

Importer les bibliothèques suivantes : `import numpy as np, import math, import matplotlib.pyplot as plt.`

**Notation 1.** Si  $g$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ , on pose :  $\|g\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ .

L'objectif de ce sujet est de démontrer le théorème d'approximation de Weierstrass et d'en faire des représentations graphiques à l'aide de **Python**.

**Théorème 1** (Théorème d'approximation de Weierstrass). *Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $Q$  une fonction polynomiale sur  $[0, 1]$  telle que  $\|f - Q\|_\infty \leq \varepsilon$ .*

*Autrement dit, pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$ , il existe une suite  $(Q_n)$  de fonctions polynomiales sur  $[0, 1]$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - Q_n\|_\infty = 0$  (on dit dans ce cas que la suite  $(Q_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ ).*

1. *Question préliminaire.* Soit  $g$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Justifier l'existence de  $\max_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ .

## 1 Quelques propriétés de régularité des fonctions

**Definition 1.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *uniformément continue* sur  $[0, 1]$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, (|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

**Definition 2.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $k > 0$ . On dit que  $f$  est  *$k$ -lipschitzienne* sur  $[0, 1]$  si :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

*Remarque 1.* On pourra traiter l'exercice 2 du sujet EDHEC 2023 pour s'entraîner sur cette notion.

**Notation 2.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . On définit quatre propriétés de  $f$  :

- (A)  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .
- (B)  $f$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ .
- (C) Il existe  $k > 0$  tel que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $[0, 1]$ .
- (D)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

On admettra dans la suite que (A)  $\implies$  (B) (c'est le théorème de Heine, hors de portée avec le programme ECG).

2. Rappeler la définition quantifiée de la propriété (A).
3. Montrer que (D)  $\implies$  (C)  $\implies$  (B)  $\implies$  (A).
4. Quelles propriétés sont vérifiées par la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  définie sur  $[0, 1]$ ?  
Qu'à-t-on démontré à l'aide de cet exemple?
5. Quelles propriétés sont vérifiées par la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$  définie sur  $[0, 1]$ ?  
Qu'à-t-on démontré à l'aide de cet exemple?
6. Conclure sur les liens logiques qui existent entre les propriétés (A), (B), (C) et (D).

## 2 Un exemple : approximation polynomiale de la fonction exponentielle

7. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1]$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (\text{Taylor reste intégral})$$

8. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |e^x - Q_n(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

où  $Q_n$  est une fonction polynomiale que l'on explicitera.

9. Conclure que le théorème d'approximation de Weierstrass est valide pour la fonction exponentielle.
10. Écrire une fonction **Python** `approxTaylor(n, x)` qui prend en paramètres un entier naturel  $n$  et un réel  $x \in [0, 1]$  et qui renvoie le réel  $Q_n(x)$  (où  $Q_n$  a été déterminée à la question 8).
11. Exécuter le script suivant :

```

1  eps = 0.1
2  abscisse = np.linspace(0,1,1000)
3  ordonnee = [np.exp(x) for x in abscisse]
4  cylindreSup = [y + eps for y in ordonnee]
5  cylindreInf = [y - eps for y in ordonnee]
6  plt.plot(abscisse, ordonnee)
7  plt.plot(abscisse, cylindreSup, '-')
8  plt.plot(abscisse, cylindreInf, '-')
9  plt.show()

```

Interpréter le graphique obtenu en lien avec l'énoncé du théorème d'approximation de Weierstrass.

12. Compléter le script suivant afin de pouvoir visualiser la convergence uniforme de la suite  $(Q_n)$  vers la fonction exponentielle sur  $[0, 1]$ .

```

1  for n in range(10):
2      eps = 0.1
3      abscisse = np.linspace(0,1,1000)
4      ordonnee = [np.exp(x) for x in abscisse]
5      cylindreSup = [y + eps for y in ordonnee]
6      cylindreInf = [y - eps for y in ordonnee]
7      plt.plot(abscisse, ordonnee)
8      plt.plot(abscisse, cylindreSup, '-')
9      plt.plot(abscisse, cylindreInf, '-')
10     ...
11     ...
12     plt.title(f'Approximation par Q_{n}')
13     plt.show()

```

### 3 Démonstration du théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein (construction probabiliste)

Dans la suite, si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires, on pose, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

13. On fixe dans cette question  $\varepsilon > 0$  et  $\alpha > 0$ . Montrer qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que, pour tout  $p \in [0, 1]$ , pour toute suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$  et pour tout entier  $n \geq n_0$  :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \alpha\right) \leq \varepsilon$$

14. On fixe dans cette question une fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$  et un réel  $\varepsilon > 0$ .
  - (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $p \in [0, 1]$ . On se donne une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$  et on pose  $Q_n(p) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ . Montrer que :

$$Q_n(p) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Que peut-on dire de la fonction  $Q_n$  ? Expliciter  $Q_1$  et  $Q_2$ .

(b) Justifier l'existence d'un réel  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, (|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

On fixe un tel  $\alpha$  pour la suite.

(c) Montrer que :

$$\forall p \in [0, 1], |Q_n(p) - f(p)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p) \right| \mathbb{P}([S_n = k])$$

(d) En déduire que :

$$\forall p \in [0, 1], |Q_n(p) - f(p)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \alpha\right)$$

(e) Conclure qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $\|Q_n - f\|_\infty \leq (1 + 2 \|f\|_\infty)\varepsilon$ .

Autrement dit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - Q_n\|_\infty = 0$ .

## 4 Implémentation en Python

15. Écrire une fonction **Python** `polBernstein(f, n, x)` qui prend en paramètres une fonction  $f$ , un entier naturel  $n$  et un réel  $x \in [0, 1]$  et qui renvoie le réel  $Q_n(x)$  (où  $Q_n$  a été construite à la question 14a).

On utilisera la fonction `math.comb(n, k)` qui renvoie le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  (ne pas oublier `import math`).

16. (a) Adapter le script **Python** de la question 12 pour visualiser la convergence de la suite des polynômes de Bernstein vers la fonction exponentielle. Comparer avec les graphiques obtenus à la question 12.

(b) Adapter le script **Python** de la question 12 pour visualiser la convergence de la suite des polynômes de Bernstein vers la fonction racine carrée.

(c) Adapter le script **Python** de la question 12 pour visualiser la convergence de la suite des polynômes de Bernstein vers la fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$  définie sur  $[0, 1]$ .

(d) Adapter le script **Python** de la question 12 pour visualiser la convergence de la suite des polynômes de Bernstein vers une fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$  que vous aurez vous même choisie.