Algèbre linéaire (matrices et endomorphismes) - niveau 3 (correction)

I. Puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 1

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer A^2. Démontrer alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 3^{k-1} A$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = 3^{n-1}\ A$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $A^1 = A$.
  - D'autre part : $3^{1-1} A = 3^0 A = A$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = 3^n A$).
  Par hypothèse de récurrence : $A^n = 3^{n-1}\ A$.
  Ainsi :
  $$A^{n+1} = A \times A^n = 3^{n-1}\ A \times A = 3^{n-1}\ 3A = 3^n A$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 3^{n-1}\ A.}$$

□

b) Déterminer B^2 et B^3. En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$B^3 = B^2\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 3,\ B^k = 0.}$$

□

c) Déterminer C^2. Conjecturer une formule pour C^k et la démontrer.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\ C$$

Par mesure de sûreté, déterminons C^3 avant d'émettre une conjecture.

$$C^3 = C^2\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $C^n = 2^{n-1}\ C$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $C^1 = C$.
  - D'autre part : $2^{1-1}\ C = 2^0\ C = C$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $C^{n+1} = 2^n\ C$).
  Par hypothèse de récurrence : $C^n = 2^{n-1}\ C$.
  Ainsi :
  $$C^{n+1} = C \times C^n = 2^{n-1}\ C \times C = 3^{n-1}\ 2C = 2^n C$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ C^n = 2^{n-1}\ C.}$$

□

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Écrire la matrice M en fonction des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$\boxed{M = aI + bJ}$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Les matrices I et J commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \geqslant 2$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
M^n & = & (aI + bJ)^n & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI)^{n-k} (bJ)^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} I^{n-k} \times b^k J^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} I \times b^k J^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ J^k & \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ J^k + \cancel{\sum\limits_{k=3}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ J^k} & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 2\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ J^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 3,\ J^k = 0\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} a^n b^0 \ J^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 \ J + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \ J^2 & \\
& = & a^n \ I + n \ a^{n-1} b \ J + \dfrac{n(n-1)}{2} \ a^{n-2} b^2 \ J^2 & \\
& = & \dfrac{a^{n-2}}{2} \left(2a^2 \ I + 2n \ ab \ J + n(n-1) \ b^2 J^2\right) &
\end{array}$$

- On calcule alors :

$$\begin{array}{rl}
& 2a^2 \ I + 2n \ ab \ J + n(n-1) \ b^2 J^2 \\
= & 2a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \ ab \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1) \ b^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 2a^2 & 2n \ ab & n(n-1) \ b^2 \\ 0 & 2a^2 & 2n \ ab \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

- Enfin :
  - × si $n = 0$, $T^0 = I$.
  - × si $n = 1$, $T^1 = T$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } M^0 = I,\ M^1 = M \text{ et pour tout } n \geqslant 2,\ \ M^n = \dfrac{a^{n-2}}{2} \begin{pmatrix} 2a^2 & 2n \ ab & n(n-1) \ b^2 \\ 0 & 2a^2 & 2n \ ab \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$
(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 2$.
L'argument $n \geqslant 2$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Les cas $n = 0$ et $n = 1$ doivent alors être traités à part.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter. Généralement a et b sont des valeurs données ($a = 2$ et $b = 1$ à l'`ESSEC III - 2007`).

□

Exercice 2

On note $G = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, α et β étant des réels strictement positifs.

On note également, pour tout $t \geqslant 0$: $M(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$.

1. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(i)$
où $\mathcal{P}(i)$: « $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$ ».
<u>Initialisation</u> :
D'une part, $G^1 = G$. D'autre part $(-\alpha-\beta)^{1-1}G = (-\alpha-\beta)^0G = G$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
<u>Hérédité</u> : soit $i \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(i)$. Montrons $\mathcal{P}(i+1)$.

$$\begin{aligned} G^{i+1} &= G^iG \\ &= (-\alpha-\beta)^{i-1}GG && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-\alpha-\beta)^{i-1}G^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} G^2 &= \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-\alpha-\beta)(-\alpha-\beta) & (-\alpha-\beta)\alpha & (-\alpha-\beta)\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-\alpha-\beta)G \end{aligned}$$

donc
$$G^{i+1} = (-\alpha-\beta)^{i-1}(-\alpha-\beta)G = (-\alpha-\beta)^iG$$
d'où $\mathcal{P}(i+1)$.
On a montré par récurrence

$$\boxed{\text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*,\ G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G.}$$

□

2. En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel : $(I_3 + \frac{t}{k}G)^k = I_3 + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(\frac{t}{k})^i(-\alpha-\beta)^{i-1}\right) G$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Les matrices I_3 et $\frac{t}{k}G$ commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices). On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(I_3 + \frac{t}{k}G)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}G\right)^i I_3^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i \\
&= \left(\frac{t}{k}\right)^0 G^0 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i && \textit{(découpage valable car } k \geqslant 0\textit{)} \\
&= I_3 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1} G && \textit{(égalité valable car } i \geqslant 1\textit{)} \\
&= I_3 + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1}\right) G
\end{aligned}$$

□

3. Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel, $\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(\frac{t}{k})^i(-\alpha-\beta)^{i-1} = \dfrac{1-(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta}$ et en déduire que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G$$

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et t un réel.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1} \\
=&\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-(\alpha+\beta))^{i-1} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-(\alpha+\beta))^{i} && \textit{(}\alpha > 0 \textit{ et } \beta > 0 \textit{ donc } \alpha+\beta \neq 0\textit{)} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^i 1^{n-i} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^i 1^{n-i} - 1\right) \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)}\left(\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k - 1\right) && \textit{(par binôme de Newton)} \\
=&\frac{1-(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

On remarque que l'égalité $M(t) = I_3 + \dfrac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G$ est valable si $t=0$. En effet,

- D'une part, $M(0) = I_3$
- D'autre part, $I_3 + \dfrac{1-\exp(-(\alpha+\beta)\times 0)}{\alpha+\beta}G = I_3 + \dfrac{1-1}{\alpha+\beta}G = I_3$

On suppose dans la suite que $t>0$.
Par définition,

$$M(t) = \lim_{k\to+\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$$

et d'après ce qui précède

$$\left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \frac{1-(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta}G$$

Or,

$$\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \mathrm{e}^{k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)}$$

et $\lim\limits_{k\to+\infty} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k} = 0$, avec $(\alpha+\beta)t \neq 0$, donc on peut écrire que

$$\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k}$$

d'où

$$k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)t$$

ce qui entraîne

$$\lim_{k\to+\infty} k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) = -(\alpha+\beta)t$$

et enfin, par continuité de exp sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}$$

On a alors bien

$$\boxed{M(t) = I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G.}$$

$\square$

II. Puissances d'une matrice via une division euclidienne de polynômes

Exercice 3

On note $G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ 4\alpha & 0 & -4\alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha > 0$. On note aussi $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On note également, pour tout $t \geqslant 0$: $M(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$.

1. On admet que $A^3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 2A^2 + A$ (on explicitera A^2). Que peut-on dire du polynôme $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$?

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'il existe un polynôme Q et des réels a, b, c tels que, pour tout x réel : $\left(1 + \frac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c \quad (*)$.

Démonstration. Tout d'abord,

$$A^2 = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} A^3 - 2A^2 + A &= \frac{1}{3^3}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - \frac{2}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3^3}\left(\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + 3^2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3^3}\left(\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 & -6 \\ -24 & -6 & 30 \\ 120 & -24 & -96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ -36 & 0 & 36 \end{pmatrix}\right) \\ &= 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{le polynôme } U \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

Commentaire

La notion de polynôme annulateur n'est pas au programme de première année, elle sera vue lors du chapitre de réduction des matrices carrées en deuxième année. Dire que U est un polynôme annulateur de A, c'est dire que $U(A)$ est la matrice nulle.

