TP8 : Statistiques bivariées avec le module pandas

Commencer par importer les bibliothèques suivantes dans chaque fichier **Python** utilisé :

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

I. Importation d'un fichier csv en Python

Dans ce T.P, on utilise la bibliothèque `pandas` qui permet la lecture de fichiers `.csv` (*Comma Separated Values*) et la création/manipulation de tables. Si certaines commandes et instructions seront rappelées ci-après, on renvoie également au cours de première année.

On va utiliser comme document de travail, tout au long de ce TP, un fichier csv qui regroupe tout un tas de données publiques récupérées sur le site World Bank Data. En particulier, pour la période (1960-2020) et dans le Monde entier :

- le taux de fertilité des jeunes femmes (nombre d'enfants pour 1000 jeunes femmes entre 15 et 19 ans),
- le pourcentage (du groupe concerné) de jeunes femmes étant scolarisé dans l'enseignement secondaire,
- l'espérance de vie,
- le pourcentage de population ayant accès à l'électricité,
- les émissions de CO_2 (en kT),
- la consommation électrique moyenne *per capita* (en KWh par habitant),
- la surface de forêt (en km^2).

On commence donc par importer le fichier susmentionné dans Python avec la commande

```
donnees=pd.read_csv('https://tomdutilleul.com/wp-content/uploads/
2022/10/tp_stats_data.csv',sep=';')
```

Ici, on rajoute l'argument `sep=';'` car les données du fichier sont séparées par un point virgule.

La variable `donnees` est alors une *table de données* ou *Dataframe*. On rappelle que :

- La commande `donnees.head()` permet de n'afficher que les 5 premiers rangs du tableau.
- La commande `donnees.shape` renvoie un couple (n, p) où n est le nombre de lignes et p le nombre de colonnes.
- La commande `donnees.columns` permet d'afficher l'ensemble des colonnes du tableau.

Une colonne intitulée index est ajoutée par la bibliothèque pandas à la table de données lors de sa lecture afin de donner un numéro à chaque ligne de la table de données (la numérotation commençant comme toujours avec Python à 0).

Notre jeu de données manipulé ici est (relativement) grand. Il contient 8 colonnes et 61 lignes... On va donc n'en considérer qu'une sous-table.

```
table1=donnees[['Année', 'taux fertilité j. femmes','femmes scol. sec.']]
table1=table1.rename(columns ={'taux fertilité j. femmes': 'TF',
'femmes scol. sec.':'FSS'})
```

II. Commandes de statistiques descriptives avec pandas

On a vu au TP précédent plusieurs commandes pour calculer la moyenne empirique, la variance empirique ainsi que l'écart-type empirique. Ces commandes utilisaient le module numpy et s'appliquaient donc à des objets de type *vecteurs* en **Python**. Dans ce TP, on manipule des *tables de données*, il faut donc utiliser des commandes propres au module `pandas` :

- `table1.mean()` renvoie la liste des moyennes pour chaque colonne numérique et `table1['nom_de_la_colonne'].mean()` renvoie la moyenne des valeurs d'une colonne précise.
- `table1.std()` renvoie la liste des écarts-types pour chaque colonne numérique et `table1['nom_de_la_colonne'].std()` renvoie l'écart-type des valeurs d'une colonne précise.
- `table1.median()` renvoie la liste des médianes pour chaque colonne numérique et `table1['nom_de_la_colonne'].median()` renvoie la médiane des valeurs d'une colonne précise.
- `table1.min()` renvoie la liste des valeurs minimales pour chaque colonne numérique et `table1['nom_de_la_colonne'].min()` renvoie la valeur minimale d'une colonne précise.
- idem avec `table1.max()`

Définition Une médiane d'une série statistique est une valeur m telle que 50% des données sont inférieures à m et 50% supérieures à m. Si la série statistique comporte $2n+1$ valeurs ordonnées, on choisi pour m la valeur de rang $n+1$. Si la série statistique comporte $2n$ valeurs ordonnées, on choisi pour m la moyenne arithmétique entre les valeurs de rang n et $n+1$. Intuitivement, la médiane est le point milieu des observations (à ne pas confondre avec le point moyen).

