Corrigés des sujets de révisions
Variables aléatoires à densité

EDHEC 2020 - loi normale, loi de la valeur absolue, estimation de la variance

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, où σ est strictement positif.
On rappelle que la fonction $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\ dt$$

1. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt$$

Comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt$ sont convergentes, on effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{ et } \quad dt = -\ du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = -x \ \Rightarrow\ u = x \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f_X(-u)\ du & \\ & = & \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f_X(u)\ du & \textit{(car } f_X \textit{ est paire)} \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\ du & \\ & = & 1 - F_X(x) & \textit{(car } f_X \textit{ est une densité de probabilité)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(-x) = 1 - F_X(x)}$$

□

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\,F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de la v.a.r. Y : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) & \\ & = & F_X(x) - F_X(-x) & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & F_X(x) - \big(1 - F_X(x)\big) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 2\,F_X(x) - 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\,F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.}$$

□

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

Démonstration.

- La fonction F_Y est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que transformée affine de F_X qui est continue sur cet intervalle,
  - × en 0. En effet :
    - d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$ (par définition de F_Y).
    - d'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = 2\,F_X(0) - 1 = 2\,\dfrac{1}{2} - 1 = 0$

    Ainsi :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) \ = \ F_Y(0) \ = \ \lim_{x \to 0^+} F_Y(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Commentaire

On utilise ici une des propriétés de la v.a.r. X de loi $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$: $F_X(0) = \dfrac{1}{2}$. On rappelle que la démonstration s'effectue comme suit.

- Comme f_X est une densité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt$ est convergente.
- Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ dt &= 2\int_{-\infty}^{0} f_X(t)\ dt \quad \textit{(car } f_X \textit{ est paire)}\\ &= 2\,F_X(0)\end{aligned}$$

- La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ par des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Y de Y, on dérive sa fonction de répartition F_Y sur les intervalles **ouverts** $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in\ ]-\infty,0[$, alors :
$$f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$
  × Si $x \in\ ]0,+\infty[$, alors :
$$f_Y(x) = F_Y'(x) = 2\,F'(x) = 2\,f_X(x) = \frac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}\right)$$
  × On choisit enfin : $f_Y(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_Y : \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\sigma\,\sqrt{2\,\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\,\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0\end{cases}.}$$

□

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Y) = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_Y(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\,f_Y(t)\ dt$.
- Tout d'abord, comme la fonction f_Y est nulle en dehors de $]0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f_Y(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} t\,f_Y(t)\ dt$$
- De plus, la fonction $t \mapsto t\,f_Y(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\,f_Y(t)\ dt$ est donc uniquement impropre en $+\infty$.

- Soit $B \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^B t\, f_Y(t)\, dt &= \int_0^B t\, \frac{2}{\sigma\, \sqrt{2\,\pi}}\, \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)\, dt && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2}{\sigma\, \sqrt{2\,\pi}} \int_0^B t\, \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right)\, dt \\
&= \frac{2}{\cancel{\sigma}\, \sqrt{2\,\pi}} \left[-\sigma^{\cancel{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\sigma^2}\right) \right]_0^B \\
&= -\frac{2\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left(-\frac{B^2}{2\,\sigma^2}\right) + \frac{2\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}}
\end{aligned}$$

- Or, comme $2\,\sigma^2 > 0$: $\lim\limits_{B \to +\infty} \exp\left(-\frac{B^2}{2\,\sigma^2}\right) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ admet une espérance et : } \mathbb{E}(Y) = \frac{2\,\sigma}{\sqrt{2\,\pi}} = \sigma\,\sqrt{\frac{2}{\pi}}.}$$

□

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.
On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_i$.

a) Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.

Démonstration.

- La v.a.r. $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ s'exprime :
  - × à l'aide d'un n-échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ de la v.a.r. Y,
  - × sans mention du paramètre σ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S_n \text{ est donc un estimateur de } \sigma.}$$

- La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. Elle admet donc un biais.
- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma\, \sqrt{\frac{2}{\pi}} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\, \sigma\, \sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } b_\sigma(S_n) = \mathbb{E}(S_n) - \sigma = \sigma\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1\right).}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{E}(S_n) & = & \sigma \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \\ \text{donc} & \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, \mathbb{E}(S_n) & = & \sigma \\ \text{d'où} & \mathbb{E}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n\right) & = & \sigma \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{array}$$

On pose alors : $T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n$.

× La v.a.r. $T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \times \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ s'exprime :
  - à l'aide d'un n-échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la v.a.r. Y,
  - sans mention du paramètre σ.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n \text{ est donc un estimateur de } \sigma.}$$

× La v.a.r. T_n admet une espérance en tant que transformée linéaire de la v.a.r. S_n qui en admet une. De plus, d'après les équivalences précédentes :

$$\mathbb{E}(T_n) \ = \ \mathbb{E}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n\right) \ = \ \sigma$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma.}$$

□

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Démonstration.

- Par formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X^2) & = & \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ & = & \sigma^2 + 0^2 \qquad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2}$$

- On remarque :

$$\mathbb{E}(Y^2) \ = \ \mathbb{E}\big((\,|X|\,)^2\big) \ = \ \mathbb{E}(X^2) \ = \ \sigma^2$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) = \sigma^2}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) \ = \ \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 \ = \ \sigma^2 - \left(\sigma \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\right)^2 \ = \ \sigma^2 - \sigma^2\, \dfrac{2}{\pi} \ = \ \sigma^2 \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \dfrac{\pi - 2}{\pi}\, \sigma^2}$$

- La v.a.r. S_n admet une variance en tant que combinaison de v.a.r. qui en admettent une, et :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) & \textit{(car } Y_1, \ldots, Y_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\pi-2}{\pi}\, \sigma^2 & \textit{(d'après ce qui précède)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n} \dfrac{\pi-2}{\pi}\, \sigma^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{\pi-2}{n\,\pi}\, \sigma^2}$$

□

c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance en tant que transformée linéaire de S_n qui en admet une. Elle admet donc un risque quadratique.
- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r_\sigma(T_n) & = & \mathbb{V}(T_n) + \big(b_\sigma(T_n)\big)^2 & \\ & = & \mathbb{V}\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n\right) + 0^2 & \textit{(car } T_n \textit{ est un estimateur sans biais de } \sigma\textit{)} \\ & = & \dfrac{\pi}{2}\, \mathbb{V}(S_n) & \\ & = & \dfrac{\cancel{\pi}}{2}\, \dfrac{\pi-2}{n\, \cancel{\pi}}\, \sigma^2 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\sigma(T_n) = \frac{\pi-2}{2\,n}\, \sigma^2.}$$

- On remarque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi-2}{2\,n} = 0$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\sigma(T_n) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n \text{ est un estimateur convergente de } \sigma.}$$

□

4. On rappelle qu'en **Python**, si i désigne un entier naturel non nul, la commande `rd.normal(m,s,i)` simule, dans un tableau à `i` colonnes, `i` variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance `m` et de variance `s`^{2}.
Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
sigma = float(input('entrez la valeur de sigma :'))
X = ------ # simulations de X1, ..., Xn
Y = ------ # simulations de Y1, ..., Yn
S = ------
T = ------
```

Démonstration.
On propose le programme **Python** suivant :

```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
sigma = float(input('entrez la valeur de sigma :'))
X = rd.normal(0,sigma,n) # simulations de X1, ..., Xn
Y = np.abs(X) # simulations de Y1, ..., Yn
S = np.mean(Y)
T = S * np.sqrt(np.pi / 2)
```

Détaillons l'obtention de ce script.

- **Début du programme**
  On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier `n` et pour l'écart-type `sigma`.

```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
sigma = float(input('entrez la valeur de sigma :'))
```

- **Simulations des v.a.r.**
  × On commence par simuler un n-échantillon de la v.a.r. X où $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. D'après l'énoncé, cela s'effectue à l'aide de la commande suivante :

```
X = rd.normal(0,sigma,n)
```

  × On simule ensuite un n échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la v.a.r. $Y = |X|$.

```
Y = np.abs(X)
```

  × À l'aide de la simulation de $(Y_1, \ldots, Y_n)$, on en déduit une simulation de $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

```
S = np.mean(Y)
```

  × On simule enfin la v.a.r. $T_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, S_n$.

```
T = S * np.sqrt(np.pi / 2)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
On procédera de même dans les autres questions **Python**.

$\square$

EML 2019 - loi exponentielle, loi du $\min$, couple de v.a.r. à densité

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

PARTIE A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$.

1. a) Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)\, f_V(t) \leqslant f_V(t)$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, +\infty[$.
Comme la fonction F_U est une fonction de répartition :

$$0 \leqslant F_U(t) \leqslant 1$$

De plus, la fonction f_V est une densité de probabilité, donc : $f_V(t) \geqslant 0$. Ainsi :

$$0 \times f_V(t) \leqslant F_U(t) \times f_V(t) \leqslant 1 \times f_V(t)$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)\, f_V(t) \leqslant f_V(t).}$$

□

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\, dt$ converge.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto F_U(t)\, f_V(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle. En effet :
  - × la fonction F_U est continue sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $[0, +\infty[$) en tant que fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.
  - × la fonction f_V est continue sur $[0, +\infty[$ d'après l'énoncé.
- De plus :
  - × $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant F_U(t)\, f_V(t) \leqslant f_V(t)$
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\, dt$ est convergente. En effet, comme f_V est une densité de probabilité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\, dt$ est convergente (et vaut 1). Ainsi, en particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives,}\\ \displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\, dt \text{ est convergente.}\end{array}}$$

□

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\ dt \ = \ \mathbb{P}([U \leqslant V])$$

2. En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) \ = \ \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt.$

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t) \ = \ f_V(t) - F_U(t)\, f_V(t)$$

Or les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\ dt$ sont convergentes d'après la question précédente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt$ est convergente.

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t) - F_U(t)\, f_V(t)\ dt & \\
& = & \displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\ dt - \int_0^{+\infty} F_U(t)\, f_V(t)\ dt & \\
& = & \displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\ dt - \mathbb{P}([U \leqslant V]) & \textit{(d'après le résultat admis de l'énoncé)} \\
& = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\ dt - \mathbb{P}([U \leqslant V]) & \textit{(car } f_V \textit{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\
& = & 1 - \mathbb{P}([U \leqslant V]) & \textit{(car } f_V \textit{ est une densité de probabilité)} \\
& = & \mathbb{P}([U > V]) &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([U > V]) \ = \ \int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt}$$

□

3. **Exemple** : Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } U \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } V \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu) \text{, pour tout } t \in [0, +\infty[\text{ :} \\ F_U(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad f_V(t) = \mu\, \mathrm{e}^{-\mu t}.\end{array}}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) \ = \ \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on précise que les v.a.r. U et V sont des v.a.r. à densité. On est donc bien dans le cadre d'application de la question ***2.***
- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U > V]) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big)\, f_V(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\cancel{1} - \big(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\big)\Big)\ \mu\, \mathrm{e}^{-\mu\, t}\ dt & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \mu \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\ \mathrm{e}^{-\mu\, t}\ dt & \\ & = & \mu \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\ dt & \end{array}$$

- De plus, soit $A \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^{A} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\ dt \ = \ \left[\, -\frac{1}{\lambda+\mu}\ \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \,\right]_0^A \ = \ -\frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)A} - 1\right) \ = \ -\frac{1}{\lambda+\mu}\ \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)A} + \frac{1}{\lambda+\mu}$$

Or, comme $\lambda > 0$ et $\mu > 0$: $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)A} = 0$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\ dt = \frac{1}{\lambda+\mu}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([U > V]) \ = \ \mu \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\ dt \ = \ \frac{\mu}{\lambda+\mu}.}$$

□

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}([M_n > t])$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, +\infty[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} [M_n > t] & = & [\min(T_1, \ldots, T_n) > t] \\ & = & \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [T_i > t] \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([M_n > t]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [T_i > t]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([T_i > t]) & \textit{(car les v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - F_{T_i}(t)) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} (\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda t})) & \textit{(car, pour tout } i \in [\![1, n]\!], \ T_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \textit{ et } t \geqslant 0) \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda t} & \\ & = & \left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[, \ \mathbb{P}([M_n > t]) = \mathrm{e}^{-n\lambda t}}$$

Commentaire

- On fait ici l'étude de la loi d'un minimum de v.a.r. . Cette étude est classique et commence toujours par l'énoncé de l'égalité entre événements, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$[\min(T_1, \ldots, T_n) > t] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} [T_i > t]$$

- On rappelle que dans le cas de l'étude d'un maximum de v.a.r. , on commence par une égalité similaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$[\max(T_1, \ldots, T_n) \leqslant t] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} [T_i \leqslant t]$$

□

b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
Reconnaître la loi de M_n et préciser son (ses) paramètre(s).

Démonstration.

- Tout d'abord, comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on a : $T_i(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $t \in]-\infty, 0[$, alors : $[M_n \leqslant t] = \varnothing$ car $M_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :

$$F_{M_n}(t) \ = \ \mathbb{P}([M_n \leqslant t]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $t \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{M_n}(t) & = & \mathbb{P}([M_n \leqslant t]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([M_n > t]) & \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{M_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(n\lambda)$.
  Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda).}$$

□

5. a) Montrer : $\mathbb{P}([N=1]) \ = \ \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) \ = \ \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, notons que l'événement $[N=1]$ est réalisé si et seulement si le plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ est 1, autrement dit, si et seulement si l'événement $[T_1 \leqslant T_0]$ est réalisé.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit : } [N=1] = [T_1 \leqslant T_0]. \text{ D'où :} \\ \mathbb{P}([N=1]) \ = \ \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]).\end{array}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) & = & 1 - \mathbb{P}([T_1 > T_0]) & \\ & = & 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda + \lambda} & \textit{(d'après \textbf{3.b)} car } T_1 \textit{ et } T_0 \textit{ sont} \\ & & & \textit{indépendantes et suivent la loi } \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & 1 - \dfrac{\cancel{\lambda}}{2\cancel{\lambda}} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) = \dfrac{1}{2}.}$$

Commentaire

On utilise ici le résultat d'une question précédente. On n'omettra donc pas de préciser que toutes les hypothèses nécessaires à son application sont vérifiées.

□

b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ [N > n] \cup [N = 0] \ = \ [M_n > T_0]$.
En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}([N > n] \cup [N = 0])$ en fonction de n.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Tout d'abord :

$$[M_n > T_0] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} \ [T_i > T_0]$$

Démontrons donc : $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [T_i > T_0] = [N > n] \cup [N = 0]$.

Soit $\omega \in \Omega$.

($\subset$) Supposons $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [T_i > T_0]$, *i.e.* , pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T_i(\omega) > T_0(\omega)$.
Deux cas se présentent alors :
- soit il existe un entier $k > n$ tel que $T_k(\omega) \leqslant T_0(\omega)$.
  Alors : $N(\omega) > n$, c'est-à-dire $\omega \in [N > n]$.
- soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $T_k(\omega) > T_0(\omega)$.
  Alors : $N(\omega) = 0$, c'est-à-dire $\omega \in [N = 0]$.

Finalement : $\omega \in [N > n]$ `OU` $\omega \in [N = 0]$. Donc : $\omega \in [N > n] \cup [N = 0]$.

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} \ [T_i > T_0] \ \subset \ [N > n] \cup [N = 0]}$$

($\supset$) Supposons $\omega \in [N > n] \cup [N = 0]$, *i.e.* $N(\omega) > n$ ou $N(\omega) = 0$.
Alors, dans les deux cas, par définition de la v.a.r. N, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $T_i(\omega) > T_0(\omega)$.
Autrement dit : $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} [T_i > T_0]$.

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{n} [T_i > T_o] \ \supset \ [N > n] \cup [N = 0]}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } [M_n > T_0] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} [T_i > T_0] \ = \ [N > n] \cup [N = 0].}$$

- Les v.a.r. M_n et T_0 sont :
  - × des v.a.r. à densité,
  - × indépendantes par lemme des coalitions.

  On peut donc appliquer le résultat de la question ***2.*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([M_n > T_0]) &= \int_0^{+\infty} \big(1 - F_{M_n}(t)\big)\, f_{T_0}(t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\cancel{1} - \big(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-n\lambda t}\big)\Big)\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dt \quad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.b)}}\textit{)} \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda t}\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dt \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda t}\, dt
\end{aligned}$$

- De plus, soit $A \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{A} \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda t}\, dt &= \left[-\frac{1}{(n+1)\lambda}\, \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda t} \right]_0^A \\
&= -\frac{1}{(n+1)\lambda} \left(\mathrm{e}^{-(n+1)\lambda A} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{(n+1)\lambda}\, \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda A} + \frac{1}{(n+1)\lambda}
\end{aligned}$$

  Or, comme $\lambda > 0$ et $n > 0$: $\lim\limits_{A \to +\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda A} = 0$. Ainsi :

$$\mathbb{P}([M_n > T_0]) \ = \ \cancel{\lambda}\, \frac{1}{(n+1)\cancel{\lambda}} \ = \ \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}([N > n] \cup [N = 0]) \ = \ \mathbb{P}([M_n > T_0]) \ = \ \frac{1}{n+1}.}$$

Commentaire

L'énoncé original proposait de démontrer l'égalité : $[N > n] = [M_n > T_0]$. Cependant : $[M_n > T_0] \not\subset [N > n]$. En effet, considérons l'événement $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0]$.

× Tout d'abord :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0] \ \subset \ \bigcap_{i=1}^{n} [T_i > T_0] \ = \ [M_n > T_0]$$

× Soit $\omega \in \Omega$.
On sait que $\omega \in \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0]$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $T_i(\omega) > T_0(\omega)$.
Par définition de N, cela équivaut à $N(\omega) = 0$, *i.e.* $\omega \in [N = 0]$. Ainsi :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0] \ = \ [N = 0]$$

Or : $[N = 0] \not\subset [N > n]$. Donc : $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0] \not\subset [N > n]$.

