

Algèbre linéaire (matrices et endomorphismes) - niveau 3

I. Puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 1

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer A^2 . Démontrer alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$.
- Déterminer B^2 et B^3 . En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Déterminer C^2 . Conjecturer une formule pour C^k et la démontrer.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- Écrire la matrice M en fonction des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On note $G = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, α et β étant des réels strictement positifs.

On note également, pour tout $t \geq 0$: $M(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (I_n + \frac{t}{k}G)^k$.

1. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha - \beta)^{i-1}G$.

2. En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel : $(I_3 + \frac{t}{k}G)^k = I_3 + \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} \right) G$.

3. Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel, $\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha - \beta)^{i-1} = \frac{1 - (1 - (\alpha + \beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha + \beta}$ et en déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$M(t) = I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha + \beta)t)}{\alpha + \beta} G$$

II. Puissances d'une matrice via une division euclidienne de polynômes

Exercice 3

On note $G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ 4\alpha & 0 & -4\alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha > 0$. On note aussi $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On note également, pour tout $t \geq 0$: $M(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (I_n + \frac{t}{k}G)^k$.

1. On admet que $A^3 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 2A^2 + A$ (on explicitera A^2). Que peut-on dire du polynôme $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$?

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'il existe un polynôme Q et des réels a, b, c tels que, pour tout x réel : $(1 + \frac{\theta}{k}x)^k = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c$ (*).

2. Déterminer une factorisation de $U(x)$ et en déduire que $c = 1$ et $(1 + \frac{\theta}{k})^k = a + b + c$.

3. En dérivant la relation (*), montrer que, $\theta (1 + \frac{\theta}{k})^{k-1} = 2a + b$.

En déduire que $a = \theta (1 + \frac{\theta}{k})^{k-1} - (1 + \frac{\theta}{k})^k + 1$, $b = 2(1 + \frac{\theta}{k})^k - \theta (1 + \frac{\theta}{k})^{k-1} - 2$.

4. En conclure que pour tout $t \geq 0$,

$$M(t) = (1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}) A^2 + ((2 + \alpha t)e^{-\alpha t} - 2)A + I_3$$

III. Trace d'une matrice

Dans la suite n est un entier supérieur ou égal à 2.

- (Hors-programme) Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A , notée $\text{tr}(A)$ par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

- (Au programme de 2^e année) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont semblables si il existe une matrice P inversible vérifiant : $A = PBP^{-1}$.

Exercice 4

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Montrer que : $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}$.

2. En déduire que : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et $\text{tr}({}^t AA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{j,i}^2$.

Que peut-on dire de A si $\text{tr}({}^t AA) = 0$?

3. Si A et B sont semblables, montrer que $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

IV. Algèbre théorique

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E (i.e. $f \in \mathcal{L}(E)$).

1) Démontrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \Rightarrow f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

3) Conclure.