Sujets de révisions
Variables aléatoires discrètes

ECRICOME 2023 sujet 0 - rang du deuxième Pile, loi géométrique, couple de v.a.r. discrètes, loi de la somme, expérience en deux étapes, covariance, coefficient de corrélation linéaire

Soit $p \in]0,1[$. On considère une pièce donnant `Pile` avec probabilité p. On effectue une succession de lancers indépendants de cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième `Pile`.
On note alors X_1 le rang d'apparition du premier `Pile` et X_2 le nombre de lancers supplémentaires effectués après le premier `Pile` jusqu'à l'apparition du deuxième `Pile`.
Par exemple, si les lancers donnent dans cet ordre :

`Face`, `Pile`, `Face`, `Face`, `Face`, `Pile`,

alors $[X_1 = 2]$ et $[X_2 = 4]$ se réalisent.

1. Reconnaître la loi de X_1 et la loi de X_2.

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

3. En déduire que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}([X_1 + X_2 = n]) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

On note alors Y la variable aléatoire égale au nombre de `Face` obtenus sur toute l'expérience.

5. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, prenant en argument d'entrée le réel p de $]0,1[$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.

```
import numpy.random as rd
def simul_Y(p):
    Y = 0
    nb_Pile = 0
    while ________________ :
        if _____________________ :
            nb_Pile = nb_Pile + 1
        else :
            ______________
    return Y
```

6. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2.

7. En déduire l'espérance de Y, la variance de Y et la loi de Y.

Une fois le second `Pile` obtenu, si l'on a obtenu un nombre n de `Face`, alors on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On effectue alors un unique tirage dans cette urne et on note U la variable aléatoire égale au numéro obtenu. On note également $V = Y - U$.

8. Ecrire une fonction **Python** `simul_UV`, prenant en argument d'entrée la valeur du réel p de $]0,1[$, et renvoyant une simulation du couple (U,V). On pourra faire appel à la fonction `simul_Y` définie à la question ***5***.

9. Justifier que $U(\Omega)=\mathbb{N}$ et préciser $V(\Omega)$.

10. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}([U=k])$.

11. Montrer que la variable aléatoire $U+1$ suit une loi usuelle que l'on reconnaîtra.
En déduire l'espérance et la variance de U.

12. Montrer que V suit la même loi que U.

13. ***a)*** Montrer que U et V sont indépendantes.

b) En déduire la covariance du couple (Y,U).

c) Montrer que le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y,U) est égal $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EDHEC 2021 - Etude d'un jeu, loi géométrique

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :
Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.
On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».
On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».
On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp.B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\,\mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q.

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n \leqslant Y_n]$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(G_n) \ = \ \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \ \frac{q}{1+q}$$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{2}$.

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que le ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. ***a)*** À l'aide du système complet d'événements $([X_1 = i])_{i\in\mathbb{N}^*}$, démontrer : $\mathbb{P}([Y_1 = X_1 + 1]) = \dfrac{pq}{1+q}$.

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4. ***a)*** Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet à **Python** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script **Python** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = float(input('entrez une valeur pour p :'))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y :
    X = ____________________
    Y = ____________________
    c = _______
if X < Y :
    ___________________________________
else :
    ___________________________________
print(c)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
if _______________________________ :
    print('A gagne le deuxième jeu')
else :
    __________________________________________
```

EDHEC 2015 - intégration, séries, couple de v.a.r. discrètes, loi géométrique, loi uniforme discrète, expérience en deux étapes

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. ***a)*** Démontrer : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\ dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

2. ***a)*** Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

b) En déduire : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\ dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt$.

c) Utiliser la question ***1.*** pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

d) En conclure : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt$.

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\ dt$.

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

3. Reconnaître la loi de N.

4. ***a)*** Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2 * np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

b) Compléter les commandes **Python** suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
p = float(input('Donner la valeur de p :'))
N = rd.geometric(_____) # simulation d'une loi géométrique
X = rd.randint(_____,_______) # simulation d'une loi uniforme discrète
if ___________________________:
    print('______________________')
else:
    print('______________________')
```

5. a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j]}(\,[X = 2k+1]\,)$.

