Exercices de cours

Exercice 1 : *(Inégalité de Markov : un théorème puissant mais parfois grossier)*

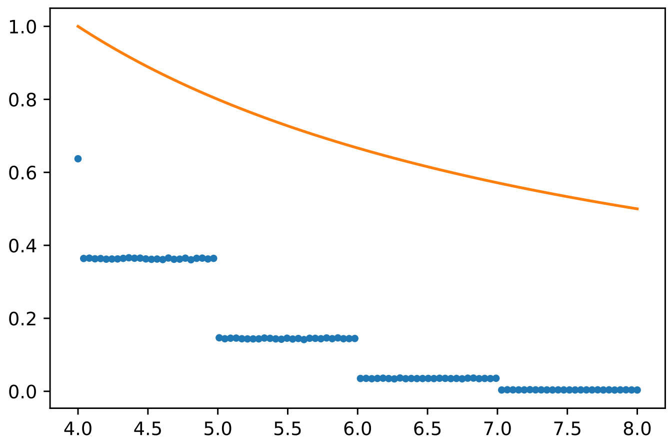
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$.

1. (a) Rappeler la valeur de l'espérance de X.
   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}([X \geqslant x]) \leqslant \dfrac{n}{x}$.
2. (a) Calculer $\mathbb{P}([X = n])$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}([X \geqslant n+1]) = \mathbb{P}([X \leqslant n-1])$.
   (c) En déduire que $\mathbb{P}([X \geqslant n+1]) < \dfrac{1}{2}$. Comparer cette majoration avec celle obtenue en question 1b.
3. *Simulation informatique.*
   (a) Compléter la fonction **Python** qui suit pour qu'elle renvoie une approximation de $\mathbb{P}([X \geqslant x])$.

```
def calculApproxLfGN(n, x):
    c = 0
    for k in range(10**5):
        if _______________________________:
            c += _____
    return _____________
```

   (b) Ecrire une fonction **Python**, nommée `majorationMarkov`, qui prend en paramètre n et x et qui renvoie la majoration obtenue en question 1b.
   (c) Compléter le script **Python** ci-dessous afin d'obtenir le graphique qui suit. On expliquera en particulier le choix du premier paramètre ligne 2.

```
1  n = 4
2  abscisse = np.linspace(_____, _______, 100)
3  ordonneeLfGN = ____________________________________________________
4  ordonneeMarkov = ____________________________________________________
5  plt.plot(abscisse, ________________, '.')
6  plt.plot(abscisse, __________________)
```



Exercice 2 : *(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : un théorème puissant mais parfois grossier)*

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
   (a) Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$.
   (c) Soit $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$. Calculer $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$. Commenter.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
   (a) Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$.
   (c) Soit $\varepsilon \geqslant 1$. Calculer $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$. Commenter.
3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$.
   (c) Soit $\varepsilon \geqslant 1$.
      i. Montrer que $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ]) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$.
      ii. En déduire que $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ]) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$.
4. *Informatique.* Compléter le script **Python** ci-dessous afin d'obtenir le graphique qui suit, représentant les différentes majorations de $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$ obtenues aux questions 2 et 3. Commenter.

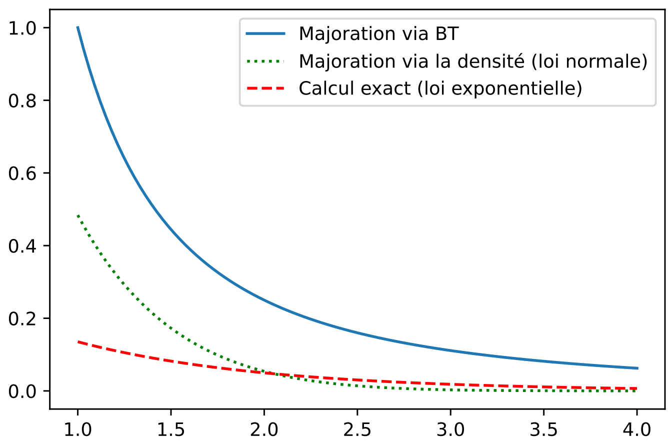
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return __________