× Si $[M_n > T_0] \subset [N > n]$, on obtiendrait par transitivité :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} [T_i > T_0] \ \subset \ [M_n > T_0] \ \subset \ [N > n]$$

Comme ce n'est pas le cas, on a bien : $[M_n > T_0] \not\subset [N > n]$.

□

c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{P}([N = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- Notons tout d'abord l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} [N > n-1] &= [N \geqslant n] && \textit{(car } N \textit{ est à valeurs entières)} \\ &= [N = n] \cup [N > n] \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} [N > n-1] \cup [N = 0] &= \big([N = n] \cup [N > n]\big) \cup [N = 0] \\ &= [N = n] \cup \big([N > n] \cup [N = 0]\big) && \textit{(par associativité de } \cup\textit{)} \end{aligned}$$

- De plus, les événements $[N = n]$ et $[N > n] \cup [N = 0]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([N > n-1] \cup [N = 0]) \ = \ \mathbb{P}([N = n]) + \mathbb{P}([N > n] \cup [N = 0])$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([N=n]) & = & \mathbb{P}([N>n-1]\cup[N=0]) - \mathbb{P}([N>n]\cup[N=0]) \\ & = & \dfrac{1}{(n-\cancel{1})+\cancel{1}} - \dfrac{1}{n+1} \qquad \textit{(d'après } \textbf{5.b)} \textit{ car } n\in\mathbb{N}^* \textit{ et } n-1\in\mathbb{N}^*\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \\ & = & \dfrac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{n(n+1)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \mathbb{P}([N=n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}.}$$

□

d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N=0])$.

Démonstration.

- La famille $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([N=0]) & = & 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n]) \\ & = & 1 - \left(\mathbb{P}([N=1]) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N=n])\right) \\ & = & 1 - \dfrac{1}{2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} \qquad \textit{(d'après } \textbf{5.a)} \textit{ et } \textbf{5.c)}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} \end{array}$$

- Notons d'abord que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi, soit $N \geqslant 2$:

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n(n+1)} & = & \sum\limits_{n=2}^{N} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) \\ & = & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N+1} \qquad \textit{(par télescopage)} \\ & \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente et que sa somme vaut $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([N=0]) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0.}$$

Commentaire

Prendre l'initiative de la décomposition :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

pour faire apparaître la somme télescopique, peut paraître ardu. On s'efforcera donc de garder en mémoire cet exemple classique de somme télescopique.

□

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n\,\mathbb{P}([N=n]) &= \cancel{0 \times \mathbb{P}([N=0])} + 1 \times \mathbb{P}([N=1]) + \sum_{n=2}^{N} n\,\mathbb{P}([N=n]) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{N} \cancel{n}\,\frac{1}{\cancel{n}(n+1)} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{5.c)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

- Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.

  Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,\mathbb{P}([N=n])$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } N \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

□

EDHEC 2018 - loi exponentielle, loi normale, loi du carré, estimation, intervalle de confiance

On admet que toutes les variables aléatoires considérés dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x \geqslant 0$: $\frac{x}{a} \geqslant 0$ car $a > 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} > 0$. Ainsi, $f(x) = \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} \geqslant 0$. Donc : $f(x) \geqslant 0$.
  - Si $x < 0$: $f(x) = 0 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante (nulle) sur cet intervalle.
  La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

Commentaire

La continuité sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points suffit ici.
Mais on peut remarquer que f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0, \qquad f(0) \ = \ 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} = 0$$

- Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  - Tout d'abord : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt$, car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
    Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\, dt &= \int_0^A \frac{t}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\, dt \\ &= -\int_0^A \frac{-t}{a}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\, dt \\ &= -\left[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \right]_0^A \\ &= -\left(\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a}} - \mathrm{e}^0 \right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a}} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

□

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
– Si $x < 0$, alors :

$$F_X(x) \ = \ \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{x} 0\ dt \ = \ 0$$

car f est nulle sur $]-\infty, 0[$.
– Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_0^x f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \int_0^x \frac{t}{a}\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\ dt && \textit{(par définition de } f \textit{ sur } [0,x]\textit{)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} && \textit{(d'après le calcul de la question précédente)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

□

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration.

- Notons $\varphi : x \mapsto \dfrac{x^2}{2a}$ de sorte que $Y = \varphi(X)$.

$$Y(\Omega) = (\varphi(X))(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big) \subset \ [0,+\infty[$$

En effet, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) \ = \ [0,+\infty[$ (φ ne prend que des valeurs positives).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  – Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \ [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  – Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\Big(\Big[\tfrac{X^2}{2a} \leqslant x\Big]\Big) \\ &= \mathbb{P}\big(\big[X^2 \leqslant 2a\ x\big]\big) && \textit{(car } a > 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\Big(\Big[\sqrt{X^2} \leqslant \sqrt{2a\ x}\Big]\Big) && \textit{(car la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\big(\big[\ |X| \leqslant \sqrt{2a\ x}\big]\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\big[-\sqrt{2a\ x} \leqslant X \leqslant \sqrt{2a\ x}\big]\big) \\ &= F_X\big(\sqrt{2a\ x}\big) - F_X\big(-\sqrt{2a\ x}\big) && \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ &= F_X\big(\sqrt{2a\ x}\big) = 1 - \exp\left(-\frac{\big(\sqrt{2a\ x}\big)^2}{2a}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\cancel{2a}\ x}{\cancel{2a}}\right) \end{aligned}$$

- On en conclut que X admet pour fonction de répartition :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

□

b) On rappelle qu'en **Python** la commande `rd.exponential(c)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{c}$. Écrire un script **Python** demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

Démonstration.

- Dans cette question, on considère : $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

Commentaire

Ce premier point amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Il y a donc une différence fondamentale entre les valeurs que peut prendre X et les valeurs de F_X ou f_X dont la définition dépend d'une probabilité $\mathbb{P}$. Par exemple, si l'on sait que f_X est nulle en dehors de $]0, +\infty[$ alors : :

$$\mathbb{P}\big(\,[X \leqslant 0]\,\big) \ = \ \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{0} 0\ dt \ = \ 0$$

  Cela ne signifie pas que X ne prend pas de valeurs négatives mais simplement que cela se produit avec probabilité nulle.

- En toute rigueur, on ne peut donc pas confondre $X(\Omega)$ et l'ensemble sur lequel f_X ne s'annule pas (cela n'a pas beaucoup de sens puisque f_X est définie à un nombre fini de points près). Il est donc fréquent que les énoncés précisent, lors de l'introduction de la v.a.r. X, son ensemble image :

  On considère un variable aléatoire X, **à valeurs positives***, de densité f*

  C'est ce qu'on se permet de faire dans cette question.

- Par définition : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$. Ainsi : $X^2 = 2a\ Y$ et $\sqrt{X^2} = \sqrt{2a\ Y}$.
  Enfin, comme on a supposé que X ne prend que des valeurs positives, on obtient :

$$X = \sqrt{2a\ Y}$$

- D'après la question précédente : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On en déduit le script suivant :

```
a = float(input('Prière d\'entrer une valeur strictement positive'))
y = rd.exponential(1)
x = np.sqrt(2*a*y)
print(x)
```

□

4. a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel associe $x^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$, est paire.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$g(-x) \; = \; (-x)^2 \, \exp\left(-\frac{(-x)^2}{2a}\right) \; = \; x^2 \, \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \; = \; g(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ est paire.}}$$

□

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètre 0 et a.

Démonstration.
Notons Z une v.a.r. telle que : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a)$.

- Alors Z admet pour densité la fonction f_Z définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_Z : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}\,\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$$

- La v.a.r. Z admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Z) = a$$

De plus, d'après la formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(Z) \; = \; \mathbb{E}\big(Z^2\big) - \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2$. Et ainsi :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \; = \; \mathbb{V}(Z) + \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2 \; = \; a + 0 \; = \; a$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z \text{ admet pour moment d'ordre 2 : } \mathbb{E}\big(Z^2\big) = a.}$$

Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est particulièrement le cas dans cet énoncé où les propriétés caractéristiques de lois usuelles (loi exponentielle, loi normale) sont explicitement demandées.
- Profitons-en pour rappeler que si T est une v.a.r. telle que $T \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ alors T admet pour densité la fonction f_T définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_T : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

De plus, T admet une espérance et une variance données par : $\mathbb{E}(T) = \mu$ et $\mathbb{V}(T) = \sigma^2$.

□

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \; f_X(t) \; dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \; f_X(t) \; dt$.

- Comme f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$$

- Or, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$t\ f_X(t) \ = \ \frac{1}{a}\ t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \ = \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\ \frac{1}{\sqrt{a}\ \sqrt{2\pi}}\ t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \ = \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\ t^2 f_Z(t)$$

  On a rappelé en question précédente que Z admet un moment d'ordre 2.
  De plus, on a démontré en question ***4.a)*** que la fonction $g : t \mapsto t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}$ est paire. Il en est de même de la fonction $t \mapsto t^2\ f_Z(t)$ qui n'est autre que g, à une constante multiplicative près.
  Ainsi :

$$\mathbb{E}(Z^2) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\ dt \ = \ 2\ \int_{0}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\ dt \ = \ 2\ \int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\ t f_X(t)\ dt$$

- On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t f_X(t)\ dt$ est convergente.
  Ainsi, X admet une espérance qui vérifie :

$$\mathbb{E}(Z^2) \ = \ 2\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet pour espérance : } \mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\ \sqrt{a}}\ \mathbb{E}(Z^2) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2\ \sqrt{a}}\ a \ = \ \frac{\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2}}.}$$ □

5. a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

Démonstration.

- On a démontré en question ***3.a)*** : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1} = 1.}$$

- Par définition : $X^2 = 2a\ Y$. La v.a.r. X^2 admet donc une espérance car c'est la transformée affine d'une v.a.r. Y qui admet une espérance.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et par linéarité de l'espérance :}\\ \mathbb{E}(X^2) = 2a\ \mathbb{E}(Y) = 2a.\end{array}}$$ □

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}$$

Démonstration.
On a démontré en question précédente que X admet un moment d'ordre 2. Ainsi, X admet une variance et par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) \ &= \ \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= \ 2a - \left(\frac{\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2}}\right)^2 \ = \ 2a - \frac{a\pi}{2} \ = \ \frac{4a - a\pi}{2} \ = \ \frac{(4-\pi)\ a}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}}$$ □

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.
On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} {X_k}^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

Démonstration.
La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big({X_k}^2\big) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}n} \sum_{k=1}^{n} \cancel{2}a && \textit{(car } \mathbb{E}\big(X^2\big) = 2a\textit{)} \\ &= \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n}a \ = \ a \end{aligned}$$

Ainsi, S_n admet un biais donné par :

$$b_a(S_n) \ = \ \mathbb{E}(S_n) - a \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S_n \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } a.}$$

□

b) Montrer que X^2 possède une variance et que $\mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2$.

Démonstration.
Par définition : $X^2 = 2a\, Y$. Ainsi, X^2 admet une variance car c'est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une variance. Par propriété de la variance, on obtient :

$$\mathbb{V}\big(X^2\big) \ = \ \mathbb{V}\big(2a\, Y\big) \ = \ 4a^2\, \mathbb{V}(Y) \ = \ 4a^2\, \frac{1}{1^2} \ = \ 4a^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X^2 \text{ admet une variance donnée par } \mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2.}$$

□

c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a.
En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

Démonstration.

- La v.a.r. S_n admet un moment d'ordre 2 en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent des moments d'ordre 2.
- Ainsi, S_n admet un risque quadratique. Et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned} r_a(S_n) &= \mathbb{V}_a(S_n) + \cancel{\big(b_a(S_n)\big)^2} && \textit{(car } S_n \textit{ est un estimateur sans biais)} \\ &= \mathbb{V}_a\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) \ = \ \frac{1}{4n^2}\, \mathbb{V}_a\left(\sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\ &= \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}_a\left({X_k}^2\right) && \textit{(les v.a.r. } X_k \textit{ sont indépendantes donc, d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. } X_k^2 \textit{ le sont aussi)} \\ &= \frac{1}{\cancel{4}n^2} \sum_{k=1}^{n} \cancel{4}a^2 \ = \ \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\, \cancel{n}a^2 \ = \ \frac{a^2}{n} \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$r_a(S_n) \;=\; \frac{a^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Comme } \lim\limits_{n\to+\infty} r_a(S_n) = 0, \text{ on en déduit que } S_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$$ □

7. On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\; \mathbb{P}\Big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big) \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

Démonstration.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour toute v.a.r. U qui admet une variance :

$$\forall \varepsilon > 0,\; \mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \big) \;\leqslant\; \frac{\mathbb{V}(U)}{\varepsilon^2}$$

Commentaire

Dans cette question, on a considéré l'événement $[|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon]$ avec une inégalité stricte. Habituellement, le résultat est plutôt présenté avec une inégalité large. Cette dernière permet cependant d'obtenir celle utilisée ici. Pour cela, il suffit de remarquer :

$$[|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \;\subset\; [|U - \mathbb{E}(U)| \geqslant \varepsilon]$$

et ainsi, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \big) \;\leqslant\; \mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| \geqslant \varepsilon] \big)$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $U = S_n$ qui admet une variance (d'après la question ***6.c)***) et à $\varepsilon > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}\big([|S_n - a| > \varepsilon] \big) & & \dfrac{a^2}{n\ \varepsilon^2} \end{array}$$

On en déduit :

$$-\mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) \;\geqslant\; -\frac{a^2}{n\ \varepsilon^2}$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \leqslant \varepsilon] \big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) \;\geqslant\; 1 - \frac{a^2}{n\ \varepsilon^2}$$

- Enfin, comme on a supposé : $0 < a \leqslant 1$, alors, par croissance de la fonction élévation au carré sur $\mathbb{R}_+$ on a :

$$a^2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{a^2}{n\ \varepsilon^2} \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall \varepsilon > 0,\; \mathbb{P}\Big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big) \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}.}$$ □

b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec niveau de confiance au moins égal à 95%.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon]\big) \ \geqslant\ 1 - \dfrac{1}{n\ \varepsilon^2}$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} [|S_n - a| \leqslant \varepsilon] &= [-\varepsilon \leqslant S_n - a \leqslant \varepsilon] \\ &= [-S_n - \varepsilon \leqslant -a \leqslant -S_n + \varepsilon] \\ &= [S_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant S_n + \varepsilon] \\ &= [a \in [S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]\ ] \end{aligned}$$

- Ainsi, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, on obtient, par la question précédente :

$$\mathbb{P}\Big(\left[S_n - \frac{1}{10} \leqslant a \leqslant S_n + \frac{1}{10}\right]\Big) \ \geqslant\ 1 - \frac{1}{n\ \left(\frac{1}{10}\right)^2} = 1 - \frac{100}{n}$$

On cherche un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%. Il faut donc trouver n tel que : $1 - \dfrac{100}{n} \geqslant 0,95$. Or :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{100}{n} \geqslant 0,95 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{100}{n} \leqslant 0,05 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{n}{100} \geqslant \frac{1}{0,05} \qquad \textit{(car la fonction inverse est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{100}{0,05} \end{aligned}$$

avec : $\dfrac{100}{0,05} = \dfrac{100}{5 \times 10^{-2}} = \dfrac{20}{10^{-2}} = 20 \times 10^2 = 2000$.

Pour $n \geqslant 2000$, $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec niveau de confiance au moins égal à 95%.

□

EML 2020 - loi de Pareto, loi exponentielle, loi uniforme, loi normale centrée réduite, estimation, intervalle de confiance asymptotique

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > b \\ a\,\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, b[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]b, +\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto x^{a+1}$ qui :
    - est continue sur $]b, +\infty[$,
    - `NE S'ANNULE PAS` sur $]b, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } b.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in\,]-\infty, b[$, alors : $f(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x \in [b, +\infty[$, alors, comme $a > 0$ et $b > 0$: $f(x) = a\,\dfrac{b^a}{x^{a+1}} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Démontrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$$
  - × La fonction f est continue par morceaux sur $[b, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx$ est donc seulement impropre en $+\infty$.
  - × Soit $B \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_b^B f(x)\,dx &= \int_b^B a\,\frac{b^a}{x^{a+1}}\,dx = a\,b^a \int_b^B x^{-a-1}\,dx \\ &= a\,b^a \left[\frac{x^{-a}}{-a}\right]_b^B = -b^a \left[\frac{1}{x^a}\right]_b^B \qquad \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\ &= -b^a \left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a}\right) \end{aligned}$$

× Or, comme $a > 0$: $\lim\limits_{B \to +\infty} \dfrac{1}{B^a} = 0$. D'où :

$$\lim_{B \to +\infty} - b^a \left(\frac{1}{B^a} - \frac{1}{b^a} \right) = -b^a \left(0 - \frac{1}{b^a} \right) = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ est convergente et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

Démonstration.

- Dans la suite, on considère : $X(\Omega) = [b, +\infty[$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, b[$, alors : $[X \leqslant x] = \varnothing$ (car $X(\Omega) = [b, +\infty[$). D'où :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - × si $x \in [b, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{b}^{x} f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [b, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{b}^{x} a \frac{b^a}{t^{a+1}}\ dt \\ &= a\, b^a \int_{b}^{x} t^{-a-1}\ dt \\ &= \cancel{a}\, b^a \left[\frac{t^{-a}}{-\cancel{a}} \right]_b^x && \textit{(car } a \neq 0\textit{)} \\ &= -b^a \left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{b^a} \right) = 1 - \left(\frac{b}{x} \right)^a \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x} \right)^a & \text{si } x \geqslant b \end{cases}}$$

Commentaire

Profitons de cette question pour faire une remarque sur la notation $X(\Omega)$.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

  Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.

- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \subseteq\ ]-\infty, +\infty[$.
  En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.

- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  - × l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  - × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.

- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  - × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on se permet d'écrire :

    « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0,1]$. »

  - × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
    On se permet alors d'écrire :

    « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient à l'aide d'une dsijonction de cas). □

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Montrer que la variable aléatoire $b\,U^{-\frac{1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto b\,x^{-\frac{1}{a}}$, de sorte que $Y = b\,U^{-\frac{1}{a}} = h(U)$.

  On **considère** : $U(\Omega) = \,]0,1]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(U)\big)(\Omega) \ = \ h\big(U(\Omega)\big) \\ &= h(]0,1]) \\ &= [h(1), \lim_{x \to 0} h(x)[&& \textit{(car, comme } a > 0 \textit{ et } b > 0\textit{, la fonction } h \textit{ est continue et strictement décroissante sur }]0,1]\textit{)} \\ &= [b, +\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) = [b, +\infty[.}$$

Commentaire

Rappelons que la v.a.r. $Y = h(U)$ est par définition l'application :

$$Y = h(U) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & h\big(U(\omega)\big) \end{array}$$

Comme la fonction h est définie uniquement sur $]0, +\infty[$, la v.a.r. $Y = h(U)$ est bien définie seulement si :

$$\forall \omega \in \Omega,\ U(\omega) \subset \,]0, +\infty[$$

Autrement dit, il est primordial, pour la bonne définition de l'objet $Y = h(U)$, de considérer que U est à valeurs dans $]0, 1] \subset \,]0, +\infty[$ (et non $[0, 1[\not\subset \,]0, +\infty[$ comme pouvait le suggérer l'énoncé).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in \,]-\infty, b[$, alors : $[Y \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y(\Omega) = [b, +\infty[$). D'où :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}(\,[Y \leqslant x]\,) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - × si $x \in [b, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}(\,[Y \leqslant x]\,) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[b\, U^{-\frac{1}{a}} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U^{-\frac{1}{a}} \leqslant \dfrac{x}{b}\right]\right) & \textit{(car } b > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U \geqslant \left(\dfrac{x}{b}\right)^{-a}\right]\right) & \textit{(par stricte décroissance de la fonction } x \mapsto x^{-a} \textit{ sur }]0, +\infty[, \textit{ car } a > 0\textit{)} \\ & = & 1 - F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^{a}\right) & \textit{(car } U \textit{ est une v.a.r. à densité)} \end{array}$$

  - × Or :

$$\begin{array}{lcl} & x \geqslant b & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{b} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[, \textit{ car } b > 0\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{b}{x} \leqslant 1 & \textit{(car } b > 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & \left(\dfrac{b}{x}\right)^{a} \leqslant 1 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^{a} \textit{ sur } [0, +\infty[, \textit{ car } a > 0\textit{)} \end{array}$$

    Comme $a > 0$, $b < 0$ et $x > 0$, on en déduit : $0 < \left(\dfrac{b}{x}\right)^{a} \leqslant 1$.

× De plus, comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\,]0,1]\,)$: $F_U : u \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u \leqslant 0 \\ u & \text{si } 0 < u \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$.

Ainsi : $F_U\left(\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\right) = \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geqslant b \end{cases}.}$$

× D'après la question ***2.***, on reconnaît la fonction de répartition F_X de X qui suit la loi de Pareto de paramètres a et b.
Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ suit la loi de Pareto de paramètres } a \text{ et } b.}$$

Commentaire

- On a démontré, lors de l'étude de $Y(\Omega)$, que h réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[b,+\infty[$. Il est possible de déterminer l'expression de $h^{-1} : [b,+\infty[\to]0,1]$.
  Pour ce faire, on remarque que pour tout $x \in]0,1]$ et $y \in [b,+\infty[$, on a :
  $$\begin{aligned} y = h(x) \quad & \Leftrightarrow \quad y = b\,x^{-\frac{1}{a}} \\ & \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{b}{y}\right)^a \\ & \Leftrightarrow \quad x = h^{-1}(y) \end{aligned}$$
  On démontre ainsi que h^{-1} a pour expression : $h^{-1} : x \mapsto \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$.
- On retrouve ici l'expression de la quantité $\left(\dfrac{b}{x}\right)^a$ apparaissant à la fin de la résolution de la question. Ce n'est pas surprenant car la méthode utilisée ici consiste justement à faire apparaître, étape par étape, la quantité $h^{-1}(x)$. Plus précisément, on a :
  $$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\big(\,[Y \leqslant x]\,\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\,[h(U) \leqslant x]\,\big) \;=\; \mathbb{P}\big(\,\big[U \leqslant h^{-1}(x)\big]\,\big) \;=\; F_U\big(h^{-1}(x)\big)$$
  On comprend mieux pourquoi cette manière de procéder est appelée **méthode d'inversion**.

□

b) En déduire une fonction **Python** d'en-tête `def pareto(a,b):` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante :

```
def pareto(a,b):
    U = rd.random()
    return b * U**(-1/a)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `pareto`,
  - × elle prend en entrée 2 paramètres `a` et `b`

```
1 def pareto(a,b):
```

- **Contenu de la fonction**
  En ligne 2, on stocke dans la variable `U` une simulation de la v.a.r. U de loi $\mathcal{U}(\,]0,1]\,)$.

```
2     U = rd.random()
```

D'après la question précédente, la v.a.r. $Y = b\,U^{-\frac{1}{a}}$ suit la même loi que la v.a.r. X, dès lors que $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\,]0,1]\,)$.
Ainsi, en ligne 3, on renvoie une simulation de la v.a.r. Y, c'est-à-dire de X.

```
3     return b * U**(-1/a)
```

□

c) On considère la fonction **Python** ci-dessous.
Que contient la liste `L` renvoyée par la fonction `mystere` ?

```
def mystere(a,b):
    L = []
    for p in range(2,7):
        S = 0
        for k in range(10**p):
            S = S + pareto(a,b)
        L.append(S/10**p)
    return L
```

Démonstration.
Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**
  On commence par préciser la structure de la fonction :
  - × cette fonction se nomme `mystere`,
  - × elle prend en entrée 2 paramètres `a` et `b`,

```
def mystere(a,b):
```

La variable de sortie `L` est ensuite initialisée à la liste vide.

```
    L = []
```

- **Structure itérative**
  Commençons par décrire ce qu'il se passe à l'intérieur de cette première structure itérative (`for p in range(2,7):`) avant de s'intéresser à l'utilité de la variable `p`.
  - × On commence par initialiser une variable `S` à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

× Les lignes 5 à 6 permettent de mettre à jour la variable `S` pour qu'elle contienne la somme de 10^p simulations de la v.a.r. X suivant la loi de Pareto de paramètres `a` et `b`. Pour cela, on met de nouveau en place une structure conditionnelle (boucle for) et on utilise la fonction `pareto` définie en question précédente pour obtenir les simulations de la v.a.r. X.

```
5           for k in range(10**p):
6               S = S + pareto(a,b)
```

× Enfin, on met à jour la liste `L` en lui concaténant à droite la valeur stockée dans la variable `S / 10**p`.

```
5           L.append(S/10**p)
```

Remarquons que, comme `S` contient la somme de 10^p simulations de la v.a.r. X, la variable `S / 10 ^ p` contient la moyenne des 10^p simulations de X.
Or, l'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est :

× de simuler un grand nombre de fois ($N = 10^p$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. X.
Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(x_1, \ldots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(X_1, \ldots, X_N)$ de la v.a.r. X.
(les v.a.r. X_i sont indépendantes et de même loi que X)

× de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} \ = \ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \ \simeq \ \mathbb{E}(X)$$

La variable `S / 10 ^ p` est donc une approximation de $\mathbb{E}(X)$.

- **Sortie de la fonction**

× À la fin de la boucle (`for p in range(2,7):`), la variable `L` est donc une liste à 5 coordonnées (autant que de valeurs prises par la variable `p`) contenant 5 approximations de $\mathbb{E}(X)$.

× Plus précisément, la variable `p` prend successivement les valeurs de l'ensemble $[\![2, 6]\!]$.
Ainsi, la variable `L` contient :

- en $1^{\text{ère}}$ coordonnée, une approximation de $\mathbb{E}(X)$ obtenue à l'aide de 10^2 simulations de X,
- en $2^{\text{ème}}$ coordonnée, une approximation de $\mathbb{E}(X)$ obtenue à l'aide de 10^3 simulations de X,
- $\cdots$
- en $5^{\text{ème}}$ coordonnée, une approximation de $\mathbb{E}(X)$ obtenue à l'aide de 10^6 simulations de X.

La variable `L` est donc une liste contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$ où X suit une loi de Pareto de paramètres `a` et `b`.

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé avec précision la réponse à cette question. Cependant, fournir la bonne réponse démontre la bonne compréhension de l'algorithme et permet d'obtenir tous les points alloués à cette question. On procèdera de même dans les autres questions **Python**.

□

d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b.
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
--> mystere(2,1)
    ans =
        1.9306917   1.9411352   1.9840089   1.9977684   2.0012415
--> mystere(3,2)
    ans =
        3.1050951   3.0142956   2.9849407   2.9931656   2.9991517
--> mystere(1,4)
    ans =
        21.053151   249.58609   51.230522   137.64549   40.243918
```

Démonstration.

- L'instruction `mystere(2,1)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1.
Les 5 valeurs affichées semblent être de plus en plus proche de 2.

  $$\boxed{\text{On peut donc conjecturer que, si } X \text{ suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1, alors : } \mathbb{E}(X) = 2.}$$

- L'instruction `mystere(3,2)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2.
Les 5 valeurs affichées semblent être de plus en plus proche de 3.

  $$\boxed{\text{On peut donc conjecturer que, si } X \text{ suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2, alors : } \mathbb{E}(X) = 3.}$$

- L'instruction `mystere(1,4)` renvoie un vecteur contenant 5 approximations de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$, où X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4.
Les 5 valeurs affichées ne semblent pas converger vers une valeur en particulier.

  $$\boxed{\text{On peut donc conjecturer que, si } X \text{ suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4, alors elle n'admet pas d'espérance.}}$$

□

4. a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a\,b}{a-1}$$

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\ f(x)\ dx$.
- Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx = \int_{b}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$$

- De plus, pour tout $x \in [b, +\infty[$:

$$x\,f(x) = x\,\frac{a\,b^a}{x^{a+1}} = a\,b^a\,\frac{1}{x^a}$$

- Or $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ ($b > 0$), d'exposant a. Elle est donc convergente si et seulement si $a > 1$.

$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si } a > 1.}$

- Supposons alors $a > 1$.
Soit $B \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_b^B x\, f(x)\, dx &= a\, b^a \int_b^B x^{-a}\, dx \\
&= a\, b^a \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right]_b^B \qquad \textit{(car } a \neq 1\textit{)} \\
&= -\frac{a\, b^a}{a-1} \left[\frac{1}{x^{a-1}} \right]_b^B \\
&= -\frac{a\ b^a}{a-1} \left(\frac{1}{B^{a-1}} - \frac{1}{b^{a-1}} \right)
\end{aligned}$$

Comme $a - 1 > 0$: $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{1}{B^{a-1}} = 0$. D'où :

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{a\ b^a}{a-1} \left(0 - \frac{1}{b^{a-1}} \right) = -\frac{a\ b^a}{a-1} \left(-\frac{1}{b^{a-1}} \right) = \frac{a\ \cancel{b^a}}{(a-1)\cancel{b^a}\ b^{-1}} = \frac{a\, b}{a-1}$$

$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 1 : \mathbb{E}(X) = \dfrac{a\, b}{a-1}.}$

Commentaire

On remarque qu'on trouve bien des résultats cohérents avec les résultats obtenus avec **Scilab** en question précédente :

× si X suit une loi de Pareto de paramètres 2 et 1, alors X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2 \times 1}{2 - 1} = 2$$

× si X suit une loi de Pareto de paramètres 3 et 2, alors X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3 \times 2}{3 - 1} = 3$$

× si X suit une loi de Pareto de paramètres 1 et 4, alors X n'admet pas d'espérance. □

b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{a\, b^2}{(a-1)^2\, (a-2)}$$

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\, f(x)\, dx$.
- Comme f est nulle en dehors de $[b, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_b^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

- De plus, pour tout $x \in [b, +\infty[$:

$$x^2 \, f(x) \;=\; x^2 \, \frac{a\, b^a}{x^{a+1}} \;=\; a\, b^a \, \frac{1}{x^{a-1}}$$

- Or $\displaystyle\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}} \, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ ($b > 0$), d'exposant $a - 1$. Elle est donc convergente si et seulement si $a - 1 > 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une variance si et seulement si } a > 2.}$$

- Supposons alors $a > 2$.
Soit $B \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_b^B x \; f(x) \; dx \;&=\; a\, b^a \int_b^B x^{-a+1} \; dx \\
&=\; a\, b^a \left[\frac{x^{-a+2}}{-a+2} \right]_b^B \qquad \qquad \textit{(car } a \neq 2\textit{)} \\
&=\; -\frac{a\, b^a}{a-2} \left[\frac{1}{x^{a-2}} \right]_b^B \\
&=\; -\frac{a\, b^a}{a-2} \left(\frac{1}{B^{a-2}} - \frac{1}{b^{a-2}} \right)
\end{aligned}$$

Comme $a - 2 > 0$: $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{1}{B^{a-2}} = 0$. D'où :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; -\frac{a\ b^a}{a-2} \left(0 - \frac{1}{b^{a-2}} \right) \;=\; -\frac{a\ b^a}{a-2} \left(-\frac{1}{b^{a-2}} \right) \;=\; \frac{a\ \cancel{b^a}}{(a-2)\cancel{b^a}\ b^{-2}} \;=\; \frac{a\, b^2}{a-2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 2 : \mathbb{E}(X^2) = \frac{a\, b^2}{a-2}.}$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) \;&=\; \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\
&=\; \frac{a\, b^2}{a-2} - \left(\frac{a\, b}{a-1} \right)^2 \\
&=\; ab^2 \left(\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2} \right) \\
&=\; ab^2 \left(\frac{(a-1)^2 - a(a-2)}{(a-2)\ (a-1)^2} \right) \\
&=\; ab^2 \left(\frac{(\cancel{a^2} - \cancel{2a} + 1) - (\cancel{a^2} - \cancel{2a})}{(a-2)\,(a-1)^2} \right) \\
&=\; ab^2 \, \frac{1}{(a-2)\,(a-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } a > 2 : \mathbb{V}(X) = \frac{a\, b^2}{(a-2)\,(a-1)^2}.}$$

□

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on chercher à déterminer un estimateur performant de b.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ \dfrac{3\,b^3}{x^4} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
On définit :

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

5. a) Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $\mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,)$.

Démonstration.
Soit $x \in [b, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\,[X_k > x]\,) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} (1 - F_{X_k}(x)) \\ &= (1 - F_X(x))^n && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\ &= \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{b}{x}\right)^3\right)\right)^n && \textit{(d'après } \textbf{2.}\textit{, car } x \geqslant b\textit{)} \\ &= \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [b, +\infty[,\ \mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) = \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}}$$

□

b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $X_k(\Omega) = [b, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_n(\Omega) \subset [b, +\infty[.}$$

- Déterminons F_{Y_n}, la fonction de répartition de Y_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, b[$, alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $Y_n(\Omega) \subset [b, +\infty[$). D'où :

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(\,[Y_n \leqslant x]\,) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x \in [b, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{Y_n}(x) & = & \mathbb{P}(\,[Y_n \leqslant x]\,) & \\ & = & 1 - \mathbb{P}(\,[Y_n > x]\,) & \\ & = & 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^{3n} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{Y_n} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geqslant b \end{array} \right. .}$$

- D'après la question ***2.***, on reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi de Pareto de paramètres $3n$ et b.
  Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. .

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ suit la loi de Pareto de paramètres } 3n \text{ et } b.}$$

□

c) Montrer que $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n$ est un estimateur sans biais de b.

Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

Démonstration.

- La v.a.r. $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n = \dfrac{3n-1}{3n}\, \min(X_1, \dots, X_n)$ s'exprime :
  × à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la v.a.r. X,
  × sans mention du paramètre b.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y'_n \text{ est donc un estimateur de } b.}$$

- Comme $3n \geqslant 3 > 1$, d'après la question ***4.a)***, la v.a.r. Y_n admet une espérance.
  Ainsi, la v.a.r. Y'_n admet une espérance (donc un biais) en tant que transformée linéaire d'une v.a.r. qui en admet une.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y'_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n\right) & \\ & = & \dfrac{3n-1}{3n}\, \mathbb{E}(Y_n) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{3n-1}{3n}\, \dfrac{3n\, b}{3n-1} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{4.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\ & = & b & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y'_n \text{ est donc un estimateur sans biais de } b.}$$

- Comme $3n \geqslant 3 > 2$, d'après la question ***4.b)***, la v.a.r. Y_n admet une variance.
  Ainsi, la v.a.r. Y'_n admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformée linéaire d'une v.a.r. qui en admet une.

- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r_b(Y_n') & = & \mathbb{V}(Y_n') + \big(b_b(Y_n')\big)^2 & \\ & = & \mathbb{V}(Y_n') + 0 & \textit{(car } Y_n' \textit{ est un estimateur sans biais de } b\textit{)} \\ & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{3n-1}{3n}\, Y_n\right) & \\ & = & \left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^2 \mathbb{V}(W_n) & \\ & = & \dfrac{\cancel{(3n-1)^2}}{(3n)^2}\, \dfrac{3n\, b^2}{\cancel{(3n-1)^2}\,(3n-2)} & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{4.a)}} \textit{ et } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } r_b(Y_n') = \dfrac{b^2}{3n\,(3n-2)}}$$

□

6. a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.

Démonstration.