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}(\,[X = 2k+1]\,)$.

c) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j]}(\,[X = 2k+1]\,)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

d) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}(\,[X = 2k+1]\,)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

6. a) Justifier que $\mathbb{P}(\,[X = 2k+1]\,) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\,[N = n]\,)\ \mathbb{P}_{[N=n]}(\,[X = 2k+1]\,)$.
En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\,[X = 2k+1]\,) \ = \ \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\,[X = 2k+1]\,) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\, dt$.

7. a) Démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt = 0$.

b) Démontrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\,[X = 2k+1]\,) \ = \ \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\, dt \right)$$

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{p}{q} \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\, dt$.

8. a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} \ = \ \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q.

c) En déduire que $\mathbb{P}(A) > \dfrac{1}{2}$.

EML 2014 - tirages avec remise dans une urne, loi uniforme discrète, convergence en loi

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. *a)* Exprimer l'évenement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

b) Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

5. Montrer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

7. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.

En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!], \mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k} \dbinom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

12. Montrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

EML 2017 - tirages avec rajout dans une urne, loi de Bernoulli, couple de v.a.r. discrètes, convergence en loi

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note : B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »,
R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
def EML(n):
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 # r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 # s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k in range(n):
        x = rd.random()
        if ______________:
            ___________
            ___________
        else:
            ___________
    return s
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n = 10
m = 0
for i in range(1000):
    m = m + EML(n)
print(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La v.a.r. admet-elle une espérance ? une variance ?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

7. ***a)*** Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

b) En déduire la loi de X_2.

c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k} \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,

puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.

c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$, et : $\forall x > 1$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.

12. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)},$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

ESCP 2001 - tirages sans remise dans une urne, couple de v.a.r. discrètes, loi uniforme discrète

Préliminaire

1. Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Partie I

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires.
On tire au hasard, successivement et *sans remise*, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

2. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

3. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer :

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

4. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

5. ***a)*** Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.

b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

6. À l'aide des résultats de la question ***5*** :

a) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

b) Montrer l'égalité des variances $\mathbb{V}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

c) Établir la relation : $2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$.

7. Calculer $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire $\mathbb{V}(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Partie II

On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

8. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

9. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$$

ESG 1995 - loi de Poisson, loi binomiale, couple de v.a.r. discrètes, covariance, coefficient de corrélation linéaire

Le nombre de voitures vendues par un concessionnaire chaque jour est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Lorsqu'un client se présente pour acheter une voiture, on admet que la probabilité qu'il demande un crédit est égale à p, avec $0 < p < 1$.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui dans la journée demandent un crédit pour acheter une voiture.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.

2. Déterminer la loi de Y, puis calculer l'espérance et la variance de Y.

3. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui achètent une voiture au comptant.

  a) Déterminer la loi de Z.

  b) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

4. En remarquant que $Y + Z = X$, déterminer la covariance de X et Y.

5. ***a)*** Calculer $\rho_{X,Y}$, le cœfficient de corrélation linéaire de X et Y.

  b) Commenter le signe de $\rho_{X,Y}$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

  c) X peut-elle être une fonction affine de Y ?

(Suite page suivante)

6. On considère les lignes de commande en Python ci-dessous :

```
pliste = [0.01,0.1,0.5,0.7,0.9,0.99]
lam = 20
for p in pliste:
    X=rd.poisson(lam,10000)
    Y=np.zeros(10000)
    for i in range(10000) :
        Y[i] = rd.binomial(X[i],p)
    plt.plot(X,Y,'.')
    plt.title(f'p={p} et coefficient de corrélation linéaire = {np.sqrt(p)}')
    plt.show()
```

Après exécution du script précédent, on obtient la fenêtre graphique suivante que l'on commentera :