On s'intéresse aussi parfois à d'autres quantiles. On note q_α le quantile d'ordre α qui désigne le réel tel qu'une proportion α des observations est inférieure à α et une proportion $1-\alpha$ est supérieure à q_α. La médiane est le quantile d'ordre $\frac{1}{2}$.

III. Tracer un nuage de points à partir d'une table de données

▶ Recopier le code suivant et le compiler. Commenter.

```
table1 = table1.dropna() # on supprime les lignes avec des données manquantes
X = table1['FSS']
Y = table1['TF']
plt.grid()
plt.plot(X,Y,'+')
plt.show()
```

On voit un nuage de points plutôt bien aligné, sous la forme d'une droite décroissante.

▶ Modifier le code précédent pour qu'il affiche également le point moyen du nuage.

```
table1 = table1.dropna()
X = table1['FSS']
Y = table1['TF']
plt.grid()
plt.plot(X,Y,'+')
plt.plot(X.mean(),Y.mean(),'+')
plt.show()
```

IV. Coefficient de corrélation linéaire et régression linéaire

▶ Donner les formules en **Python** pour calculer s la covariance empirique et r le coefficient de corrélation linéaire associés à la série statistique double (X, Y) considérée dans la partie précédente.

```
s = (X*Y).mean() - X.mean() * Y.mean()
r = s/(X.std()*Y.std())
```

▶ Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (X, Y). Commenter

On trouve $r = -0,94$. On a $|r| \geqslant 0,9$ donc un ajustement linéaire est justifié.

▶ Ecrire un programme permettant de représenter la droite de régression linéaire de Y en X au dessus du nuage de points de la série statistique double (X, Y).

```
1  table1 = table1.dropna()
2  X = table1['FSS']
3  Y = table1['TF']
4  plt.grid()
5  plt.plot(X,Y,'+')
6  plt.plot(X.mean(),Y.mean(),'+')
7  s = (X*Y).mean() - X.mean() * Y.mean()
8  a = s/(X.std()**2)
9  b = Y.mean() - a*X.mean()
10 plt.plot(X,a*X+b)
11 plt.show()
```

V. Une régression linéaire avec transformation

Dans certains cas, qui seront pour nous complètement guidés par l'énoncé, on peut appliquer le principe de régression linéaire à un couple obtenu par transformées de X et/ou de Y.

On considère un exemple avec des données correspondant à l'évolution du PIB par habitant (en USD) et du pourcentage de la population en zone urbaine de la Norvège, de 1960 à 2020 (source : World Bank Data).

▶ Recopier et exécuter les instructions suivantes. Commenter le nuage de points.

```
1 data2=pd.read_csv('http://frederic.gaunard.com/2223/tp2_nor.csv',sep=';')
2 X = data2['PIB per capita']
3 Y = data2['Pop urbaine %']
4 plt.grid()
5 plt.plot(X,Y,'+')
6 plt.show()
```

Les points ne sont pas bien alignés, il y a une très forte croissance au début puis cette croissance diminue très fortement.

- Représenter le nuage de points $(\ln(X), Y)$. Commenter.

  Les points sont plus alignés que pour le nuage de points précédent.

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire de Y en $\ln(X)$.

