Colles de Mathématiques en E2A
Graphes et chaînes de Markov, convergence en loi
Semaine 22 : 11 - 15 mars

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XV : Graphes et chaînes de Markov

1.1 Définitions

- Graphe (fini), sommets (ou noeuds), arêtes.
- Notion de graphe orienté ou non-orienté.
- Voisin d'un sommet, voisinage d'un sommet, degré d'un sommet.
- Matrice d'adjacence d'un graphe.
- Liste d'adjacence d'un sommet, liste des listes d'adjacence.
- Chemin de longueur k allant d'un sommet à un autre. Existence d'un chemin allant d'un sommet à un autre. Distance entre deux sommets.
- Notion de graphe connexe.
- Notion de graphe pondéré. Poids associé à une arête.
- Notion de graphe probabiliste.
- Chaîne de Markov.
- Probabilités de transition (ou probabilités transitionnelles). Chaîne de Markov homogène.
- Le n^{e} état probabiliste de la chaîne de Markov est une **matrice ligne**. Etat initial.
- Matrice de transition associée à une chaîne de Markov. Graphe probabiliste associé à une matrice de transition.
- Etat stable (ou loi stationnaire).

1.2 Résultats

- Un graphe G est non orienté ssi sa matrice d'adjacence M est symétrique.
- Si on note M la matrice d'adjacence du graphe G (dont les sommets sont $s_1, \ldots, s_n$), alors $[M^k]_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur k allant de s_i à s_j.
- G est connexe si et seulement si tous les coefficients de la matrice $\sum_{k=0}^{n-1} M^k$ sont strictement positifs.

- L'algorithme de Dijkstra permet de trouver le plus court chemin entre deux sommets dans un graphe pondéré.
- Soit M une matrice de transition d'une chaîne de Markov. Alors les coefficients de la matrice M sont tous positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.
- Caractérisation des états stables d'une chaîne de Markov (où M est la matrice de transition)

$$\pi \text{ est un état stable de la chaîne de Markov} \iff \begin{cases} {}^t\pi \text{ est un vecteur propre de } {}^tM \text{ associé à la valeur propre } 1 \\ \pi \text{ définit une loi de probabilité} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} {}^t\pi \text{ est un vecteur propre de } {}^tM \text{ associé à la valeur propre } 1 \\ \forall j \in [\![1, r]\!],\ \pi_j \geqslant 0 \\ \sum_{j=1}^{r} \pi_j = 1 \end{cases}$$

- Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \ldots, r$. Si la suite (X_n) converge en loi, alors la loi limite est nécessairement une loi stationnaire de la chaîne de Markov. Autrement dit, si, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $\pi_j = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = j])$ existe, alors le vecteur $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r)$ est un état stable de la chaîne de Markov.

1.3 Méthodes

Il faut savoir redémontrer le théorème suivant, qui est une question classique des concours.

Théoreme 1.1. *Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \ldots, r$. On note $M = (p_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant r}}$ sa matrice de transition. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$V_n = V_0 M^n$$

La preuve se fait en deux étapes.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, on montre la formule de récurrence : $V_{n+1} = V_n M$.
2. On démontre ensuite que $V_n = V_0 M^n$ par récurrence. Même si la récurrence est très simple, il faut la détailler si c'est le coeur de la question.

2 Chapitre XVI : Convergence et approximation

2.1 Définitions

- Convergence en loi.
  (On a vu la notion de convergence simple d'une suite de fonctions en cours pour préparer la définition de la convergence en loi, mais cette notion est hors-programme)

2.2 Résultats

- Inégalité de Markov. Conséquence pour une v.a.r. admettant un moment d'ordre m.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres.
- Traduction de la convergence en loi dans deux cas particuliers (v.a.r. à densité et v.a.r. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$). Il faut aussi avoir en tête le cas particulier d'une chaîne de Markov (suite de v.a.r. discrètes finies à valeurs dans $[\![1, r]\!]$ ou $[\![0, r]\!]$ selon les exercices).
- Convergence en loi de (X_n) où $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ avec $\lambda > 0$. Il faut savoir refaire le calcul, car il illustre plusieurs techniques importantes qui peuvent servir ailleurs.
- Théorème central limite (TCL).
- Si S_n^* converge en loi vers $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ d'après le TCL, alors pour n suffisamment grand, la v.a.r. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right)$ (où $m = \mathbb{E}(X_i)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i)$). Ce résultat n'est pas à connaître par coeur, il faut par contre connaître la méthode et savoir le retrouver rapidement. On pourra retenir par coeur que la loi de S_n est approchée par une loi normale dont il faut déterminer les paramètres par le calcul.

2.3 Méthodes

Pour montrer que (X_n) converge en loi vers X, on est amené à fixer $x \in \mathbb{R}$ et à séparer des cas avant de calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x)$.

- Il est `IMPERATIF` de ne faire que des cas qui ne dépendent pas de n. Autrement dit, on doit fixer x dans un intervalle qui ne dépend pas de n.
- Au brouillon, on fait les « limites d'intervalles de définitions de F_{X_n} », ce qui donne les cas à séparer.
- On écrit les différents cas avec des inégalités `STRICTES`, ce qui revient à se placer sur des intervalles `OUVERTS`.
- On réfléchit à la fin aux points de recollement. En général on peut les rajouter à l'un des cas précédents gratuitement. Si ce n'est pas le cas, on les traite à part (un cas pour chaque point de recollement qui pose problème). On gardera en tête que la limite ne nous intéresse que si x est un point de continuité de F_X (pour ne pas faire de calculs inutiles).

3 Questions de cours

1. Ecrire une fonction **Python**, nommée `List_deg`, qui :
   - prend en argument la liste `L` des listes d'adjacence d'un graphe
   - renvoie la liste des degrés des sommets de ce graphe

   On expliquera rapidement à l'oral les étapes clés de l'algorithme.
2. Compléter la fonction **Python** suivante qui
   - prend en argument la liste `L` des listes d'adjacence d'un graphe
   - renvoie la matrice d'adjacence de ce graphe

   On expliquera à l'oral chaque ligne complétée et à quoi servent les variables créées.

```
import numpy as np
def Ad_matrix_from_list(L):
    nbS = __________
    M = np.zeros([nbS,nbS])
    for i in range(nbS):
        nbV = _____________
        for j in range(nbV):
            M[i,L[i][j]] = _____
    return M
```

3. Ecrire une fonction **Python**, nommée `graph_connexe`, qui
   - prend en argument la matrice d'adjacence `M` d'un graphe
   - renvoie le booléen `True` si ce graphe est connexe et `False` sinon

   On expliquera rapidement à l'oral les étapes clés de l'algorithme et les fonctions **Python** utilisées.
4. Citer puis démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'aide de l'inégalité de Markov.
5. Citer puis démontrer la loi faible des grands nombres à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
6. Citer le théorème central limite.
7. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
8. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . On suppose que : $\forall n \geq 3$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}])$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. (exo 7 du TD reformulé)