□

2. Déterminer une factorisation de $U(x)$ et en déduire que $c = 1$ et $\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k = a + b + c$.

Démonstration. On remarque que

$$\begin{aligned} U(x) &= x^3 - 2x^2 + x \\ &= x(x^2 - 2x + 1) \\ &= x(x-1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, 0 est racine simple de U et 1 est racine double de U, ce qui implique que $U(1) = U(0) = 0$ et $U'(1) = 0$.
En évaluant $(*)$ en $x = 0$, on trouve

$$\boxed{c = 1.}$$

En évaluant $(*)$ en $x = 1$, on trouve

$$\boxed{a + b + c = \left(1 + \tfrac{\theta}{k}\right)^k.}$$

□

3. En dérivant la relation $(*)$, montrer que, $\theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a + b$.
En déduire que $a = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1$, $b = 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2$.

Démonstration. On dérive la relation $(*)$ par rapport à x :

$$Q'(x)U(x) + Q(x)U'(x) + 2ax + b = \frac{\theta}{k} k \left(1 + \frac{\theta}{k} x\right)^{k-1} = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k} x\right)^{k-1} \qquad (*')$$

En évaluant $(*')$ en $x = 1$, on trouve (puisque $U'(1) = U(1) = 0$)

$$\boxed{2a + b = \theta\left(1 + \tfrac{\theta}{k}\right)^{k-1}.}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a + b = \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - 1 \\ 2a + b = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} \end{cases}
&\iff \begin{cases} a + b = \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - 1 & \\ \quad -b = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \qquad = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} + 1 - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \quad -b = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 2 & \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \qquad = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1 & \\ \qquad b = 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2 & L_2 \leftarrow -L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

4. En conclure que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = \left(1 - (1 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) A^2 + ((2 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2)A + I_3$$

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.
Par définition :

$$M(t) = \lim_{k \to +\infty} \left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k$$

On a montré que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left(I_3 + \frac{\theta}{k} A\right)^k &= Q(A)U(A) + aA^2 + bA + cI_3 \\
&= aA^2 + bA + cI_3 && \textit{(car } U(A) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)}
\end{aligned}$$

où

$$a = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1, \qquad b = 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2, \qquad c = 1$$

On remarque que $G = -\alpha A$. On applique alors le résultat précédent avec $\theta = -\alpha t$, ce qui donne

$$\left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k = aA^2 + bA + cI_3$$

où

$$a = -\alpha t \left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1} - \left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^k + 1, \qquad b = 2\left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^k + \alpha t \left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1} - 2, \qquad c = 1$$

On montre alors que

$$\lim_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1} = \mathrm{e}^{-t\alpha} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^k = \mathrm{e}^{-t\alpha}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned} M(t) &= (-\alpha t \mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\alpha t} + 1)A^2 + (2\mathrm{e}^{-\alpha t} + \alpha t \mathrm{e}^{-\alpha t} - 2)A + I_3 \\ &= \left(1 - (1 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) A^2 + ((2 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2)A + I_3 \end{aligned}$$

$\square$

III. Trace d'une matrice

Dans la suite n est un entier supérieur ou égal à 2.

- (Hors-programme) *Si* $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ *est une matrice carrée appartenant à* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, on définit la trace de* A*, notée* $\mathrm{tr}(A)$ *par :*
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$
- (Au programme de 2e année) *Soient* A *et* B *deux matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*. On dit que* A *et* B *sont semblables si il existe une matrice* P *inversible vérifiant :* $A = PBP^{-1}$*.*

Exercice 4
Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que : $\mathrm{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{j,i}$.