- La v.a.r. Z_n admet une variance (donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Z_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{3\,b}{3-1}\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\, \dfrac{3}{2}\, b & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{3}{2}\, b.}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(V_n) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{3\,b^2}{(3-1)^2\,(3-2)} & \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\, \dfrac{3\,b^2}{4} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{V}(Z_n) = \dfrac{3\,b^2}{4n}.}$$

□

b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme $\alpha\, Z_n$ où α est un réel à préciser. Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{ll} & \mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{3}{2}\, b \\[2mm] \text{donc} & \dfrac{2}{3}\, \mathbb{E}(Z_n) = b \\[2mm] \text{d'où} & \mathbb{E}\left(\dfrac{2}{3}\, Z_n\right) = b \qquad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \end{array}$$

  On pose alors $\alpha = \dfrac{2}{3}$. La v.a.r. $Z'_n = \alpha\, Z_n = \dfrac{2}{3}\, Z_n$ s'exprime :
  - × à l'aide d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la v.a.r. X,
  - × sans mention du paramètre b.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z'_n = \dfrac{2}{3}\, Z_n \text{ est donc un estimateur de } b.}$$

- La v.a.r. Z'_n admet une espérance (donc un biais) en tant que transformée linéaire de la v.a.r. Z_n qui en admet une. De plus :

$$b_b(Z'_n) \;=\; b_b(\alpha\, Z_n) \;=\; \mathbb{E}(\alpha\, Z_n) - b \;=\; 0 \qquad \textit{(d'après un point précédent)}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z'_n \text{ est un estimateur sans biais de } b.}$$

- La v.a.r. Z'_n admet une variance (donc un risque quadratique) en tant que transformée linéaire de la v.a.r. Z_n qui en admet une.
- Par décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r_b(Z'_n) & = & \mathbb{V}(Z'_n) + \big(b_b(Z'_n)\big)^2 & \\[2mm] & = & \mathbb{V}(\alpha\, Z_n) + 0 & \textit{(car } Z'_n \textit{ est un estimateur sans biais de } b\textit{)} \\[2mm] & = & \alpha^2\, \mathbb{V}(Z_n) & \\[2mm] & = & \dfrac{4}{9}\, \dfrac{3\, b^2}{4n} & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2mm] & = & \dfrac{b^2}{3n} & \end{array}$$

$$\boxed{r_b(Z'_n) = \dfrac{b^2}{3n}}$$

□

7. Entre Y'_n et Z'_n, quel estimateur choisir ? Justifier.

Démonstration.

- Comme les estimateurs Y'_n et Z'_n de b sont tous les deux sans biais (questions ***5.c)*** et ***6.b)***), le meilleur des deux est celui dont le risque quadratique est le plus faible.

- Or, toujours d'après ***5.c)*** et ***6.b)*** :

$$\begin{array}{rcll} r_b(Y'_n) \leqslant r_b(Z'_n) & \Leftrightarrow & \dfrac{b^2}{3n\,(3n-2)} \leqslant \dfrac{b^2}{3n} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{3n-2} \leqslant 1 & \textit{(car } \dfrac{3n}{b^2} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 3n-2 \geqslant 1 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 3n \geqslant 3 & \end{array}$$

Cette dernière inégalité est vraie car $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, par équivalence, la 1ère aussi.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y'_n \text{ est un meilleur estimateur de } b \text{ que } Z'_n.}$$

□

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance et la variance de W_n.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $W_n(\Omega)$.
Notons $h : x \mapsto \ln(x)$, de telle sorte que $W_n = h(X_n)$.
On considère ici $X_n(\Omega) = [1, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} W_n(\Omega) & = & \big(h(X_n)\big)(\Omega) \ = \ h\big(X_n(\Omega)\big) & \\ & = & h([1,+\infty[) & \\ & = & [h(1), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)[& \textit{(car la fonction } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [1,+\infty[\textit{)} \\ & = & [0,+\infty[& \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } W_n(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

- Déterminons la fonction de répartition F_{W_n} de W_n.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
   × si $x < 0$, alors $[W_n \leqslant x] = \varnothing$ (car $W_n(\Omega) = [0, +\infty[$). D'où :

$$F_{W_n}(x) = \mathbb{P}([W_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{W_n}(x) & = & \mathbb{P}(\,[W_n \leqslant x]\,) & \\ & = & \mathbb{P}\,(\,[\ln(X_n) \leqslant x]\,) & \\ & = & \mathbb{P}\,(\,[X_n \leqslant \mathrm{e}^x]\,) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & F_{X_n}\,(\mathrm{e}^x) & \\ & = & 1 - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^a & \textit{(car } b = 1 \textit{ et, comme } x \geqslant 0\textit{, } \mathrm{e}^x \geqslant 1\textit{)} \\ & = & 1 - (\mathrm{e}^{-x})^a \;=\; 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient finalement : } F_{W_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit une loi $\mathcal{E}\,(a)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } W_n \hookrightarrow \mathcal{E}\,(a)}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{E}(W_n) = \frac{1}{a} \text{ et } \mathbb{V}(W_n) = \frac{1}{a^2}.}$$

□

9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n \;=\; \frac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sqrt{n}\,(a\,M_n - 1)$$

a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On cherche ici à appliquer le théorème central limite. On commence donc par déterminer $\overline{W}_n^*$ et on souhaite relier cette v.a.r. à la v.a.r. T_n de l'énoncé.

- Intéressons nous d'abord à la v.a.r. $M_n = \overline{W}_n$.
  - × La v.a.r. M_n admet une variance (et donc une espérance) en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une.
  - × De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(M_n) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} W_k\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(W_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a} & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\, \dfrac{1}{a} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{a}.}$$

× Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(M_n) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} W_k\right) \\ & = & \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} W_k\right) \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(W_k) \qquad \textit{(car les v.a.r. } W_1, \ldots, W_n \textit{ sont indépendantes par lemme des coalitions)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a^2} \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n} \ \dfrac{1}{a^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{V}(M_n) = \dfrac{1}{n\, a^2}.}$$

- Comme la v.a.r. $M_n = \overline{W}_n$ admet une variance non nulle, la v.a.r. $\overline{W}_n^*$ est bien définie. De plus :

$$\begin{array}{rcl} \overline{W}_n^* & = & \dfrac{\overline{W}_n - \mathbb{E}(\overline{W}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{W}_n)}} \\ & = & \dfrac{M_n - \frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{n\,a^2}}} \qquad \textit{(d'après ce qui précède)} \\ & = & \dfrac{M_n - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a\sqrt{n}}} \\ & = & a\sqrt{n}\left(M_n - \dfrac{1}{a}\right) \\ & = & \sqrt{n}\,(a\,M_n - 1) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \overline{W}_n^* = T_n.}$$

- La suite $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. :
  × indépendantes par lemme des coalitions (car la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. indépendantes),
  × de même loi $\mathcal{E}(a)$,
  × qui admettent une variance non nulle $\dfrac{1}{a^2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème central limite : } T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z, \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

□

b) En déduire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \ ; \ \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
On admettra que $\Phi(2) \geqslant 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Commentaire

- L'énoncé considère ici : $M_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$. En effet, dans la cas contraire, les v.a.r. $\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n}$ et $\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}$ ne sont pas bien définies.
- Cette hypothèse n'est pas aberrante puisque, d'après la question ***8.*** : $W_n \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$. Ainsi, on peut considérer : $W_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.
  Comme $M_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} W_k$, on en déduit : $M_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.
- Pour une remarque plus complète sur la notation $W_n(\Omega)$, on se reportera à la question ***2***.

Démonstration.
On cherche à démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \ \leqslant\ a \ \leqslant\ \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]\right) \ \geqslant\ 95\%$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions d'abord la probabilité.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \ \leqslant\ a \ \leqslant\ \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]\right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{n}-2 \ \leqslant\ a\sqrt{n}\,M_n \ \leqslant\ \sqrt{n}+2\right]\right) && \textit{(car } \sqrt{n} > 0 \textit{ et } M_n(\Omega) \subset \,]0,+\infty[\textit{)} \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left[-2 \ \leqslant\ a\sqrt{n}\,M_n - \sqrt{n} \ \leqslant\ 2\right]\right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left[-2 \ \leqslant\ \sqrt{n}\,(a\,M_n - 1) \ \leqslant\ 2\right]\right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left[-2 \ \leqslant\ T_n \ \leqslant\ 2\right]\right)
\end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente : $T_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. D'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([-2 \leqslant T_n \leqslant 2]\right) &= \mathbb{P}(\,[-2 \leqslant Z \leqslant 2]\,) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) && \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\textit{)} \\
&= \Phi(2) - \big(1 - \Phi(2)\big) \\
&= 2\,\Phi(2) - 1
\end{aligned}$$

- De plus, d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}
& & \Phi(2) &\geqslant 0,975 \\
&\text{donc} & 2\,\Phi(2) &\geqslant 1,95 \\
&\text{d'où} & 2\,\Phi(2) - 1 &\geqslant 0,95
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \ \leqslant\ a \ \leqslant\ \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]\right) \ \geqslant\ 95\%$$

On en déduit que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}\,M_n} \ ;\ \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}\,M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

□

ECRICOME 2019 - loi de la valeur absolue, loi uniforme, loi de Rademacher, loi de Bernoulli, produit de v.a.r.

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$, alors : $-t \in \mathbb{R}$.
Trois cas se présentent.

- Si $t \in \,]-\infty, -1]$, alors $-t \in [1, +\infty[$. Donc :

$$f(-t) \ = \ \frac{1}{(-t)^3} \ = \ \frac{1}{-t^3} \ = \ -\frac{1}{t^3} \ = \ f(t)$$

- Si $t \in \,]-1, 1[$, alors $-t \in \,]-1, 1[$. Donc :

$$f(-t) \ = \ 0 \ = \ f(t)$$

- Si $t \in [1, +\infty[$, alors $-t \in \,]-\infty, -1]$. Donc :

$$f(-t) \ = \ -\frac{1}{(-t)^3} \ = \ -\frac{1}{-t^3} \ = \ \frac{1}{t^3} \ = \ f(t)$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(-t) = f(t)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est paire.}}$$

□

2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction f est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
- Soit $A \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^A f(t)\, dt \ = \ \int_1^A \frac{1}{t^3}\, dt \ = \ \int_1^A t^{-3}\, dt \ = \ \left[\frac{1}{-2}\, t^{-2} \right]_1^A \ = \ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right) \ = \ -\frac{1}{2\,A^2} + \frac{1}{2}$$

Or : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2\,A^2} \ = \ 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi l'intégrale } \int_1^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.}$$

□

3. a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt \ = \ \int_{1}^{A} f(u)\ du$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$ converge et donner sa valeur.

Démonstration.

- Soit $A \in]1, +\infty[$.
  - × La fonction f est continue par morceaux sur $[-A, -1]$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt$ est bien définie.
  - × On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -A \ \Rightarrow \ u = A \\ \bullet\ t = -1 \ \Rightarrow \ u = 1 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-A, -1]$.
  - × On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-A}^{-1} f(t)\ dt \ &= \ \int_{A}^{1} f(-u)\big(-\ du\big) \\ &= \ \int_{1}^{A} f(-u)\ du \\ &= \ \int_{1}^{A} f(u)\ du \qquad \textit{(car } f \textit{ est paire d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } A \in]1, +\infty[\ : \int_{-A}^{-1} f(t)\ dt = \int_{1}^{A} f(u)\ du.}$$

- D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

  On déduit alors de l'égalité du point précédent que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$ converge et, en passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt \ = \ \int_{1}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.}$$

□

b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - $\times$ sur $]-\infty,-1[$, en tant qu'inverse de la fonction $t \mapsto t^3$:
    - continue sur $]-\infty,-1[$ car polynomiale,
    - et qui ne s'annule pas sur $]-\infty,-1[$.
  - $\times$ sur $]-1,1[$, en tant que fonction constante,
  - $\times$ sur $]1,+\infty[$, en tant qu'inverse de la fonction $t \mapsto -t^3$ continue (car polynomiale) et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } -1 \text{ et en } 1.}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  - $\times$ si $t \in]-\infty,-1]$, alors en particulier : $t < 0$. Donc : $t^3 < 0$. Ainsi : $\dfrac{1}{t^3} < 0$.
    D'où : $f(t) = -\dfrac{1}{t^3} > 0$.
  - $\times$ si $t \in]-1,1[$, alors : $f(t) = 0$. Ainsi : $f(t) \geqslant 0$.
  - $\times$ si $t \in [1,+\infty[$, alors en particulier : $t > 0$. Ainsi : $f(t) = \dfrac{1}{t^3} > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.
  - $\times$ D'après la question ***3.a)***, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
  - $\times$ La fonction f est nulle sur $]-1,1[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ converge et vaut 0.
  - $\times$ D'après la question ***2.***, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
  - $\times$ On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt \;=\; \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\[2mm] 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $x \in \,]-\infty, -1]$, alors :

$$F_X(x) \;=\; \mathbb{P}([X \leqslant x]) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

Soit $A \in \,]-\infty, x]$. On a :

$$\int_A^x f(t)\ dt \;=\; \int_A^x -\frac{1}{t^3}\ dt \;=\; -\left[\ \frac{1}{-2}\ \frac{1}{t^2}\ \right]_A^x \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{A^2}\right) \;=\; \frac{1}{2\,x^2} - \frac{1}{2\,A^2}$$

De plus : $\lim\limits_{A \to -\infty} \dfrac{1}{2\,A^2} = 0$.

On en déduit : $F_X(x) \;=\; \dfrac{1}{2\,x^2}$.

- Si $x \in \,]-1, 1[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de }]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\textit{)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Si $x \in [1, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^{1} f(t)\ dt + \int_{1}^{x} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \int_1^x \frac{1}{t^3}\ dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de }]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\textit{)} \\ &= \frac{1}{2} + \left[\ \frac{1}{-2}\ \frac{1}{t^2}\ \right]_1^x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

□

b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f(t)\, dt$.

- Commençons par étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$.

  × Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \;=\; \int_1^{+\infty} t\, f(t)\, dt$$

  × De plus, la fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

  × Enfin, soit $t \in [1, +\infty[$:

$$t\, f(t) \;=\; t\, \frac{1}{t^3} \;=\; \frac{1}{t^2}$$

  Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \text{ converge.}}$$

- D'après la question ***1.***, la fonction f est paire.
  On en déduit que la fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est impaire.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt = -\int_0^{+\infty} f(t)\, dt.}$$

- On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet une espérance.}}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt + \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \\ &= -\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt + \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \;=\; 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 0}$$

Commentaire

On rappelle que l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\ dt \ = \ - \int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\ dt$$

se démontre à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow \ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$. □

c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$ est absolument convergent, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f(t)\ dt$.
- Commençons par étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$.
  - × Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$:
  $$\int_{0}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt \ = \ \int_{1}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$$
  - × De plus, la fonction $t \mapsto t^2\, f(t)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
  - × Enfin, soit $t \in [1, +\infty[$:
  $$t^2\, f(t) \ = \ t^2\, \frac{1}{t^3} \ = \ \frac{1}{t}$$
  Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 1. Elle est donc divergente.

  $\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt \text{ diverge.}}$
- Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\ dt$ diverge.

$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ n'admet pas de variance.}}$

Commentaire

Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorqu'on rencontre les questions :
- « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
- « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
- « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
- « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).

□

5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de Y : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \ = \ F_X(x) - F_X(-x)$$

  où la dernière égalité est obtenue car X est une v.a.r. à densité.
  Deux cas se présentent alors :

  - si $x \in [0, 1[$, alors $-x \in]-1, 0]$. On obtient alors avec la question ***4.a)*** :

$$F_Y(x) \ = \ F_X(x) - F_x(-x) \ = \ \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} \ = \ 0$$

  - si $x \in [1, +\infty[$, alors $-x \in]-\infty, -1]$. On obtient alors avec la question ***4.a)*** :

$$F_Y(x) \ = \ F_X(x) - F_X(-x) \ = \ \left(1 - \frac{1}{2\,x^2}\right) - \frac{1}{2\,(-x)^2} \ = \ 1 - \frac{1}{2\,x^2} - \frac{1}{2\,x^2} \ = \ 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.}$$

- Montrons que Y est une v.a.r. à densité.
  - $\times$ La fonction F_Y est continue :
    - sur $]-\infty, 1[$, en tant que fonction constante,
    - sur $]1, +\infty[$, en tant que somme de fonctions continues sur $]1, +\infty[$,
    - en 1. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 1^+} F_Y(x) \ = \ F_Y(1) \ = \ 1 - \dfrac{1}{1^2} \ = \ 0$.
      D'autre part : $\lim\limits_{x \to 1^-} F_Y(x) = 0$. Ainsi :
      $$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) \ = \ F_Y(1) \ = \ \lim_{x \to 1^+} F_Y(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

  - $\times$ La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

□

b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.
Pour déterminer une densité f_Y de Y, on dérive la fonction F_Y sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in \,]-\infty, 1[$.
  $$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ 0$$
- Si $x \in \,]1, +\infty[$.
  $$f_Y(x) \ = \ F_Y'(x) \ = \ -(-2) \ \frac{1}{x^3} \ = \ \frac{2}{x^3}$$
- On choisit enfin : $f_Y(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, une densité } f_Y \text{ de } Y \text{ est : } f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 1[\\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.}$$

□

c) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Y(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f_Y(t)\, dt$.

