,\mathrm{cov}(x,y)\,\hat{a} - \cancel{2\,\bar{x}\,\bar{y}\,\hat{a}} \\ - & 2\,\bar{y}^2 + \cancel{2\,\bar{x}\,\bar{y}\,\hat{a}} + \sigma_y^2 + \bar{y}^2\big) \\ = & n\big(\sigma_x^2\,\hat{a}^2 - 2\,\mathrm{cov}(x,y)\,\hat{a} + \sigma_y^2\big) \end{array}$$

- Or, toujours d'après ***2.b)*** : $\hat{a} = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(\hat{a},\hat{b}) &= n\left(\sigma_x^2\,\frac{\big(\text{cov}(x,y)\big)^2}{\sigma_x^4} - 2\,\text{cov}(x,y)\,\frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x^2} + \sigma_y^2\right) \\ &= n\,\sigma_y^2\left(\frac{\big(\text{cov}(x,y)\big)^2}{\sigma_x^2\,\sigma_y^2} - 2\,\frac{\big(\text{cov}(x,y)\big)^2}{\sigma_x^2\,\sigma_y^2} + 1\right) \\ &= n\,\sigma_y^2\left(1 - \frac{\big(\text{cov}(x,y)\big)^2}{\sigma_x^2\,\sigma_y^2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Et finalement : } f(\hat{a},\hat{b}) = n\,\sigma_y^2\Big(1 - \big(r(x,y)\big)^2\Big).}$$

□

3. a) Montrer que l'on a : $|r(x,y)| \leqslant 1$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de f :

$$f(\hat{a},\hat{b}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (\hat{a}\,x_k + \hat{b} - y_k)^2 \;\geqslant\; 0$$

- On en déduit, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{lll} & n\,\sigma_y^2\left(1 - \big(r(x,y)\big)^2\right) \geqslant 0 & \\ \text{donc} & 1 - \big(r(x,y)\big)^2 \geqslant 0 & \textit{(car : } n\,\sigma_y^2 > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 \geqslant \big(r(x,y)\big)^2 & \\ \text{ainsi} & 1 \geqslant |r(x,y)| & \textit{(par croissance de la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{|r(x,y)| \leqslant 1}$$

□

b) Que peut-on dire du nuage de points lorsque $|r(x,y)| = 1$?

Démonstration.
Supposons : $|r(x,y)| = 1$.

- Alors : $\big(r(x,y)\big)^2 = 1$. Et donc :

$$f(\hat{a},\hat{b}) \;=\; n\,\sigma_y^2\left(1 - \big(r(x,y)\big)^2\right) \;=\; 0$$

- Par définition de f, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} (\hat{a}\,x_k + \hat{b} - y_k)^2 \;=\; 0$$

- Or une somme de carrés est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul. On en conclut :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \hat{a}\, x_k + \hat{b} - y_k = 0$$
ou encore :
$$\forall x \in [\![1, n]\!], \quad y_k = \hat{a}\, x_k + \hat{b}$$

On en déduit que tous les points (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) sont situés sur la droite d'équation $y = \hat{a}\, x + \hat{b}$.

Commentaire

Cet exercice met en place une régression linéaire : le problème consiste à identifier une droite $y = a\,x + b$ qui ajuste bien le nuage de points (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n).
L'erreur que l'on commet en utilisant la droite de régression pour prédire y_k à partir de x_k est : $y_k - (a\,x_k + b)$.
Une idée naturelle pour déterminer la valeur des coefficients a et b est donc de chercher la droite (donc le couple (a, b)) qui minimise la somme des carrés de ces erreurs :

$$\sum_{k=1}^{n} \big(y_k - (a\,x_k + b)\big)^2 \; = \; \sum_{k=1}^{n} (a\,x_k + b - y_k)^2$$

(on appelle d'ailleurs cette procédure « méthode des moindres carrés »)
On en déduit, après calculs, que l'unique droite rendant minimale l'erreur $\sum_{k=1}^{n} (a\,x_k + b - y_k)^2$ est la droite d'équation :

$$y \; = \; \hat{a}\, x + \hat{b} \; = \; \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}\,(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

□