  $r = 0.9473699208635016$

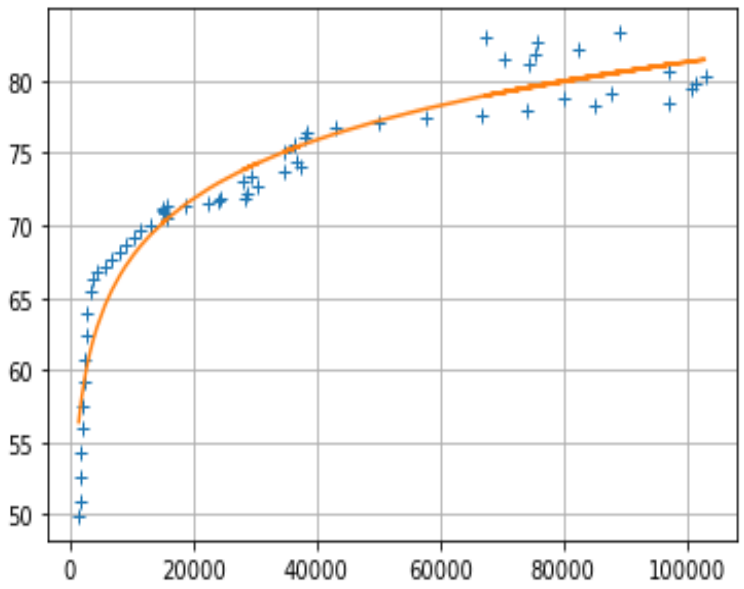
- Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de Y en $\ln(X)$.

  Pour éviter les confusions, on note t l'abscisse et y l'ordonnée. La droite de régression linéaire a alors pour équation $y = at + b$ où $a = 5.87$ et $b = 13.69$.

- En déduire que l'on peut supposer que la relation de dépendance entre X et Y est de la forme : $Y = a\ln(X) + b$.

  Le coefficient de corrélation linéaire de Y en $\ln(X)$ vérifie $|r| \geqslant 0,9$ donc un tel ajustement linéaire est justifié.

- Représenter à nouveau le nuage de points associé à la série statistique double (X, Y) en superposant la courbe d'équation $y = a\ln(x) + b$.



VI. L'utilisation de la bibliothèque pandas aux concours

VI.1. HEC/ESSEC I 2023

On considère X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F et de densité de probabilité f qui dépendent d'un paramètre inconnu θ, où $\theta \in \Theta$, Θ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit a un point de continuité de f, fixé. On souhaite estimer $f(a)$.

Par exemple, si X suit la loi exponentielle de paramètre θ et $a > 0$, on souhaite estimer $\theta \mathrm{e}^{-\theta a}$.

On dispose pour tout $\theta \in \Theta$, d'une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ indépendantes de même loi que X.

On choisit une suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} nh_n = +\infty$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\omega \in \Omega$, on définit :

$$C_n(\omega) \text{ comme le nombre d'indices } i \in [\![1, n]\!] \text{ tels que } X_i(\omega) \in]a - h_n, a + h_n]$$

et $f_n(\omega) = \dfrac{1}{2nh_n} C_n(\omega)$.

On suppose que l'on dispose d'un fichier `stats.csv` qui comporte une colonne nommée `salaire`. On considère que les valeurs de cette colonne constituent la réalisation d'un échantillon de la loi de X dont la taille dépasse 10000.

- Après avoir exécuté `import pandas as pd`, quelle(s) instruction(s) permet(tent) de lire dans le fichier `stats.csv` les valeurs de la colonne `salaire` et d'affecter cette série `pandas` obtenue à une variable `échantillon` ?
  On supposera que le fichier `stats.csv` se trouve dans le répertoire de travail.

```
donnees = pd.read_csv('stats.csv')
échantillon = donnees['salaire']
```

- On souhaite calculer et afficher $f_n(\omega)$ pour a donné, lorsque la réalisation d'un échantillon $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ de la loi de X est représentée en **Python** par `échantillon` et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
  Compléter le script suivant pour qu'il réalise cette tâche.

```
a = float(input('a='))
n = échantillon.count()
h = 1 / np.sqrt(n)
C = 0
for i in range(n):
    if ... and ...:
        ... += 1
print(C / ...)
```

```
a = float(input('a='))
n = échantillon.count()
h = 1 / np.sqrt(n)
C = 0
for i in range(n):
    if échantillon[i] > a - h and échantillon[i] <= a + h:
        C += 1
print(C / (2 * n * h))
```