- Tout d'abord, comme la fonction f_Y est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Y(t)\ dt \;=\; \int_{1}^{+\infty} t\, f_Y(t)\ dt$$

- De plus, la fonction $t \mapsto t\, f_Y(t)$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
- Enfin, soit $t \in [1, +\infty[$:

$$t\, f_Y(t) \;=\; t\, \frac{3}{t^3} \;=\; \frac{2}{t^2}$$

Ainsi, soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\int_1^B t\, f_Y(t)\ dt \;=\; \int_1^B \frac{1}{t^2}\ dt \;=\; 2 \int_1^B t^{-2}\ dt \;=\; 2\left[\frac{1}{-1}\, t^{-1}\right]_1^B \;=\; -2\left(\frac{1}{B} - 1\right) \;=\; 2 - \frac{2}{B}$$

Or : $\lim\limits_{B \to +\infty} \dfrac{2}{B} = 0$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f_Y(t)\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } Y \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Y(t)\ dt \;=\; \int_1^{+\infty} t\, f_Y(t)\ dt \;=\; 2$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2}$$

□

Partie B

6. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y.
Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $D \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$. Ainsi :
  - × $D(\Omega) = \{-1, 1\}$,
  - × $\mathbb{P}([D = -1]) \;=\; \mathbb{P}([D = 1]) \;=\; \dfrac{1}{2}$.
- Tout d'abord, comme $D(\Omega) = \{-1, 1\}$, on obtient : $Z(\Omega) \;=\; \left\{\dfrac{-1+1}{2}, \dfrac{1+1}{2}\right\} \;=\; \{0, 1\}$.
- De plus :

$$[Z = 1] \;=\; \left[\frac{D+1}{2} = 1\right] \;=\; [D + 1 = 2] \;=\; [D = 1]$$

On en déduit : $\mathbb{P}([Z = 1]) \;=\; \mathbb{P}([D = 1]) \;=\; \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

□

b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. T admet une espérance en tant que produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T) & = & \mathbb{E}(DY) & \\ & = & \mathbb{E}(D)\,\mathbb{E}(Y) & \textit{(car } D \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \end{array}$$

- Enfin, par définition de l'espérance :

$$\mathbb{E}(D) \ = \ (-1) \times \mathbb{P}([D=-1]) + 1 \times \mathbb{P}([D=1]) \ = \ -\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(D)\,\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{E}(Y) = 0.}$$

□

c) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\mathbb{P}([T \leqslant x]) \ = \ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x])$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La famille $([D=-1]\,,[D=1])$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([D=-1] \cap [T \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1] \cap [T \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([D=-1] \cap [DY \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1] \cap [DY \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([D=-1] \cap [-Y \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1] \cap [Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([D=-1])\,\mathbb{P}([-Y \leqslant x]) + \mathbb{P}([D=1])\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } D \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([T \leqslant x]) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x])}$$

□

d) En déduire la fonction de répartition de T.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question précédente :

$$F_T(x) \ = \ \mathbb{P}([T \leqslant x]) \ = \ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \leqslant x]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x]) \ = \ \frac{1}{2}\,F_Y(x) + \frac{1}{2}\,(1 - F_Y(-x))$$

où la dernière égalité est obtenue car Y est une v.a.r. à densité d'après la question ***5.a)***.

- Trois cas se présentent alors :
  × si $x \in \,]-\infty,-1]$, alors $-x \in [1,+\infty[$. On obtient donc, avec la question **5.a)** :

$$F_T(x) \;=\; \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{(-x)^2}\right)\right) \;=\; \frac{1}{2\,x^2}$$

  × si $x \in \,]-1,1[$, alors $-x \in \,]-1,1[$. On obtient donc, avec la question **5.a)** :

$$F_T(x) \;=\; \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\,(1-0) \;=\; \frac{1}{2}$$

  × si $x \in [1,+\infty[$, alors $-x \in \,]-\infty,-1]$. On obtient donc, avec la question **5.a)** :

$$F_T(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\,(1-0) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{2} \;=\; 1 - \frac{1}{2\,x^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_T : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \in \,]-\infty,-1] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \,]-1,1[\\ 1-\dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}}$$

Commentaire

On remarque que les v.a.r. T et X ont même fonction de répartition. Or, la fonction de répartition caractérise la loi. On en déduit que les v.a.r. X et T ont même loi.

□

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et V la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

a) Rappeler la fonction de répartition de U.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]), \text{ alors } F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty,0] \\ x & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}}$$

□

b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variable V et Y suivent la même loi.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ de telle sorte que $V = h(U)$.
  On sait tout d'abord : $U(\Omega) = \,]0,1[$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \big(h(U)\big)(\Omega) \;=\; h\big(U(\Omega)\big) \\ &= h(]0,1[) \\ &= \left]\lim_{x\to 0} h(x), \lim_{x\to 1} h(x)\right[&& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur }]0,1[\textit{) } (*) \\ &= \,]1,+\infty[\end{aligned}$$

Détaillons $(*)$.

× La fonction h est continue sur $]0,1[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

× La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ avec des arguments similaires.
Soit $x \in \,]0,1[$.

$$h'(x) \ = \ -\frac{1}{2} \, \frac{-1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \ = \ \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} \ > \ 0$$

Donc la fonction h est bien strictement croissante sur $]0,1[$.

$$\boxed{V(\Omega) \ = \ ]1,+\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in \,]-\infty,1]$, alors : $[V \leqslant x] = \varnothing$, car $V(\Omega) = \,]1,+\infty[$. Donc :

$$F_V(x) \ = \ \mathbb{P}([V \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \in \,]1,+\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}
F_V(x) \ &= \ \mathbb{P}([V \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant x\right]\right) \\
&= \ \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{1-U} \geqslant \frac{1}{x}\right]\right) && \textit{(car la fonction inverse est strictement décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
&= \ \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \frac{1}{x^2}\right]\right) && \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \ \mathbb{P}\left(\left[1-\frac{1}{x^2} \geqslant U\right]\right) \\
&= \ F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{array}{lll}
\text{Comme} & x > 1 & \\
\text{alors} & x^2 > 1 & \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\text{donc} & \dfrac{1}{x^2} < 1 & \textit{(par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{et} & 0 < \dfrac{1}{x^2} < 1 &
\end{array}$$

On en déduit, d'après la question précédente :

$$F_V(x) \ = \ F_U\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \ = \ 1-\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_V : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty,1] \\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}.}$$

- On remarque que les v.a.r. V et Y ont même fonction de répartition, d'après la question ***5.a)***.
Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } V \text{ et } Y \text{ ont même loi.}}$$

□

8. a) Écrire une fonction en langage **Python**, nommée `D`, qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

Démonstration.

```
def D(n):
    a = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        if rd.random() < 1/2:
            a[k] = 1
        else:
            a[k] = -1
    return a
```

- **Début de la fonction**
  On commence par initialiser la variable `a` qui doit contenir une matrice ligne à `n` colonnes.

```
    a = np.zeros(n)
```

- **Structure itérative**
  On met ensuite en place une structure itérative (boucle for) pour affecter à chaque coefficient de la matrice `a` une réalisation de la v.a.r. D.

```
    for k in range(n):
```

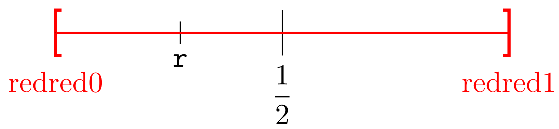
  On cherche maintenant à simuler la v.a.r. D.

  × D'après l'énoncé : $D \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$.
  Ainsi, chaque coefficient de la variable `a` doit :

  - prendre la valeur -1 avec probabilité $\mathbb{P}([D = -1]) = \dfrac{1}{2}$.
  - prendre la valeur 1 avec probabilité $\mathbb{P}([D = 1]) = \dfrac{1}{2}$.

  × Pour cela, on utilise la commande suivante : `rd.random()`. L'instruction `rd.random()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $]0, 1[$.
  Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

  × Cette valeur `r` choisie aléatoirement dans $]0, 1[$ permet d'obtenir une simulation de D.



  Deux cas se présentent :

  - Si $\texttt{r} < \dfrac{1}{2}$: alors on affecte à `a(i)` (la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de `a`) la valeur -1.
    Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 < U < \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([D = -1])$$

  - Si $\texttt{r} \geqslant \dfrac{1}{2}$: alors on affecte à `a(i)` la valeur 1.
    Ce cas se produit avec la probabilité attendue :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U < 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} < U\right]\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}([D = 1])$$

On obtient la suite du programme :

```
        if rd.random() < 1/2:
            a[k] = 1
        else:
            a[k] = -1
    return a
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, fournir la fonction **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la totalité des points alloués à cette question. On procèdera de même dans la question suivante. □

b) On considère le script suivant :

```
n = int(input('entrer n'))
a = D(n)
b = rd.random(n)
c = a / np.sqrt(1-b)
print(sum(c)/n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ?
Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.

Démonstration.

- On commence par demander à l'utilisateur d'entrer une valeur pour l'entier `n`.

```
n = int(input('entrer n'))
```

- D'après la question précédente, on affecte ensuite à la variable `a` une matrice ligne contenant `n` réalisations de la v.a.r. D. Plus précisément, la variable `a` est un `n`-uplet $(d_1, \dots, d_{\texttt{n}})$ qui correspond à l'observation d'un `n`-échantillon $(D_1, \dots, D_{\texttt{n}})$ de la v.a.r. D.
(cela signifie que les v.a.r. D_1, ..., $D_{\texttt{n}}$ sont indépendantes et de même loi que D)

```
a = D(n)
```

- On continue en affectant à la variable `b` une matrice ligne contenant `n` réalisations d'une loi uniforme sur $]0,1[$. Autrement dit, la variable `b` est un `n`-uplet $(u_1, \dots, u_{\texttt{n}})$ qui correspond à l'observation d'un `n`-échantillon $(U_1, \dots, U_{\texttt{n}})$ de la v.a.r. U.

```
b = rd.random(n)
```

- La ligne 4 permet de définir une nouvelle variable `c` :

```
4  c = a / np.sqrt(1-b)
```

× On sait déjà que la variable `a` contient une observation du `n`-échantillon $(D_1, \dots, D_{\mathtt{n}})$.

× On rappelle de plus que la variable `b` contient une observation du `n`-échantillon $(U_1, \dots, U_{\mathtt{n}})$.
Ainsi, la variable `1 / np.sqrt(1-b)` contient une observation du `n`-échantillon $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-U_1}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{1-U_{\mathtt{n}}}}\right)$.
D'après ce qui précède, cela correspond à un n-échantillon $(V_1, \dots, V_{\mathtt{n}})$ de la v.a.r. V.
Or, d'après la question ***7.b)***, les v.a.r. V et Y ont même loi.
Finalement, on construit ainsi un `n`-échantillon $(Y_1, \dots, Y_{\mathtt{n}})$ de Y.
La variable `1 / sqrt(1-b)` contient une observation de ce `n`-échantillon.

Ainsi, la variable `c` contient une observation du `n`-échantillon $(D_1 \times Y_1, \dots, D_{\mathtt{n}} \times Y_{\mathtt{n}})$, c'est-à-dire une observation $(t_1, \dots, t_{\mathtt{n}})$ du `n`-échantillon $(T_1, \dots, T_{\mathtt{n}})$.

Finalement, la variable `c` contient donc l'observation d'un `n`-échantillon de la v.a.r. T.

- Enfin, la ligne 5 :

```
5  print(sum(c)/n)
```

permet d'afficher la valeur $\dfrac{1}{\mathtt{n}} \sum\limits_{i=1}^{\mathtt{n}} t_i$ qui correspond à une observation de la v.a.r. $\dfrac{1}{\mathtt{n}} \sum\limits_{i=1}^{\mathtt{n}} T_i$, qui n'est autre que la moyenne empirique des variables aléatoires $T_1, \dots, T_{\mathtt{n}}$).

Or, par loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\text{moyenne de l'observation} \;=\; \frac{1}{\mathtt{n}} \sum_{i=1}^{\mathtt{n}} t_i \;\simeq\; \mathbb{E}(T)$$

Ainsi, si `n` est assez grand, le programme renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(T) = 0$.

Commentaire

- Le programme proposé par l'énoncé n'est ici rien d'autre qu'une illustration de l'idée naturelle pour obtenir une approximation de $\mathbb{E}(T)$:
  × simuler un grand nombre de fois ($\texttt{n} = 10000$ par exemple) la v.a.r. T.
  Formellement, on souhaite obtenir un $\texttt{n}$-uplet $(t_1, \dots, t_{\texttt{n}})$ qui correspond à l'observation d'un $\texttt{n}$-échantillon $(T_1, \dots, T_{\texttt{n}})$ de la v.a.r. T.
  × réaliser la moyenne des résultats de cette observation.
- La réponse fournie à cette question passe à côté d'un détail : dans le programme d'ECE, l'énoncé de la LfGN comporte trois hypothèses. La suite de v.a.r. (T_n) doit être constituée de v.a.r. **indépendantes**, **de même espérance**, **de même variance**.
  Or, on pourrait démontrer que la v.a.r. n'admet pas de variance ! Il semble donc à première vue qu'on ne puisse pas appliquer la LfGN.
  Il existe en fait un énoncé de la LfGN (hors programme) se passant de l'hypothèse d'existence d'une variance. Ainsi, la réponse à cette question est toujours parfaitement correcte.
- Démontrons enfin que la v.a.r. T n'admet pas de variance. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons alors que la v.a.r. T admet une variance.
  × Par formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 = \mathbb{E}(T^2)$.
  En effet, d'après la question ***6.b)*** : $\mathbb{E}(T) = 0$.
  × Or :
  $$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(T^2\right) &= \mathbb{E}\left((DY)^2\right) = \mathbb{E}\left(D^2\, Y^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(D^2\right)\, \mathbb{E}\left(Y^2\right) \qquad \textit{(car les v.a.r. D et Y sont indépendantes)} \end{aligned}$$
  × De plus, par théorème de transfert :
  $$\mathbb{E}(D^2) = (-1)^2 \times \mathbb{P}([D=-1]) + 1^2 \times \mathbb{P}([D=1]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
  Ainsi : $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}\left(T^2\right) = \mathbb{E}\left(Y^2\right)$.
  × Par ailleurs, la v.a.r. Y admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_Y(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_Y(t)\, dt$.
  Comme la fonction f_Y est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f_Y(t)\, dt = \int_{1}^{+\infty} t^2\, f_Y(t)\, dt$$
  Enfin, soit $t \in [1, +\infty[$: $t^2\, f_Y(t) = t^2\, \dfrac{2}{t^3} = \dfrac{2}{t}$.
  Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 1. Elle est donc divergente.
  On en déduit que la v.a.r. Y n'admet pas de moment d'ordre 2.
  On en déduit que la v.a.r. T n'admet pas de variance, ce qui est absurde. □

EDHEC 2017 - loi exponentielle, loi de Gumbel, loi du log, loi du max, convergence en loi

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\ln(x)$, de sorte que $W = h(V)$.
  Comme $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $V(\Omega) =]0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} W(\Omega) & = & h(V)(\Omega) \ = \ h\big(V(\Omega)\big) & \\ & = & h\big(]0,+\infty[\big) & \\ & = &]\lim\limits_{x \to +\infty} h(x), \lim\limits_{x \to 0} h(x)[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & = &]-\infty, +\infty[& \textit{(car } \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(x) = -\infty \textit{ et } \lim\limits_{x \to 0} -\ln(x) = +\infty\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } W(\Omega) = \mathbb{R}.}$$

- Déterminons la fonction de répartition de W. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([-\ln(V) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(V) \geqslant -x]) & \\ & = & \mathbb{P}([V \geqslant e^{-x}]) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}([V < e^{-x}]) & \\ & = & 1 - F_V(e^{-x}) & \textit{(car } V \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-e^{-x}}\right) & \textit{(car } e^{-x} > 0\textit{)} \\ & = & e^{-e^{-x}} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}}$$

Commentaire

- Commencer par déterminer l'ensemble image $V(\Omega)$ est un bon réflexe : cela peut guider l'étude de la fonction de répartition F_V. Plus précisément, cela fournit la disjonction de cas à effectuer. Typiquement, si l'on démontre que $V(\Omega)$ est de la forme $[a, b]$ (où a et b sont deux réels tels que $a < b$), on peut rédiger comme suit :
  - × si $x < a$ alors $[V \leqslant x] = \varnothing$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - × si $x \in [a, b]$ alors [... `démo à produire` ...]
  - × si $x > b$ alors $[X \leqslant x] = \Omega$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Les ensembles images $V(\Omega)$ de types différents (essentiellement $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$) amènent des disjonctions de cas analogues.

□

b) En déduire que W est une variable à densité.

Démonstration.
La fonction de répartition F_W est :
× continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).
× de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } W \text{ est une variable à densité.}}$$

□

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $Y_n(\Omega)$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. X_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$, et donc $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$.
On rappelle que $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n(\Omega) \ \subset \ [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x < 0$: alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Y_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  - Si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \cdots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) && \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\ &= (\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n && \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ ont même loi)} \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-x})^n && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

Commentaire

- Cette question permet d'illustrer l'intérêt de la détermination de $Y_n(\Omega)$: cela nous fournit la disjonction de cas servant à déterminer la fonction de répartition F_{Y_n}.
- On notera au passage que démontrer l'inclusion $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$ est suffisant pour mettre en place cette disjonction de cas.

□

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

Démonstration.

- Y_n est une variable à densité car :
  - $\times$ F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  - $\times$ F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

    En effet, sur $]-\infty, 0[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est constante sur cet intervalle.
    Sur $]0, +\infty[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour déterminer une densité de Y_n, on dérive F_{Y_n} sur les **intervalles ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x \in]-\infty, 0[$:
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = 0$$
  - Si $x \in]0, +\infty[$:
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  - Si $x = 0$: on pose $f_{Y_n}(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Commentaire

Il faut bien comprendre qu'on peut prendre n'importe quelle valeur positive pour f_n en 0. On peut ainsi construire une infinité de densités de Y_n.
C'est pourquoi on parle d'**une** densité.

□

3. a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

Démonstration.
On commence par déterminer un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ quand $t \to +\infty$.