Démonstration.
Par définition du produit matriciel : $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$
Ainsi :
$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} && \textit{(par définition de la trace)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}b_{j,i} \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{j,i} \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{j,i}.}$$
□

2. En déduire que : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2$.

Que peut-on dire de A si $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$?

Démonstration.
- Tout d'abord :
$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{j,i} && \textit{(d'après la question 1.)} \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{j,i}a_{i,j} \\ &= \sum_{1\leqslant j,i\leqslant n} b_{j,i}a_{i,j} \\ &= \mathrm{tr}(BA) && \textit{(d'après la question 1.)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

- Ensuite, en notant, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[M]_{i,j}$ le coefficient à la position (i,j) d'une matrice M :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}({}^tAA) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [{}^tA]_{i,j}[A]_{j,i} && \textit{(d'après la question 1.)} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [A]_{j,i}[A]_{j,i} && \textit{(par définition de } {}^tA\textit{)} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}a_{j,i} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2}$$

- Supposons que $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$.
  Alors $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2 = 0$.
  Or, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls.
  On en déduit :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i}^2 = 0$$
  et donc :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = 0$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}.}$$

□

3. Si A et B sont semblables, montrer que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Démonstration.
Supposons A et B semblables. Alors il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}\Big((PB)P^{-1}\Big) \\
&= \operatorname{tr}\Big(P^{-1}(PB)\Big) && \textit{(d'après la question 2.)} \\
&= \operatorname{tr}(B) && \textit{(car } P^{-1}P = I_n\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B).}$$

□

IV. Algèbre théorique

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathscr{L}(E)$).

1) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.
Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Il s'agit de démontrer : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E,\ f^2(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) & \\ & = & 0_E & \quad \textit{(car } f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Commentaire

- Cet exercice est plus théorique que les précédents. L'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est ici de vérifier que les définitions de base (comme celles du noyau et de l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient le résultat.
- Plus précisément, une telle question commence par la mise en place d'une structure de démonstration. Il faut savoir démontrer :
  - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E,\ p(x)$
    `Soit` $x \in E$ `...`
  - × une propriété quantifiée existentiellement : $\exists x \in E,\ p(x)$
    (il s'agit alors d'exhiber un élément $x \in E$ qui vérifie la propriété p)
  - × une inclusion d'ensemble : $A \subset B$
    `Soit` $x \in A$ `... alors` $x \in B$
  - × une égalité d'ensemble : $A = B$
    (on procède par double inclusion à l'aide de la structure de démonstration précédente)
  - × une implication : $p \Rightarrow q$
    `Supposons` p `et démontrons` q.
  - × une équivalence : $p \Leftrightarrow q$
    (on procède par double implication à l'aide de la structure de démonstration précédente)

  Ce n'est qu'une fois la structure de démonstration en place que l'on déroule les définitions.
- On peut en profiter pour remarquer que l'étape d'hérédité d'une récurrence n'est qu'une illustration de ces structures de démonstration. Il s'agit de démontrer la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(n+1)$$

  En terme de rédaction, il n'y a donc guère le choix :
  `Soit` $n \in \mathbb{N}$.
  `Supposons` $\mathcal{P}(n)$ `et démontrons` $\mathcal{P}(n+1)$

$\square$

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.
Supposons $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $(f \circ f)(x) = 0_E$). Démontrons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
Il s'agit de démontrer $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Or :

$$\begin{array}{rcl} f(y) & = & f(f(x)) \\ & = & (f \circ f)(x) \;=\; 0_E \qquad \textit{(car } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
On en conclut : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

  1 `Soit` $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  2 `Il existe donc` $x \in E$ `tel que :` $y = f(x)$. `Alors :`
  3 $f(y) = \dots$
  4 $\quad\;\; = \dots$
  5 $\quad\;\; = 0_E$
  6 `Ainsi,` $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\mathrm{Ker}(f)$.
  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.
  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

$\square$

3) Conclure.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On a démontré, par double implication :} \\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\end{array}}$$

$\square$