def g(x):
    return ____________________________________________

def h(x):
    return ________________

X = np.linspace(1,4,100)
plt.plot(X, f(X), label='Majoration via BT')
plt.plot(X, g(X), 'g:', label='Majoration via la densité (loi normale)')
plt.plot(X, h(X), 'r-', label='Calcul exact (loi exponentielle)')
plt.legend(loc='best')
```



Exercice 3 :

1. Soit $p \in]0,1[$. Soit $n \geqslant 2$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
2. On lance n fois une pièce équilibrée. On suppose que les lancers sont indépendants. Combien de lancers faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du `Pile` au cours de ces lancers sera comprise entre 49% et 51% ?

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules, numérotées de 1 à n. On effectue un unique tirage aléatoire équiprobable d'une boule dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue. Si X prend la valeur k, on coupe alors en deux un ruban long de k centimètres, en choisissant aléatoirement et de manière uniforme le point de découpe. On note Z la variable aléatoire égale à la longueur (en cm) du plus petit des deux rubans ainsi obtenus.

1. Ecrire une fonction **Python** `simulZ(n)` qui simule cette expérience et qui renvoie la valeur prise par Z.
2. Ecrire une fonction **Python** `approxEsp(n)` qui renvoie une approximation de l'espérance de Z (on admet qu'elle en admet une).

Exercice 5 : *(Un exemple où les intervalles de définition de f_n ne dépendent pas de n)*

Soit (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Exercice 6 : *(Un exemple où les intervalles de définition de f_n dépendent de n)*

Soit $a > 0$. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-ax - \frac{x^2}{2n}} & \text{si } 0 \leqslant x < 2n \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2n \end{cases}$$

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Exercice 7 : *(Un exemple où les intervalles de définition de f_n dépendent de n)*

Soit (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \geqslant 3, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ \frac{nx-1}{n-2} & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Exercice 8 : `(inspiré de HEC 2015)`

Soit $\lambda > 0$. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et on définit la suite de fonctions $(g_n)_{n \geqslant 1}$ par :

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \left(f\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)\right)\right)^n$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) Déterminer le plus petit entier N_x (qui dépend de x) qui vérifie :
   $$\forall n \geqslant N_x,\ x + \frac{1}{\lambda}\ln(n) > 0$$
   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant N_x$, on a : $f\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)\right) = 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{n}$.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = e^{-e^{-\lambda x}}$.

Exercice 9 : `(d'après ESCP 1987)` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à densité telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de X_n est définie par :
$$F_{X_n} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^n} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

Exercice 10 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à densité telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

Exercice 11 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}\right)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel x :
$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
2. Montrer l'équivalent : $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
3. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 12 : Soit X une v.a.r. à densité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = e^{\frac{1}{n}} X$. Montrer que (X_n) converge en loi vers X.

Exercice 13 : Soit (X_n) une suite de v.a.r. telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Montrer que (X_n) converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

Exercice 14 : Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{B}(900, 0.5)$. Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([405 \leqslant X \leqslant 495])$.

Exercice 15 : Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{P}(64)$. Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([X \leqslant 74])$.

Exercice 16 : (d'après `ESSEC 2007 - Maths II`)

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(5k)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. On note α l'unique réel vérifiant $\Phi(\alpha) = 0,99$. Justifier que $0,01$ est une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left[X - 5k > \alpha\sqrt{5k}\right]\right)$, lorsque k est grand.

Exercice 17 : Soit (S_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \frac{1}{2}$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 18 : (extrait de `EDHEC 2007`) Soit X une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de loi définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X = i]) \ = \ \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On admet que X possède une espérance et une variance respectivement égales à $\mathbb{E}(X) = \dfrac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{11}{12}$.

1. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable X.
2. En déduire que $\mathbb{P}([X \geqslant 3]) \leqslant \dfrac{11}{27}$.

Exercice 19 : En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\forall x > 0, \ \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \ \mathrm{d}t \geq \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$$

Convergence en loi

Exercice 20 : Soit (X_n) une suite de v.a.r. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([n, n+1])$. Montrer que (X_n) ne converge pas en loi.

Exercice 21 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad Y_n = n(1 - M_n)$$

On admet que M_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis celle de Y_n.
2. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire remarquable.
3. Ecrire une fonction **Python** `simulY(n)` qui simule la variable aléatoire Y_n.

Exercice 22 :

1. Soit X une v.a.r. suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = -\ln(X)$. Déterminer la loi de Z.
2. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(X_k) - \ln(n)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
   (b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 23 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire réelle X_n de loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{n}$, et on définit la variable aléatoire Y_n, par $Y_n = \lfloor X_n \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x. On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est égal à l'unique entier k vérifiant $k \leqslant x < k+1$.

1. (a) Préciser les valeurs prises par Y_n et déterminer la loi de Y_n.
   (b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y_n)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = X_n - Y_n$. On définit ainsi une suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z_n.
   (b) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire U dont on donnera la loi.
   (c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z_n)$. Montrer que la suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\geqslant 1}$ admet une limite que l'on déterminera. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(U)$?

Exercice 24 : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Un groupe de n personnes portant des numéros de 1 à n tire à tour de rôle, avec remise, un numéro compris entre 1 et n dans une urne. Si l'une des personnes a tiré son propre numéro, on recommence la série des n tirages, sinon on arrête. On note X_n le nombre de séries de n tirages qu'il faut effectuer pour que chaque personne ait tiré un numéro différent du sien.

1. Montrer que X_n suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k])$. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on précisera la loi.

Exercice 25 : Soit n un entier naturel strictement positif. On définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} a_n\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer a_n pour que f_n soit une densité de probabilité.
2. Soit alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité telle que X_n admette f_n pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z que l'on déterminera.
3. On considère la fonction et le programme suivant :