- Soit $t \geqslant 0$.
$$F_{Y_n}(t) \quad = \quad \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n$$
- On reconnaît une expression de la forme $(1+x)^\alpha$ dont on connaît un développement limité en 0. Plus précisément, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0 et qui vérifie $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, telle que, au voisinage de 0 :
$$(1+x)^n \ = \ 1 + n\ x + x\ \varepsilon(x)$$
- Comme $-\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = -\mathrm{e}^{-t}$ pour t dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :
$$\begin{array}{rcl} \left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n & = & 1 - n\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \\[2ex] \text{ainsi} \quad 1 - \left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n & = & n\ \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \end{array}$$
- On constate alors : $\mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) = \underset{t \to +\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$. En effet :
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)}{\mathrm{e}^{-t}} \ = \ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  par théorème de composition des limites.

- On en conclut : $1 - F_{Y_n}(t) = n \ \mathrm{e}^{-t} + \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } 1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-t}.}$$

Démontrons alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt$ est convergente.

- La fonction $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- D'autre part :

$$1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} n \ \mathrm{e}^{-t} \ (\geqslant 0)$$

- Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ dt$ est convergente (de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \ dt$ avec $\alpha > 0$).
  (on ne change pas la nature d'une intégrale impropre en multipliant son intégrande par un réel non nul : ceci nous permet de ne pas prendre en compte le réel $n \neq 0$)

Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales impropres de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- Les intégrales de type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \ dt$ sont considérées dans le programme comme des intégrales de référence au même titre que les intégrales de Riemann ce qui explique la rédaction ci-dessus.
- On aurait pu justifier autrement la convergence de cette intégrale.

  1) Soit par calcul.
  Soit $A \geqslant 0$.

  $$\int_0^A n\mathrm{e}^{-t} \ dt = n \left[\ -\mathrm{e}^{-t} \ \right]_0^A = n(1 - \mathrm{e}^{-A}) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} n$$

  Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-t} \ dt$ converge.

  2) Soit par un argument provenant du chapitre des v.a.r. à densité.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ dt$ converge et vaut 1 en tant qu'intégrale d'une densité d'une v.a.r. X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

□

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) \ dt$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & 1 - F_{Y_n}(t) & & u'(t) & = & -f_{Y_n}(t) \\ v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^x 1 \times (1 - F_{Y_n}(t))\ dt &= \Big[\ t\ (1 - F_{Y_n}(t))\ \Big]_0^x - \int_0^x (-f_{Y_n}(t)) \times t\ dt \\
&= x\ (1 - F_{Y_n}(x)) - \cancel{0\ (1 - F_{Y_n}(0))} + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt \\
&= x\ (1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt}$$

□

c) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)***, $1 - F_{Y_n}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-x}$. On obtient alors :

$$x(1 - F_{Y_n}(x)) \underset{x \to +\infty}{\sim} nx\mathrm{e}^{-x}$$

- Or : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  En effet, $x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0}$$

□

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_{Y_n}(t)\ dt$.
  Or : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ car f_{Y_n} est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
- Or, d'après la question ***3.b)***, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt - x(1 - F_{Y_n}(x))$$

  La partie droite de l'égalité admet une limite finie quand $x \to +\infty$ car :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ converge, d'après la question ***3.a)***
  × $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$, d'après la question ***3.b)***

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt$ est convergente. De plus :

$$\int_0^{+\infty} t f_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt - 0$$

$$\boxed{\text{En conclusion, la v.a.r. } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt.}$$

□

4. a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^x \ \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n\right) \ dt$$

On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1 - \mathrm{e}^{-t}}$.

$u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ (et donc $\mathrm{e}^{-t} = 1 - u$ puis $t = -\ln(1-u)$)
$\hookrightarrow du = \mathrm{e}^{-t} \ dt$ et $dt = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-t}} \ du = \dfrac{1}{1-u} \ du$
- $t = 0 \ \Rightarrow \ u = 0$
- $t = x \ \Rightarrow \ u = 1 - \mathrm{e}^{-x}$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -\ln(1-u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$.
On remarque de plus que $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$, en particulier $u \neq 1$ (car $1 - \mathrm{e}^{-x} < 1$ pour tout $x \geqslant 0$) ce qui permet de justifier la validité de l'écriture $\dfrac{1}{1-u}$.
On obtient finalement :

$$\int_0^x \ \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n\right) \ dt \ = \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ (1 - u^n) \, \frac{1}{1-u} \ du \ = \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du}$$

□

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

Démonstration.
- On remarque tout d'abord : $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$. On a donc, en particulier : $u \neq 1$.
  On peut donc écrire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k \ = \ \frac{1-u^n}{1-u}$.
- On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du \ &= \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \sum_{k=0}^{n-1} u^k \ du \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ u^k \ du && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\ \frac{u^{k+1}}{k+1} \ \right]_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{k+1}}{k+1} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k} && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}}$$

- On sait de plus que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

5. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) On rappelle que `rd.exponential(1,n)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction **Scilab** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
def simulZ(n):
    x = rd.exponential(1,n)
    return ________________________
```

Démonstration.

```
return max(x) - np.log(n)
```

Commentaire

- On rappelle qu'il est inutile de recopier le programme en entier.
  Écrire la ligne contenant l'information manquante suffit.
- Il est tout à fait possible (et donc non sanctionné) aux concours d'utiliser plusieurs lignes, même si le concepteur a pensé à une réponse sur une seule ligne. Ici, on pouvait dans un premier temps simuler la v.a.r. Y_n puis la v.a.r. Z_n.

```
Y = max(x)
Z = Y - np.log(n)
```

□

b) Voici deux scripts :

```
V = rd.exponential(1,10000)
W =-np.log(V)
s = np.linspace(0,10,11)
plt.hist(W,s,density=True)
plt.show()
```

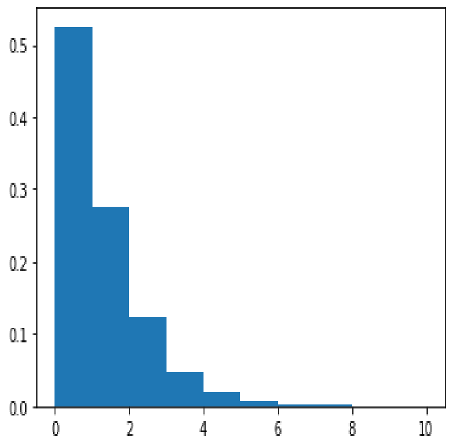
Script (1)

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
Z = [] # La liste Z est vide
for k in range(10000):
Z.append(simulZ(n))
s = np.linspace(0,10,11)
plt.hist(Z,s,density = True)
plt.show()
```

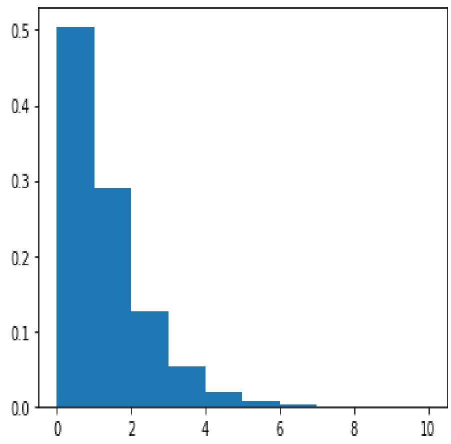
Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, ..., $]9,10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. (Z_n) ?

Démonstration.
Commentons tout d'abord le script et l'histogramme (1).

- Les lignes 1 et 2 permettent d'obtenir des valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(W_1, \dots, W_{10000})$ de la v.a.r. W qui suit la loi de Gumbel. (les v.a.r. W_i sont indépendantes et ont même loi que W)
- Les lignes 3 et 4 ont pour but de permettre de visualiser la répartition des 10000 valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ à l'aide d'un histogramme des fréquences :
  - × l'instruction `np.linspace(0, 10, 11)` crée la matrice `[0, 1, 2, ..., 10]`.
  - × l'instruction `plt.hist` crée les classes : $[0, 1]$, $]1, 2]$, ..., $]9, 10]$.
    Elle permet aussi de récupérer l'effectif de chaque classe (*i.e.* le nombre de w_i dans chaque classe) et trace l'histogramme (1).
- Considérons par exemple la classe définie par l'intervalle $]2, 3]$.
  La loi faible des grands nombres (LfGN) permet d'affirmer :

$$\text{fréquence de la classe }]2,3] = \frac{\text{effectif de la classe }]2,3]}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$$

  Ici, on réalise bien un grand nombre d'observations ($N = 10000$) ce qui justifie cette formule.
  Ainsi, l'aire de la barre qui s'appuie sur l'intervalle $]2, 3]$ est donc une approximation de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) = F_W(3) - F_W(2)$.

Commentons maintenant l'histogramme (2).

- Les lignes 3, 4, et 5 permettent d'obtenir les valeurs $(u_1, \dots, u_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(U_1, \dots, U_{10000})$ de la variable Z_n (pour $n = 1000$). (les U_i sont indépendantes et ont même loi que Z_n)
- On trace alors l'histogramme de répartition de ces valeurs. Pour les raisons évoquées ci-dessus, l'aire de la barre du graphique (2) est une valeur approchée de :

$$\mathbb{P}([2 < Z_n \leqslant 3]) = F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2)$$

Or, on constate que l'histogramme (2) est similaire à l'histogramme (1).
Cela signifie que les aires des barres de chacun de ces deux graphiques sont très proches. Ainsi :

$$F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2) \ \simeq \ F_W(3) - F_W(2)$$

En considérant la première classe, on observe que : $F_{Z_n}(1) \ \simeq \ F_W(1)$.
On obtient alors, en considérant successivement toutes les classes :

$$\forall i \in [\![1, 10]\!], \ F_{Z_n}(i) \ \simeq \ F_W(i)$$

Les fonctions de répartition F_{Z_n} et F_W coïncident en ces 10 points. En considérant des classes définies par d'autres points, on observerait que les fonctions coïncident en ces nouveaux points. Ainsi, lorsque $n = 1000$, les fonctions de répartition des v.a.r. W et Z_n sont très proches.

$$\boxed{\text{On conjecture que la suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

Commentaire

- Ces deux histogrammes sont normalisés. De ce fait, ce n'est pas l'effectif de la classe qui est affiché en ordonnée mais un nombre qui, une fois multiplié par la largeur de la barre, fournit la fréquence de la classe. Autrement dit, dans un tel histogramme, la fréquence d'une classe c'est l'aire de la barre correspondante.
  Ici, chaque barre est de largeur 1. Ce sont donc les fréquences de chaque classe que l'on peut lire en ordonnée. Il ne faut pas oublier de prendre en compte ce coefficient multiplicatif lorsque l'on considère un nombre de barres plus grand (et donc des largeurs de barres différentes).
- Dans la démonstration, on a utilisé la loi faible des grands nombres (LfGN) afin de faire le lien entre fréquence de la classe $]2, 3]$ et probabilité $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$. Établissons ce lien de manière plus précise.
  Pour ce faire, on introduit la v.a.r. T suivante.

$$T \ : \ \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } W(\omega) \in \,]2, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Le N-échantillon d'observations $(w_1, \dots, w_N)$ (où N est un grand nombre) de la v.a.r. W fournit un N-échantillon d'observations $(t_1, \dots, t_N)$ de la v.a.r. T.
  La LfGN stipule :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \ \simeq \ \mathbb{E}(T)$$

  Or T est une v.a.r. finie qui admet pour espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= 1 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) + \cancel{0 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])} \\ &= \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) \ = \ F_W(3) - F_W(2) \end{aligned}$$

  Par ailleurs, $\sum\limits_{i=1}^{N} t_i$ permet de compter le nombre d'observations qui appartiennent à la classe $]2, 3]$ (*i.e.* l'effectif de la classe $]2, 3]$).
  Ainsi, $\frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} t_i$ est la fréquence de cette classe. Celle-ci est représentée graphiquement par la troisième barre de l'histogramme (1). D'après ce qui précède, l'aire de cette barre est une valeur approchée de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$.

□

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} F_{Z_n}(x) & = & \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n - \ln(n) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x + \ln(n)]) \\ & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))}$$

□

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $Z_n(\Omega)$.
  On a vu précédemment : $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Comme } Z_n = Y_n - \ln(n), \text{ on en déduit que } Z_n(\Omega) \subset [-\ln(n), +\infty[}$$

Déterminons F_{Z_n}.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < -\ln(n)$: alors $[Z_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \geqslant -\ln(n)$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{Z_n}(x) & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln(n))}\right)^n & \textit{(car } x + \ln(n) \geqslant 0 \textit{ et par définition de } F_{Y_n}\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases}}$$

□

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{e^{-x}}{n} = 0$, on a l'équivalent suivant :

$$\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{n}$$

On obtient alors :

$$n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\frac{e^{-x}}{\cancel{n}} = -e^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{-x}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}.}$$

□

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question ***5.b)***.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite (Z_n) converge en loi vers la v.a.r. W. Autrement dit, il faut démontrer qu'en tout point de continuité de F_W, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***6.c)***, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.
  La fonction $u \mapsto \exp(u)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a, par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-e^{-x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n = e^{-e^{-x}}}$$

- De plus, comme le réel x est fixé et que $-\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ x \geqslant -\ln(n)$$

  Considérons maintenant $n \geqslant n_0$ (ce qui est autorisé car on cherche une limite quand n tend vers $+\infty$). On a alors :

$$F_{Z_n}(x) = \left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-x}}$$

  On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

$$\boxed{\text{La suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

□

ECRICOME 2016 - suite de fonctions, suite d'intégrales, relation de récurrence et formule sommatoire, convergence en loi, loi du log

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0,+\infty[$ par : $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

Démonstration.

- La fonction g_0 est dérivable sur $[0,+\infty[$ car elle est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1+x)^2$ dérivable sur $[0,+\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle ($\forall x \in [0,+\infty[$, $(1+x)^2 \neq 0$).
- Soit $x \in [0,+\infty[$.

$$g_0'(x) = -2\,\frac{1}{(1+x)^3} < 0$$

Donc la fonction g_0 est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Commentaire

Notons que, pour dériver g_0, on utilise bien ici la formule de dérivation de l'inverse d'une fonction (et non la formule de dérivation d'un quotient).

- Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2} = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = 0$.
- On obtient finalement le tableau de variations suivant :

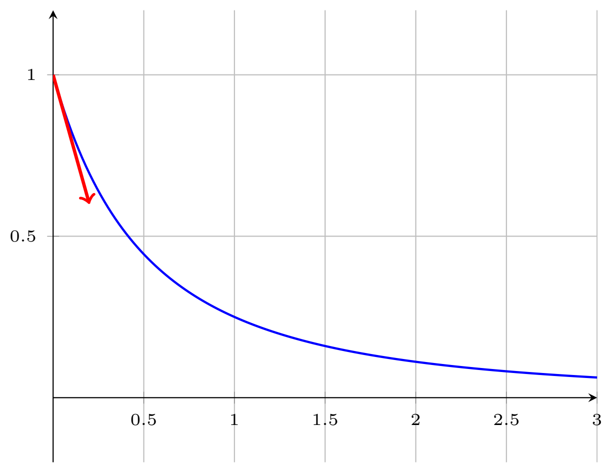
x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g_0'(x)$	$-$
Variations de g_0	$1 \searrow 0$

- L'équation de la tangente à g_0 en 0 est :

$$y = g_0(0) + g_0'(0)(x-0)$$

$$\boxed{\text{L'équation de la tangente à } g_0 \text{ en 0 est : } y = -2x+1.}$$

- On obtient la courbe représentative de g_0.



$\square$

b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ n \geqslant 2\ln(1+x)$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ car elle est le quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in [0, +\infty[,\ (1+x)^2 \neq 0$).
- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \dfrac{n\,\dfrac{(\ln(1+x))^{n-1}}{\cancel{1+x}}\,(1+x)^{\cancel{2}} - 2(1+x)\,(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4} \\ &= \dfrac{n\,(1+x)(\ln(1+x))^{n-1} - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^7} \\ &= \dfrac{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}\,(n - 2\ln(1+x))}{(1+x)^7} \end{aligned}$$

  Comme $x \geqslant 0$, on a :

$$1 + x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \geqslant 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} \text{On obtient alors : } \forall x \in [0, +\infty[, \\ g_n'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ n - 2\ln(1+x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ n \geqslant 2\ln(1+x). \end{gathered}}$$

- Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g_n'(x) \geqslant 0 \ &\Leftrightarrow\ n \geqslant 2\ln(1+x) \ \Leftrightarrow\ \frac{n}{2} \geqslant \ln(1+x) \\ &\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \geqslant 1 + x \qquad \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1 \geqslant x \end{aligned}$$

  Or : $\dfrac{n}{2} \geqslant 0$. Donc, par croissance de $x \mapsto \mathrm{e}^x$: $\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1 \geqslant 0$.

  On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1$		$+\infty$
Signe de $g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g_n	0	$\nearrow$	$\left(\dfrac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord :

$$g_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - 1\right) = \dfrac{\left(\ln\left(\cancel{1} + \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - \cancel{1}\right)\right)^n}{\left(\cancel{1} + \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} - \cancel{1}\right)^2} = \dfrac{\left(\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\right)\right)^n}{\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\right)^2} = \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{\mathrm{e}^{\cancel{2}\frac{n}{\cancel{2}}}} = \left(\dfrac{n}{2}\right)^n \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = \left(\dfrac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n$$

- Et :

$$g_n(0) = \frac{(\ln(1+0))^n}{(1+0)^2} = \frac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0$$

- Enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$.

Et : $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$, par croissances comparées.

$$\boxed{\text{Finalement, par composition de fonctions, } \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0.}$$

Commentaire

Le calcul de $g_n\left(e^{\frac{n}{2}}-1\right)$ n'était pas indispensable dans cette question.

