Probabilités - niveau 3

I. Formule des probabilités totales

Exercice 1
On dispose d'une pièce truquée. La probabilité qu'elle tombe sur `Pile` est $p \in]0,1[$ et la probabilité qu'elle tombe sur `Face` est $q = 1 - p$. On considère une succession infinie de lancers de cette pièce. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit l'événement

B_n : « aucune séquence de `Face` de longueur 3 n'apparaît dans la suite des n premiers lancers »

et on note $b_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer b_1, b_2 et b_3.

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2 b_{n-3}$$

Indication : interpréter cette formule comme l'application de la formule des probabilités totales avec un certain système complet d'événements qui fera apparaître les probabilités p, pq et pq^2.

3. *Informatique*

a) Écrire une fonction en **Python** qui prend en entrée un entier n et le réel p et qui renvoie un tableau contenant les n premiers termes de la suite $(b_k)_{k \geqslant 1}$.

b) En déduire un script **Python** permettant de tracer les 100 premiers termes de la suite lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 2
On dispose d'une pièce truquée. La probabilité qu'elle tombe sur `Pile` est $p \in]0,1[$ et la probabilité qu'elle tombe sur `Face` est $q = 1 - p$. On considère une succession infinie de lancers de cette pièce.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux `Pile` consécutifs sans avoir eu auparavant la séquence `Pile-Face` ?
Indication : commencer par lister tous les tirages possibles donnant les deux `Pile` avant la séquence `Pile-Face`. Formaliser ensuite le calcul en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à une variable aléatoire bien choisie.

II. Théorème de transfert

Exercice 3

Soit $p \in]0,1[$. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([Y = n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Y telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : n \mapsto \mathbb{P}([X_n = k])$ définie sur $\mathbb{N}^*$.
On définit une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{E}(f_k(Y))$$

Montrer que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

III. Manipulation d'unions et d'intersections d'événements

Exercice 4

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que, si C et D sont deux événements, alors

$$\mathbb{P}(C \cup D) \leqslant \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)$$

2. Montrer que, pour toute suite (A_n) d'événements et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

3. Montrer que, pour toute suite (A_n) d'événements et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$$

IV. Quelques grands classiques hors programmes du TOP 3

Exercice 5

Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.

1. Établir les deux relations suivantes :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y > k]\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\, \mathbb{P}\big([Y > k]\big)$$

2. Si $B \in \mathscr{A}$ est un événement de probabilité non nulle, on appelle espérance conditionnelle de Y sachant l'événement B, le réel défini par :

$$\mathbb{E}_B(Y) \;=\; \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}_B\big([Y = k]\big)$$

(c'est la formule de l'espérance dans laquelle $\mathbb{P}$ a été remplacé par $\mathbb{P}_B$)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale** :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{E}_{A_i}(Y)$$

3. Pour tout $C \in \mathscr{A}$, on appelle variable aléatoire indicatrice de l'événement C et on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathbb{1}_C : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

a) Soit $C \in \mathscr{A}$. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_C$. En particulier, donner l'espérance de $\mathbb{1}_C$.

b) Soit $(C, D) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$. Démontrer :

(i) $\mathbb{1}_{C \cap D} \;=\; \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_D$.

(ii) $\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_{\overline{C}} \;=\; 1$.