```
def SimulX(n):
    X = n * rd.random()
    for k in range(n):
        U = n * rd.random()
        if U < X:
            X = U
    return X
```

```
m = 20 000
n = 100
S = 0
for k in range(m):
    if SimulX(n) <= 1:
        S = S+1
print(S/m)
```

   (a) Montrer que la fonction `SimulX` de paramètre `n` simule une variable aléatoire de même loi que X_n.
   (b) On donne $\mathrm{e}^{-1} \approx 0,37$. En utilisant la question 2, ainsi que la loi faible des grands nombres, expliquer pourquoi le résultat affiché, après exécution du programme, est proche de $0,63$.

Théorème Central Limite (TCL)

Exercice 26 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X_n}^* = \sqrt{n}(\overline{X_n} - 1)$. On note F_n la fonction de répartition de $\overline{X_n}^*$.

1. (a) Donner l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.
   (b) Montrer que $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers 1, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$$

2. (a) Quelle est, pour $x \in \mathbb{R}$, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
   (b) Calculer une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left[1 - \dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X_n} \leqslant 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right]\right)$, pour n assez grand. Si Φ est la fonction de répartition de la loi normale réduite, on donne $\Phi(2) \approx 0{,}977$.

Exercice 27 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On note $T_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, et T_n^* la variable centrée réduite associée à T_n.

1. Étudier la convergence en loi de la suite de variables $(T_n^*)_{n\geq 1}$.
2. En déduire une fonction **Python** qui simule la loi normale centrée réduite. Puis, écrire une fonction **Python** de paramètres m et s qui simule une variable aléatoire de loi normale d'espérance m et d'écart-type s.

Exercice 28 : (d'après `EML 2006`)

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
   (a) Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.
   (b) Écrire une fonction `simulZ(p)` en langage **Python**, qui simule la variable aléatoire Z.
2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. *On considère donc un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de variables indépendantes et de même loi que Z.* On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.
   (a) Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([0 \leq M_n - m \leq \sigma_n])$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
   (c) Écrire une fonction `simulM(n,p)` en **Python**, utilisant la fonction `simulZ(p)` définie à la question 1b, qui simule la v.a.r. M_n.
   (d) En se référant à la loi faible des grands nombres, et en utilisant la question 2b, écrire un programme en **Python**, utilisant la fonction `simulM`, qui calcule et affiche une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$. On rappelle que `np.sqrt(x)` calcule $\sqrt{x}$ en **Python**, et que $\pi \simeq 3,14$.

Exercice 29 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi de Poisson de paramètre 1.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, son espérance et sa variance.
2. À l'aide du théorème central limite, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n^k}{k!}$.

Exercice 30 : (d'après `HEC 2001 - Maths III`) On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On associe à cette expérience une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable S_n. Quelles sont l'espérance et la variance de S_n ?
2. (a) Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver une constante K_ε telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on ait l'inégalité :
   $$\mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}$$