$\square$

c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est :
  - $\times$ croissante sur l'intervalle $\left[0, e^{\frac{n}{2}}-1\right]$,
  - $\times$ décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n}{2}}-1, +\infty\right[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Sur } [0,+\infty[\text{, La fonction } g_n \text{ admet un maximum } M_n \text{ en } e^{\frac{n}{2}}-1 \text{ et,}\\ \text{d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}},\ M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n\end{array}}$$

Commentaire

Bien sûr, si le calcul de $g_n\left(e^{\frac{n}{2}}-1\right)$ n'a pas été effectué à la question précédente, il est obligatoire ici.

- On remarque :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\frac{n}{2e}\right)\right)$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\dfrac{n}{2e}\right) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(\dfrac{n}{2e}\right)\right) = +\infty$.

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = +\infty}$$

$\square$

d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$:

$$g_n(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- Tout d'abord, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = x^{\frac{3}{2}}\ g_n(x) = x^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$$

- En posant $y = 1 + x$, on a :

$$x^{\frac{3}{2}} g_n(x) = x^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = (y-1)^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2}$$

  Or :

$$(y-1)^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} \underset{y \to +\infty}{\sim} y^{\frac{3}{2}} \frac{(\ln(y))^n}{y^2} = \frac{(\ln(y))^n}{y^{\frac{1}{2}}}$$

  De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^{\frac{1}{2}}} = 0$. Donc : $\lim\limits_{y \to +\infty} (y-1)^{\frac{3}{2}} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$.

- Finalement :
  × $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x) = +\infty$,
  × $\lim\limits_{y \to +\infty} (y-1)^{\frac{3}{2}} \dfrac{(\ln(y))^n}{y^2} = 0$.

  On en déduit, par composition de fonctions : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} g_n(x) = 0$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ g_n(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

□

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$$

a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

Démonstration.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} g_0(t)\ dt$$

- La fonction g_0 est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A g_0(t)\ dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}\ dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1$$

  Or $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{1}{1+A} = 0$.

$$\boxed{\text{Donc l'intégrale } I_0 \text{ converge et vaut } 1.}$$

Commentaire

L'énoncé demande ici de démontrer la convergence de I_0 `ET` de calculer sa valeur.
Dans ce cas, on se lancera directement dans le calcul de l'intégrale.

□

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- La fonction g_n est continue sur $[0, +\infty[$.
- $\times$ $g_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$

  $\times$ $\forall x \in [1, +\infty[$, $g_n(x) \geqslant 0$ et $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$

  $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $\frac{3}{2}$, donc elle converge.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(x)\, dx$ converge.
- De plus, g_n est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\, dx$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)\, dx \text{ converge.}}$$

Commentaire

Il est encore une fois important de bien lire la question : l'énoncé demande cette fois simplement de montrer la convergence de I_n (sans la calculer).
Dans ce cas, on pensera en priorité à l'utilisation d'une critère de comparaison / équivalence / négligeabilité.

□

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1) I_n$$

Démonstration.
Soit $A \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{lcllcl} u(x) & = & (\ln(1+x))^{n+1} & u'(x) & = & (n+1)\dfrac{(\ln(1+x))^n}{1+x} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{(1+x)^2} & v(x) & = & -\dfrac{1}{1+x} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A g_{n+1}(x)\, dx &= \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\, dx \\ &= \left[-\frac{(\ln(1+x))^{n+1}}{1+x} \right]_0^A + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\, dx \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\, dx \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A g_n(x)\, dx \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$.

De plus l'intégrale I_n converge d'après la question ***2.b)***. D'où :

$$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)\ dx = 0 + (n+1) \int_0^{+\infty} g_n(x)\ dx$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = (n+1) I_n.}$$

□

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $I_n = n!$.

- **Initialisation** :
  D'après la question ***2.a)***, $I_0 = 1 = 0!$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $I_{n+1} = (n+1)!$).

$$\begin{array}{rcll} I_{n+1} & = & (n+1) I_n & \textit{(d'après la question } \textbf{2.c)}\textit{)} \\ & = & (n+1) \times n! & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & (n+1)! & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!}$$

□

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\ g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x < 0$: $f_n(x) = 0$. Donc : $f_n(x) \geqslant 0$.
  - × Si $x \geqslant 0$. D'après le tableau de variations dressé en question ***1.b)***, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{n!} g_n(x) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0.}$$

- × La fonction f_n est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante sur cet intervalle.
  × La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ car la fonction g_n l'est.

$$\boxed{\text{Ainsi } f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

Commentaire

La continuité sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points suffit ici. Mais rien n'interdit d'utiliser l'étude de g_n pour conclure quant à la continuité de f_n en 0.

- Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt$ converge et vaut 1.

  Tout d'abord : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} f_n(t)\ dt$, car f_n est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.

  De plus, comme l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g_n(t)\ dt$ converge :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n!} g_n(t)\ dt \ = \ \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt \\ & = & \dfrac{1}{n!} I_n \ = \ \dfrac{1}{\cancel{n!}} \cancel{n!} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{2.d)}\textit{)} \\ & = & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt \text{ converge et vaut 1.}}$$

Finalement, on a montré :
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geqslant 0$,
- f_n est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0,
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\ dt$ converge et vaut 1.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$$ □

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

Démonstration.

- La v.a.r. X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, f_n(t)\ dt$.
- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0,+\infty[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$$

- × Démontrons : $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(t\, f_n(t))$.

$$\frac{\frac{1}{t}}{t\, f_n(t)} = \frac{\frac{1}{t}}{t\, g_n(t)} = \frac{(1+t)^2}{t^2\,(\ln(1+t))^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\,(\ln(1+t))^n} = \frac{1}{(\ln(1+t))^n}$$

  Or : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(\ln(1+t))^n} = 0$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{t\, f_n(t)} = 0$.

  Ainsi : $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\,(t\, f_n(t))$.

× Pour tout $t \in [1, +\infty[$: $t\, f_n(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t} \geqslant 0$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 1, donc elle diverge.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$ diverge.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_n(t)\ dt$ diverge.

$$\boxed{X_n \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

Commentaire

Il y a plusieurs réflexes à acquérir pour ce type de questions :

1) l'énoncé demande de déterminer l'existence de $\mathbb{E}(X_n)$ `UNIQUEMENT`, donc on privilégiera l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité.

2) l'énoncé ne demande pas « Montrer que X_n admet une espérance », mais « X_n admet-elle une espérance ? ». Il y a donc de fortes chances que la réponse attendue soit « X_n `N`'admet `PAS` d'espérance ». C'est pourquoi on cherche ici à montrer en priorité $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t\, f_n(t)\right)$ plutôt que $t\, f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$.

□

c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x < 0$.

$$F_n(x) = \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\ dt = 0 \quad \textit{(car : } \forall t < 0,\ f_n(t) = 0\textit{)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x < 0,\ F_n(x) = 0}$$

□

d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \mathbb{P}([X_0 \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\ dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{0!}\, g_0(t)\ dt && \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\ dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^x \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \geqslant 0,\ F_0(x) = 1 - \frac{1}{1+x}}$$

□

e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \mathbb{P}([X_k \leqslant x]) = \int_0^{+\infty} f_k(t)\ dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{k!} g_k(t)\ dt \qquad \textit{(car } x \geqslant 0\textit{)} \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^k}{(1+t)^2}\ dt \end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{lll} u(t) = (\ln(1+t))^k & & u'(t) = k\dfrac{(\ln(1+t))^{k-1}}{1+t} \\ v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} & & v(t) = -\dfrac{1}{1+t} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \frac{1}{k!} \left(\left[-\frac{(\ln(1+t))^k}{1+t} \right]_0^x + k \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt \right) \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{k}{k!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x \frac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(1+t)^2}\ dt \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \int_0^x f_{k-1}(t)\ dt \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0,\ F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}}$$

□

f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \geqslant 0$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

- On somme alors ces égalités pour k variant de 0 à n. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} (F_k(x) - F_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} \right) = -\frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

Par télescopage, on a alors :

$$F_n(x) - F_0(x) = -\frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$$

- Or, d'après la question ***3.d)*** : $F_0(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. Donc :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= F_0(x) - \frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \qquad \textit{(car : } \frac{(\ln(1+x))^0}{0!} = 1\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \geqslant 0, \ F_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}}$$

□

g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$, alors : $F_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.
- Si $x \geqslant 0$, alors : $F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$.

  Or $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!}$ est la série exponentielle de paramètre $\ln(1+x)$.

  Elle est donc convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} = \exp(\ln(1+x)) = 1 + x$$

  Ainsi la suite $(F_n(x))_{n \geqslant 1}$ converge et on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - \frac{1}{\cancel{1+x}} \cancel{(1+x)} = 1 - 1 = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}, \ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0.}$$

□

h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

Démonstration.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une v.a.r. X de fonction de répartition G telle que (X_n) converge en loi vers X.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où G est continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = G(x)$$

Or, d'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = 0$.

Ceci est absurde car G est une fonction de répartition, donc, en particulier, $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (X_n) \text{ ne converge pas en loi.}}$$

Commentaire

Il convient d'insister ici sur la définition de la convergence en loi.
(X_n) converge en loi vers X si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ où F_X est continue, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

En particulier :

1) cette convergence n'a pas besoin d'être vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Elle peut ne pas être vérifiée pour les points de discontinuité de F_X.

2) on s'intéresse bien ici aux points de continuité de F_X et non de F_{X_n}.

□

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

Démonstration.

- Sans perte de généralité, on considère pour la suite que : $X_n(\Omega) = [0, +\infty[$.
Donc $\ln(1 + X_n)$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n \text{ est bien définie.}}$$

- Déterminons $Y_n(\Omega)$, où $Y_n = h(X_n)$ avec $h : x \mapsto \ln(1 + x)$.
Comme précisé précédemment : $X_n(\Omega) = [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y_n(\Omega) & = & h(X_n)(\Omega) \ = \ h(X_n(\Omega)) & \\ & = & h([0, +\infty[) & \\ & = & [h(0), \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0, +\infty[\textit{)} \\ & = & [0, +\infty[& \textit{(car } h(0) = 0 \textit{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_n(\Omega) = [0, +\infty[}$$

□

b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
Ainsi, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_n = \ln(1 + X_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + t) f_n(t) \, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ \ln(1 + t) \ f_n(t) \geqslant 0$$

- Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \ln(1+t) f_n(t) &= \ln(1+t) \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} && \textit{(par définition de } f_n\textit{)} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} \\ &= (n+1) \frac{1}{(n+1)!} \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2} \\ &= (n+1) f_{n+1}(t) && \textit{(par définition de } f_{n+1}\textit{)} \end{aligned}$$

- Or la fonction f_{n+1} est une densité nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t)\, dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t)\, dt = (n+1) \times 1 = (n+1)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = n+1.}$$

Commentaire

On rappelle l'énoncé du théorème de transfert pour les v.a.r. à densité :
Soit X une v.a.r. de densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$, et g une fonction **continue** sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\, f(t)\, dt$ est **absolument convergente**, alors la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(t)\, f(t)\, dt$$

On applique donc ici le théorème de transfert pour la fonction $g : t \mapsto \ln(1+t)$.

□

c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

Démonstration.

- La fonction f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_n = \ln(1 + X_n)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ (\ln(1+t))^2 f_n(t) \geqslant 0$$

- Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} (\ln(1+t))^2 f_n(t) &= (\ln(1+t))^2 \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} && \textit{(par définition de } f_n\textit{)} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{(\ln(1+t))^{n+2}}{(1+t)^2} \\ &= (n+2)(n+1) \frac{1}{(n+2)!} \frac{(\ln(1+t))^{n+2}}{(1+t)^2} \\ &= (n+2)(n+1) f_{n+2}(t) && \textit{(par définition de } f_{n+2}\textit{)} \end{aligned}$$

- Or la fonction f_{n+2} est une densité nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+2}(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\ dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^2 f_n(t)\ dt = (n+1)(n+2) \times 1 = (n+1)(n+2)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } Y_n \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(Y_n^2) = (n+2)(n+1).}$$

- D'après la formule de Kœnig-Huyghens :

$$V(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = (n+1)(\cancel{n} + 2 - (\cancel{n} + 1)) = n+1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ admet une variance et : } \mathbb{V}(Y_n) = n+1.}$$

Commentaire

On a, cette fois, appliqué le théorème de transfert avec la fonction $g : t \mapsto (\ln(1+t))^2$.

□

d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) = \mathbb{P}([\ln(1+X_n) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([1+X_n \leqslant \mathrm{e}^x]) && \textit{(car } x \mapsto \mathrm{e}^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}([X_n \leqslant \mathrm{e}^x - 1]) = F_n(\mathrm{e}^x - 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)}$$

□

e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

Démonstration.

- Commençons par expliciter H_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Soit $x < 0$. Alors : $\mathrm{e}^x - 1 < 0$. Donc, d'après la question ***4.d)***, on obtient :

$$H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1) = 0$$

- Soit $x \geqslant 0$. Alors $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$. Donc, toujours d'après la question ***4.d)***, on obtient :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= F_n(\mathrm{e}^x - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{\cancel{1} + \mathrm{e}^x - \cancel{1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(\cancel{1} + \mathrm{e}^x - \cancel{1}))^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(\mathrm{e}^x))^k}{k!} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

- Ainsi :
  - × H_n est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante sur cet intervalle.
  - × H_n est continue sur $]0, +\infty[$ comme somme et produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
  - × d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} H_n(x) = 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} H_n(x) &= H_n(0) = 1 - \mathrm{e}^{-0} \sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!} \\ &= 1 - 1 = 0 \qquad \textit{(car } \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\textit{)} \end{aligned}$$

    Donc H_n est continue en 0.

  Ainsi la fonction H_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, par des arguments similaires aux précédents.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_n \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité h_n de Y_n, on dérive H_n sur les intervalles **ouverts**. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × Si $x \in]-\infty, 0[$.

$$h_n(x) = H_n'(x) = 0$$

  - × Si $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \mathrm{e}^x F_n'(\mathrm{e}^x - 1) = \mathrm{e}^x f_n(\mathrm{e}^x - 1) \\ &= \mathrm{e}^x \frac{1}{n!} \frac{(\ln(\cancel{1} + \mathrm{e}^x - \cancel{1}))^n}{(\cancel{1} + \mathrm{e}^x - \cancel{1})^2} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\cancel{\mathrm{e}^x}}{(\mathrm{e}^x)^{\cancel{2}}} (\ln(\mathrm{e}^x))^n = \frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

  - × On choisit enfin $h_n(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

On choisit ici $h_n(0) = 0$, mais n'importe quelle valeur positive conviendrait.

□

f) Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a :

$$H_0 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre 1.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  - La v.a.r. Y_0 admet un moment d'ordre k si et seulement si Y_0^k admet une espérance.
  - La fonction f_0 est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
    Donc, d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $Y_0^k = (\ln(1 + X_n))^k$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\, dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence puisque l'intégrande est positive :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \ (\ln(1+t))^k f_0(t) \geqslant 0$$

  - Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcll} (\ln(1+t))^k f_0(t) & = & (\ln(1+t))^k \dfrac{1}{(1+t)^2} & \textit{(par définition de } f_0\textit{)} \\ & = & g_k(t) & \textit{(par définition de } g_k\textit{)} \end{array}$$

  - Or, d'après la question ***2.d)***, l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_k(t)\, dt$ converge et vaut $k!$.
    On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\, dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} (\ln(1+t))^k f_0(t)\, dt = k!$$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ Y_0 \text{ admet un moment d'ordre } k \text{ et : } \mathbb{E}(Y_0^k) = k!}$$

□

EDHEC 2016 - loi de Rademacher, loi uniforme à densité, loi de Bernoulli, v.a.r. définie par cas, produit et somme de v.a.r.

- Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0, 1[$.
- On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3, 1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1, 3]$.
- On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :
$$\mathbb{P}([Z = 1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z = -1]) = 1 - p$$
- Enfin,on note X la variable aléatoire, définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$
- On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3, 1])$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.}$$

- D'après l'énoncé, $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 3])$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } x \in [-1, 3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}.}$$

Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours.
- Ici, il suffit de connaître la fonction de répartition d'une variable $U \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ (avec $a < b$) :

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

□

2. a) Établir, grâce au système complet d'évènements $([Z = 1], [Z = -1])$, que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = p\ F_U(x) + (1 - p)\ F_V(x)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La famille $\big([Z=1], [Z=-1]\big)$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([Z=1] \cap [X \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1] \cap [X \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Z=1] \cap [U \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1] \cap [V \leqslant x]) \quad \textit{(par définition de } X\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}([Z=1]) \times \mathbb{P}([U \leqslant x]) + \mathbb{P}([Z=-1]) \times \mathbb{P}([V \leqslant x]) \quad \textit{(car } Z \textit{ est indépendante de } U \textit{ et de } V\textit{)} \\ & = & p \times \mathbb{P}([U \leqslant x]) + (1-p) \times \mathbb{P}([V \leqslant x]) \\ & = & p \times F_U(x) + (1-p) \times F_V(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x).}$$

□

b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.
  - Si $Z(\omega) = 1$ alors, par définition, $X(\omega) = U(\omega)$.
    Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3,1])$ alors $U(\omega) \in [-3,1]$.
    Dans ce cas, $X(\omega) \in [-3,1]$.
  - Si $Z(\omega) = -1$ alors, par définition, $X(\omega) = V(\omega)$.
    Comme $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,3])$ alors $U(\omega) \in [-1,3]$.
    Dans ce cas, $X(\omega) \in [-1,3]$.

  Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in [-3,1] \cup [-1,3] = [-3,3]$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X(\Omega) \subset [-3,3].}$$

Commentaire

- On peut supposer ici qu'une argumentation moins formelle serait acceptée par le correcteur. Comme X prend les mêmes valeurs que U ou V (selon les valeurs prises par Z), on peut écrire :
$$X(\Omega) \subset U(\Omega) \cup V(\Omega) = [-3,1] \cup [-1,3] = [-3,3]$$
- On peut aussi supposer qu'une disjonction de cas écrite sans les ω (cas $Z = 1$ et cas $Z \neq 1$) serait acceptée. Cependant, il faut bien comprendre que toute v.a.r. Z est une application $Z : \Omega \to \mathbb{R}$. Écrire « si $Z = 1$ » signifie donc que l'on considère tous les éléments $\omega \in \Omega$ tels que $Z(\omega) = 1$ c'est à dire tous les éléments ω qui réalisent l'événement $[Z = 1]$.
- Une dernière possibilité est d'écrire la rédaction (correcte) suivante :
  - si l'événement $[Z = 1]$ est réalisé alors X prend la même valeur que U, v.a.r. qui prend ses valeurs dans $[-3,1]$.
  - si l'événement $[Z = -1]$ est réalisé alors X prend la même valeur que V, v.a.r. qui prend ses valeurs dans $[-1,3]$.

  Ainsi, X prend ses valeurs dans $[-3,1] \ \cup\ [-1,3] = [-3,3]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.
  - Si $x < -3$ alors $[X \leqslant x] = \varnothing$.
    On en déduit que $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 0$.
  - Si $x \in [-3, -1]$ alors, d'après la question précédente :

$$F_X(x) \;=\; p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \;=\; p\frac{x+3}{4} + (1-p)\times 0 \;=\; p\ \frac{x+3}{4}$$

  - Si $x \in [-1, 1]$ alors, d'après la question précédente :

$$F_X(x) \;=\; p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \;=\; p\ \frac{x+3}{4} + (1-p)\frac{x+1}{4} \;=\; \frac{x+2p+1}{4}$$

  - Si $x \in [1, 3]$ alors, d'après la question précédente :

$$F_X(x) \;=\; p\ F_U(x) + (1-p)\ F_V(x) \;=\; p\times 1 + (1-p)\ \frac{x+1}{4} \;=\; p + (1-p)\ \frac{x+1}{4}$$

  - Si $x > 3$ alors $[X \leqslant x] = \Omega$.
    On en déduit que $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ p\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3,-1] \\ \dfrac{x+2p+1}{4} & \text{si } x \in [-1,1] \\ p + (1-p)\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } x \in [1,3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}}$$

□

c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

Démonstration.

- La fonction F_X est :
  - × continue sur $\mathbb{R}$.
    En effet, elle est de classe $\mathcal{C}^0$ (même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,3[\,\cup\,]3,+\infty[$ car polynomiale sur chacun de ces intervalles.
    De plus, elle est continue en -3 car : $\lim\limits_{x\to(-3)^-} F_X(x) = F_X(-3) = \lim\limits_{x\to(-3)^+} F_X(x) = 0$.
    De la même manière, elle est aussi continue en -1, 1 et 3.
  - × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,-3[\,\cup\,]-3,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,3[\,\cup\,]3,+\infty[\, = \mathbb{R}\setminus\{-3,-1,1,3\}$.

  Ainsi, X est une variable à densité.
- Afin d'obtenir une densité f_X, on dérive F_X sur les intervalles **ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent :
  - × si $x \in\,]-\infty,-3[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = 0$.
  - × si $x \in\,]-3,-1[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{p}{4}$.
  - × si $x \in\,]-1,1[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{1}{4}$.
  - × si $x \in\,]1,3[$ alors $f_X(x) = F_X'(x) = \dfrac{1-p}{4}$.

× si $x \in \,]3, +\infty[$ alors $f_X(x) = F'_X(x) = 0$.

Enfin, on **choisit**, par exemple, $f_X(-3) = 0$, $f_X(-1) = \dfrac{1}{4}$, $f_X(1) = \dfrac{1}{4}$ et $f_X(3) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -3 \\ \dfrac{p}{4} & \text{si } x \in\,]-3, -1[\\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ \dfrac{1-p}{4} & \text{si } x \in\,]1, 3[\\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}}$$

Commentaire

Il faut bien comprendre qu'on peut prendre n'importe quelle valeur positive pour f_n en -3, -1, 1 et 3. On peut ainsi construire une infinité de densités de Y_n.
C'est pourquoi on parle d'**une** densité.

□

d) Établir que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$, puis les déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f_X(t)\ dt$.
- Remarquons tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt$$
car f est nulle en dehors de $[-3, 3]$.
- La fonction $t \mapsto t\ f(t)$ est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{-3}^{3} t\ f_X(t)\ dt$ est bien définie et que X admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-3} t\ 0\ dt} + \int_{-3}^{-1} t\ \frac{p}{4}\ dt + \int_{-1}^{1} t\ \frac{1}{4}\ dt + \int_{1}^{3} t\ \frac{1-p}{4}\ dt + \cancel{\int_{3}^{+\infty} t\ 0\ dt} \\
&= \frac{p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{3} \\
&= \frac{p}{8}\left((-1)^2 - (-3)^2\right) + \frac{1}{8}\left(1^2 - (-1)^2\right) + \frac{1-p}{8}\left(3^2 - 1^2\right) \\
&= \frac{p}{8}(1-9) + \frac{1}{8}\cancel{(1-1)} + \frac{1-p}{8}(9-1) \\
&= \frac{1}{8}\left(-8\ p + 8\ (1-p)\right) \\
&= -p + (1-p) \ = \ 1 - 2p
\end{aligned}$$

- De même, la fonction $t \mapsto t^2\ f(t)$ est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$. On en déduit que $\displaystyle\int_{-3}^{3} t^2\ f_X(t)\ dt$ est bien définie et que X admet un moment d'ordre 2 donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\ dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-3} t^2\ 0\ dt} + \int_{-3}^{-1} t^2\ \frac{p}{4}\ dt + \int_{-1}^{1} t^2\ \frac{1}{4}\ dt + \int_{1}^{3} t^2\ \frac{1-p}{4}\ dt + \cancel{\int_{3}^{+\infty} t^2\ 0\ dt} \\
&= \frac{p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{3} \\
&= \frac{p}{12}\ ((-1)^3 - (-3)^3) + \frac{1}{12}\ (1^3 - (-1)^3) + \frac{1-p}{12}\ (3^3 - 1^3) \\
&= \frac{p}{12}\ (-1+27) + \frac{1}{12}\ (1+1) + \frac{1-p}{12}\ (27-1) \ = \ \frac{1}{12}\ (26\ p + 2 + 26\ (1-p)) \\
&= \frac{1}{6}\ (13\ p + 1 + 13\ (1-p)) \ = \ \frac{1}{6}\ (\cancel{13\ p} + 1 + 13 - \cancel{13\ p}) \ = \ \frac{14}{6} \ = \ \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

- Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{7}{3} - (1-2p)^2 = \frac{7}{3} - (1 - 4p + 4p^2) = \frac{4}{3} + 4p - 4p^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = 1 - 2p \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X) = \frac{4}{3} + 4p - 4p^2.}$$

Commentaire

Revenons sur l'hypothèse de continuité par morceaux.

- Tout d'abord, il faut se rendre compte que la fonction $h : t \mapsto t\ f_X(t)$ `N'EST PAS` continue sur $[-3, 3]$. En fait, elle n'est pas continue en -3, ni en -1, ni en 1, ni en 3. Par contre h est continue sur $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.
- Pour autant, cela ne signifie pas que l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{-1} h(t)\ dt$ est impropre.
  En effet, la fonction $h_{|]-3,-1[}$ (restriction de h sur l'ensemble $]-3, -1[$) :
  - × admet une limite finie en -3 (égale à $-3\ \frac{p}{4}$),
  - × admet une limite finie en -1 (égale à $-\frac{p}{4}$).

  Ainsi, $h_{|]-3,-1[}$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[-3, -1]$ ce qui justifie que l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{-1} h(t)\ dt$ est bien définie.
  Mais c'est la fonction $h_{|]-3,-1[}$ qui est prolongée par continuité et en aucun cas h (ce qui n'aurait pas de sens : la fonction h est définie en -3 et en -1, il n'y a pas lieu de la prolonger en ces points).
- La notion de continuité par morceaux décrit complètement cette situation :
  - × h est continue sur les intervalles ouverts $]-\infty, -3[$, $]-3, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$ *(ici, elle n'est pas continue en -3, -1, 1, 3)*.
  - × h admet une limite finie à gauche en tous ces points.
  - × h admet une limite finie à droite en tous ces points.

  (la limite à gauche est éventuellement différente de la limite à droite)
  Ainsi, h est **continue par morceaux** sur $[-3, 3]$.

□

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a) Vérifier que l'on a :

$$X = U \ \frac{1+Z}{2} + V \ \frac{1-Z}{2}$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- Si $Z(\omega) = 1$ alors $X(\omega) = U(\omega)$ et :

$$U(\omega) \ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega) \ \frac{1-Z(\omega)}{2} = U(\omega) \ \frac{1+1}{2} + \cancel{V(\omega) \ \frac{1-1}{2}} = U(\omega) = X(\omega)$$

- Si $Z(\omega) \neq 1$ alors $Z(\omega) = -1$, $X(\omega) = V(\omega)$ et :

$$U(\omega) \ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega) \ \frac{1-Z(\omega)}{2} = \cancel{U(\omega) \ \frac{1-1}{2}} + V(\omega) \ \frac{1+1}{2} = V(\omega) = X(\omega)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \omega \in \Omega, \ \ X(\omega) = U(\omega) \ \frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega) \ \frac{1-Z(\omega)}{2}.}$$

□

b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que U et V admettent une espérance car elles suivent des lois uniformes. De plus :

$$\mathbb{E}(U) = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad \text{ et } \quad \mathbb{E}(V) = \frac{-1+3}{2} = 1$$

- Les v.a.r. Z, $\dfrac{1+Z}{2}$ et $\dfrac{1-Z}{2}$ sont finies donc admettent une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} z \ \mathbb{P}([Z = z]) = -1 \ \mathbb{P}([Z = -1]) + 1 \ \mathbb{P}([Z = 1]) = -(1-p) + p = 2p - 1$$

Et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = \frac{1}{2} \ (\mathbb{E}(1) + \mathbb{E}(Z)) = \frac{1}{2} \ (\cancel{1} + 2p - \cancel{1}) = p$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = \frac{1}{2} \ (\mathbb{E}(1) - \mathbb{E}(Z)) = \frac{1}{2} \ (1 - 2p + 1) = 1 - p$$

- Les v.a.r. U et Z sont indépendantes.
  Par le lemme des coalitions, on en déduit que les v.a.r. U et $\dfrac{1+Z}{2}$ sont indépendantes.
  On en déduit que la v.a.r. $U \ \dfrac{1+Z}{2}$ admet une espérance comme produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}\left(U \ \frac{1+Z}{2}\right) \ = \ \mathbb{E}(U) \ \mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = -p$$

- De même, les v.a.r. V et Z sont indépendantes.
  Par le lemme des coalitions, on en déduit que les v.a.r. V et $\dfrac{1-Z}{2}$ sont indépendantes.
  On en déduit que la v.a.r. $V\ \dfrac{1-Z}{2}$ admet une espérance comme produit de v.a.r. indépendantes admettant une espérance. De plus :
$$\mathbb{E}\left(V\ \frac{1-Z}{2}\right) = \mathbb{E}(V)\ \mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = 1-p$$
- Enfin, d'après la question précédente, X s'écrit comme la somme de deux v.a.r. qui admettent une espérance. On en déduit que X admet une espérance. Par linéarité, on obtient :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(U\ \frac{1+Z}{2} + V\ \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(U\ \frac{1+Z}{2}\right) + \mathbb{E}\left(V\ \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= -p + (1-p) = 1-2p\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien que } X \text{ admet une espérance et que } \mathbb{E}(X) = 1-2p.}$$ □

c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.
On procède comme dans la question précédente.
- Tout d'abord :
$$\begin{aligned}X^2 &= \left(U\ \frac{1+Z}{2} + V\ \frac{1-Z}{2}\right)^2 = \left(U\ \frac{1+Z}{2}\right)^2 + UV\ \frac{1-Z^2}{4} + \left(V\ \frac{1-Z}{2}\right)^2 \\ &= U^2\ \frac{1+2Z+Z^2}{4} + UV\ \frac{1-Z^2}{4} + V^2\ \frac{1-2Z+Z^2}{4}\end{aligned}$$
  Or, comme $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$, $Z^2(\Omega) = \{1\}$ et ainsi $Z^2 = 1$ (Z^2 est la variable constante égale à 1). On en déduit :
$$\begin{aligned}X^2 &= U^2\ \frac{1+2Z+1}{4} + \cancel{UV\ \frac{1-1}{4}} + V^2\ \frac{1-2Z+1}{4} \\ &= U^2\ \frac{1+Z}{2} + V^2\ \frac{1-Z}{2}\end{aligned}$$
- Les v.a.r. U et V, qui suivent des lois uniformes, admettent un moment d'ordre 2 puisqu'elles admmettent une variance. On peut déduire de la formule de Kœnig-Huygens :
$$\mathbb{E}(U^2) = \mathbb{V}(U) + (\mathbb{E}(U))^2 = \frac{(1-(-3))^2}{12} + (-1)^2 = \frac{16}{12} + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$
$$\mathbb{E}(V^2) = \mathbb{V}(V) + (\mathbb{E}(V))^2 = \frac{(3-(-1))^2}{12} + 1^2 = \frac{16}{12} + 1 = \frac{7}{3}$$
- Les v.a.r. U^2, $\dfrac{1+Z}{2}$ admettent une espérance et sont indépendantes.
  On en déduit que la v.a.r. produit $U^2\ \dfrac{1+Z}{2}$ admet une espérance, donnée par :
$$\mathbb{E}\left(U^2\ \frac{1+Z}{2}\right) = \mathbb{E}(U^2)\ \mathbb{E}\left(\frac{1+Z}{2}\right) = \frac{7}{3}\ p$$

- Les v.a.r. V^2, $\dfrac{1-Z}{2}$ admettent une espérance et sont indépendantes.
  On en déduit que la v.a.r. produit $V^2 \ \dfrac{1-Z}{2}$ admet une espérance, donnée par :
$$\mathbb{E}\left(V^2 \ \frac{1-Z}{2}\right) = \mathbb{E}(V^2)\ \mathbb{E}\left(\frac{1-Z}{2}\right) = \frac{7}{3}\ (1-p)$$
- X^2 admet une espérance car est la somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
  Enfin, par linéarité de l'espérance :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\left(U^2 \ \frac{1+Z}{2} + V^2 \ \frac{1-Z}{2}\right) = \mathbb{E}\left(U^2 \ \frac{1+Z}{2}\right) + \mathbb{E}\left(V^2 \ \frac{1-Z}{2}\right) \\ &= \frac{7}{3}\ p + \frac{7}{3}\ (1-p) = \frac{7}{3}\ (p+(1-p)) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(X^2) = \frac{7}{3}.}$$ □

4. a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Déterminer la loi de $2T-1$.

Démonstration.
- Comme $T \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $T(\Omega) = \{0,1\}$. On en déduit :
$$\begin{aligned} (2T-1)(\Omega) &= \{2u-1 \mid u \in T(\Omega)\} \\ &= \{2 \times (-1) - 1, 2 \times -1\} \\ &= \{-1, 1\} \end{aligned}$$
$$\boxed{(2T-1)(\Omega) = \{-1,1\}}$$
- De plus :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([2T-1=-1]) &= \mathbb{P}([2T=0]) = \mathbb{P}([T=0]) = 1-p \\ \mathbb{P}([2T-1=1]) &= \mathbb{P}([2T=2]) = \mathbb{P}([T=1]) = p \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Ainsi, } 2T-1 \text{ et } Z \text{ suivent la même loi.}}$$

Commentaire

- Dire que deux v.a.r. discrètes Z_1 et Z_2 suivent la même loi ne signifie pas que $Z_1 = Z_2$.
  Cela ne signifie pas non plus que $\mathbb{P}([Z_1 = Z_2]) = 1$.
  Cela signifie simplement :
  × $Z_1(\Omega) = Z_2(\Omega)$,
  × $\forall z \in Z_1(\Omega)$, $\mathbb{P}([Z_1 = z]) = \mathbb{P}([Z_2 = z])$.
- Comme $Z(\Omega) = \{-1,1\} \neq \{0,1\}$, la v.a.r. Z ne suit pas une loi de Bernoulli.
  De manière générale, une v.a.r. qui ne prend que deux valeurs ne suit pas pour autant une loi de Bernoulli. Pour que ce soit le cas, il faut que ces deux valeurs soient 0 et 1.

□

b) On rappelle que `rd.uniform(a,b)` et `rd.binomial(1,p)` sont des commandes **Python** permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Écrire des commandes **Python** permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Démonstration.

- Pour simuler les v.a.r. U, V et T, il suffit d'utiliser les instructions données.

```
U = rd.uniform(-3,1)
V = rd.uniform(-1,3)
T = rd.binomial(1,p)
```

- Pour les v.a.r. Z et X on utilise les questions ***3.a)*** et ***4.a)***.

```
Z = 2 * T - 1
X = U * (1+Z)/2 + V * (1-Z)/2
```

Commentaire

- Ces quelques lignes ne sont utilisables que si `p` est préalablement défini. Pour ce faire, on peut ajouter une ligne :

```
p = float(input('Entrer une valeur pour p : '))
```

  en début de programme afin que l'utilisateur entre une valeur pour `p`.
  Une autre manière de régler ce problème est de transformer ce programme en une fonction de paramètre `p`.
- Dans le programme, on a écrit : `Z = 2 * T - 1`. Autrement dit, on a décidé de simuler la v.a.r. Z en lui donnant pour valeurs celles d'une v.a.r. qui suit la même loi. Au-delà de la v.a.r. , c'est ici la loi qu'on cherche à simuler. Ainsi, n'importe quelle v.a.r. qui suit cette loi fait l'affaire.

$\square$