Questions de cours oraux HEC (2007 - 2022)

I. Analyse

I.1. Suites

1. Convergence et divergence des suites réelles monotones.
2. Énoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

I.2. Séries

1. Énoncer les trois théorèmes de comparaison de séries à termes positifs.
2. Rappeler les conditions de convergence des séries géométriques, géométriques dérivées et des séries exponentielles. En cas de convergence, rappeler la valeur de la somme de ces séries.
3. Définition de la convergence d'une série numérique (à termes réels).
4. Définition d'une série convergente. Pour quels réels $x > 0$ la série de terme général $(\ln x)^n$ est-elle convergente ? Donner sa somme en cas de convergence.
5. Donner des critères de convergence de séries à termes positifs.

I.3. Fonctions d'une variable réelle

1. Enoncer la formule de Taylor-Young.
2. Enoncé des inégalités des accroissements finis.
3. Théorème de la bijection.
4. Donner le développement limité de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
5. Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?
6. Quel est le lien entre la continuité d'une fonction et sa dérivabilité ?
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que signifie graphiquement que a est un point d'inflexion de la courbe représentative de f ? Quelles sont les méthodes pour le calculer ?
8. Définir le fait que deux fonctions soient équivalentes au voisinage de $+\infty$.
9. Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.
10. Définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.
11. Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

I.4. Fonctions de deux variables

1. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition d'un point critique de f, et donner une condition suffisante pour que f possède un extremum local en ce point.
2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   Rappeler les conditions suffisantes pour que (x_0, y_0) soit un minimum local pour g.

I.5. Intégrales

1. Définition de la convergence d'une intégrale impropre.
2. Donner des critères de convergence d'une intégrale impropre.
   Préciser la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Donner les propriétés de l'application $x \in I \;\mapsto\; \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.
4. Énoncer le théorème d'intégration par parties.

I.6. Equations différentielles et systèmes différentiels linéaires

1. Théorème de superposition.
2. Définition d'un problème de Cauchy. Rappeler le résultat du cours concernant les problèmes de Cauchy.

II. Algèbre

II.1. Dénombrement

1. Formule du binôme de Newton (y compris dans $\mathbb{R}$)
2. Coefficients binômiaux ; interprétation ensembliste.
3. Quel est le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments ?

II.2. Polynômes

1. Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?
2. Nombre de racines d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

II.3. Matrices et systèmes linéaires

1. Définition d'une matrice inversible.
2. Qu'appelle-t-on système de Cramer ?

II.4. Espaces vectoriels

1. Rappeler la définition de la dimension d'un espace vectoriel. Comparer cette dimension avec le cardinal d'une famille libre de vecteurs de ce même espace vectoriel.
2. Soit E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Donner la définition d'une famille génératrice de E. Que peut-on dire de son cardinal ?
3. Définition de la dimension d'un espace vectoriel.
4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Définir ce qu'est une famille libre de E. Que peut-on dire de son cardinal ?

II.5. Applications linéaires

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
   a) Donner la définition d'un isomorphisme ϕ de E dans F.
   b) Donner une condition nécessaire pour qu'il existe un isomorphisme de E sur F.

c) Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ soit un isomorphisme quand la condition de la question ***b)*** est vérifiée.

2. Rappeler le théorème du rang.

3. Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.

II.6. Réduction des matrices carrées

1. Définition d'une matrice diagonalisable.

2. Matrices semblables : définition et propriétés.

3. Donner la définition d'une matrice diagonalisable et une caractérisation.

4. Donner une condition suffisante et une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable.

5. Critère de diagonalisabilité d'une matrice selon les sous-espaces propres.

6. Donner la définition d'une valeur propre. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes afin qu'une matrice soit diagonalisable ?

7. Rappeler la définition d'un vecteur propre d'une matrice. Énoncer la propriété relative à une famille de vecteurs propres d'une matrice associés à des valeurs propres distinctes.

8. Définition d'un polynôme annulateur d'une matrice. Lien avec les valeurs propres ?

III. Probabilités

III.1. Lois usuelles

1. Définition et propriétés de la loi uniforme sur $[a,b]$.

2. Définition et propriétés de la loi exponentielle.

3. Définition et propriétés de la loi géométrique.

4. Définition d'un schéma binomial.

5. Définition et propriétés de la loi de Bernouilli et de la loi binomiale.

6. Donner l'allure du graphe de la <u>fonction de répartition</u> de la loi normale centrée réduite.

III.2. Formules classiques

1. Formule des probabilité composées.

2. Formule des probabilités totales.

3. Définition de la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Définitions des lois marginales et conditionnelles.

4. Formule de Bayes.

III.3. Indépendance

1. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires finies.

2. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance ?

3. Définition de l'indépendance de n variables aléatoires discrètes.

III.4. Variables aléatoires discrètes et chaînes de Markov

1. Énoncer la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

2. *a)* Définition et caractérisation d'un état stable d'une chaîne de Markov.

b) Si la chaîne de Markov (X_n) converge en loi vers X et que π est un vecteur ligne représentant la loi de X, que peut-on dire de π ?

III.5. Variables aléatoires à densité

1. Donner l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètres 0 et a.

2. Définition d'une densité de probabilité.

3. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

4. Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

5. Définition d'une variable aléatoire à densité et propriétés de sa fonction de répartition.

III.6. Espérance, moments et variance

1. Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète finie : définition et interprétation.

2. Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité : définition et existence.

3. Formule de Koenig-Huygens.

4. Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

5. Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

6. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance

- d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$,
- d'une variable aléatoire Y fonction affine de X, c'est-à-dire $Y = aX + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

III.7. Convergence en loi, approximation et estimateurs

1. Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une variable aléatoire Y.

2. Énoncé de l'inégalité de Markov. Citer une conséquence de cette inégalité.

3. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

4. Loi faible des grands nombres.

5. Étant donnée une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite, écrire sous forme d'intégrale la probabilité que X appartienne à un segment $[a, b]$ donné. Dans quel théorème cette probabilité apparait-elle comme une limite ?

6. Énoncer le théorème central limite.

7. Définition de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le paramètre d'une loi discrète.

IV. Graphes

1. Définition de la matrice d'adjacence d'un graphe.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit non-orienté.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit connexe.