   (b) Déduire de la majoration obtenue que :
   $$\forall r \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$$
3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème central limite, que la suite $\left(\mathbb{P}\left(\left[\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite non nulle.

Approximation

Exercice 31 : (extrait de `HEC 2002`)

On appelle durée de vie d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On suppose que la durée de vie d'un composant suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{200}$. Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus. On admet que U_n suit la loi binomiale de paramètres n et p. On considère un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{200}$. À chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire U désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant $n = 100$ inclus.
2. On désire qu'avec une probabilité de $0,95$, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant $n = 100$ inclus. À combien peut-on évaluer ce stock ? On donne : $\sqrt{\frac{995}{2}} \approx 22,3$ et, en désignant par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $\Phi(1,65) \approx 0,95$.

Exercice 32 : (extrait de `ECRICOME 2008`)

Pour ce jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties $(N \geq 2)$. On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.
3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.
   (a) Donner le paramètre de cette loi de Poisson.
   (b) À l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? *(cette probabilité sera impérativement calculée en utilisant l'annexe située à la fin de l'exo)*

Table de Poisson donnant les probabilités cumulées : $\sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	$0,0498$	$0,0183$	$0,0067$	$0,0025$	$0,0009$
1	$0,1991$	$0,0916$	$0,0404$	$0,0174$	$0,0073$
2	$0,4232$	$0,2381$	$0,1247$	$0,0620$	$0,0296$
3	$0,6472$	$0,4335$	$0,2650$	$0,1512$	$0,0818$
4	$0,8153$	$0,6288$	$0,4405$	$0,2851$	$0,1730$
5	$0,9161$	$0,7851$	$0,6160$	$0,4457$	$0,3007$
6	$0,9665$	$0,8893$	$0,7622$	$0,6063$	$0,4497$
7	$0,9881$	$0,9489$	$0,8666$	$0,7440$	$0,5987$
8	$0,9962$	$0,9786$	$0,9319$	$0,8472$	$0,7291$
9	$0,9989$	$0,9919$	$0,9682$	$0,9161$	$0,8305$
10	$0,9997$	$0,9972$	$0,9863$	$0,9574$	$0,9015$
11	$0,9999$	$0,9991$	$0,9945$	$0,9799$	$0,9467$
12	$1,0000$	$0,9997$	$0,9980$	$0,9912$	$0,9730$
13		$0,9999$	$0,9993$	$0,9964$	$0,9872$
14		$1,0000$	$0,9998$	$0,9986$	$0,9943$
15			$0,9999$	$0,9995$	$0,9976$
16			$1,0000$	$0,9998$	$0,9990$
17				$0,9999$	$0,9996$
18				$1,0000$	$0,9999$
19					$1,0000$
20					

Exercice 33 : On estime à 60% la probabilité qu'une famille possède une voiture. On admet que chaque famille possède au plus une voiture, et que chaque famille se comporte indépendamment des autres. On construit un ensemble de logements pour n famille. On y adjoint un parking. On note P_n la variable aléatoire égale au nombre de familles possédant une voiture. On donne $\Phi(2,06) = 0,98$.

1. Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de P_n par une loi normale, dont on précisera les paramètres.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 600$.
   (a) Calculer la probabilité de ne pas satisfaire toutes les demandes de stationnement si l'on construit 360 places de parking.
   (b) Le promoteur veut annoncer : « toute famille désirant un parking peut en bénéficier ». Quel est le nombre de places que doit offrir le parking pour que sa publicité coure un risque limité à 2% d'être mensongère ?
3. Le promoteur veut annoncer : « toute famille désirant un parking peut en bénéficier ». Le nombre de place de parking qu'il est possible de construire est limité à 300. Combien le promoteur doit-il construire de logements pour que sa publicité coure un risque limité à 2% d'être mensongère ?