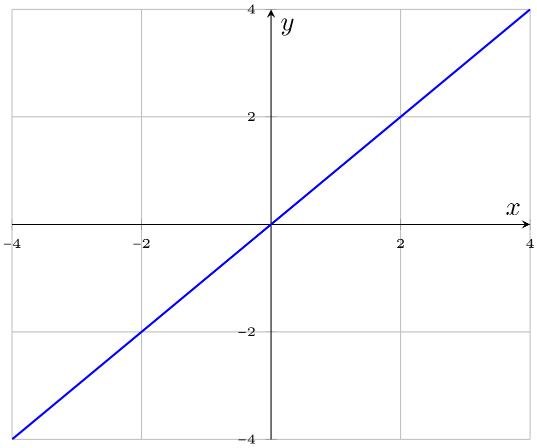
1 Fonctions linéaires

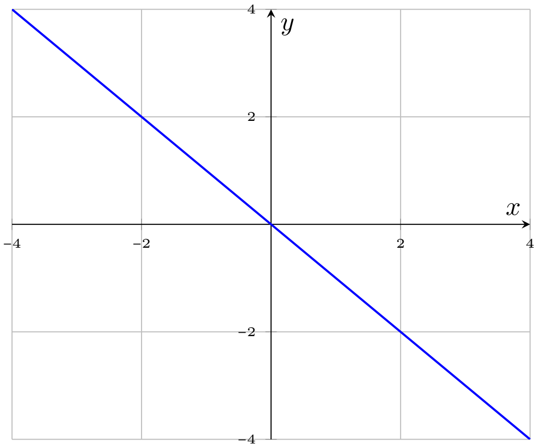
Ce sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto ax$ où a est une constante réelle.

Exemple 1.

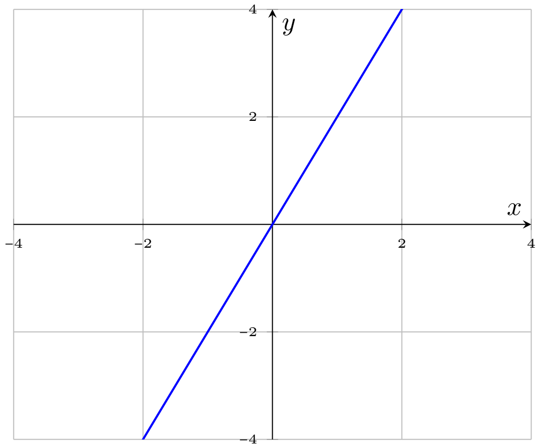
1. $f : x \mapsto x$



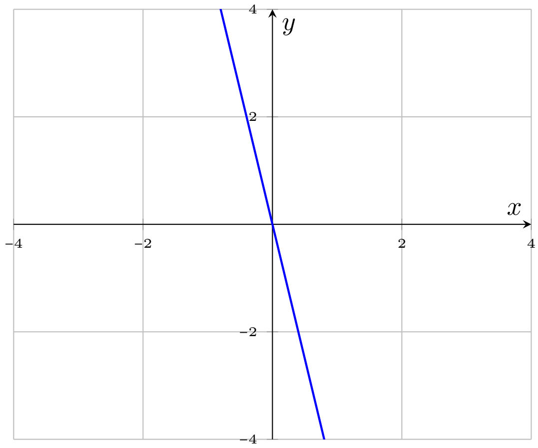
2. $f : x \mapsto -x$



3. $f : x \mapsto 2x$



4. $f : x \mapsto -5x$



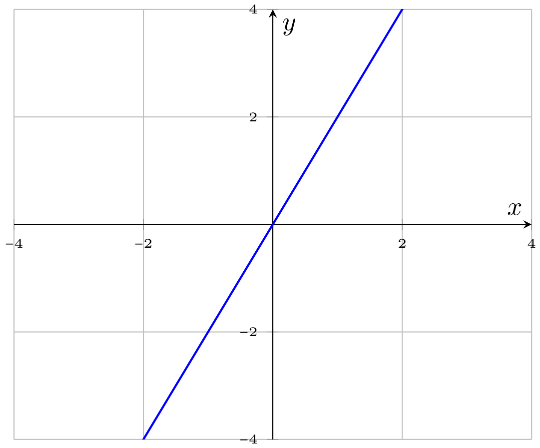
Les courbes représentatives des fonctions linéaires sont des droites qui passent par l'origine.

2 Fonctions affines

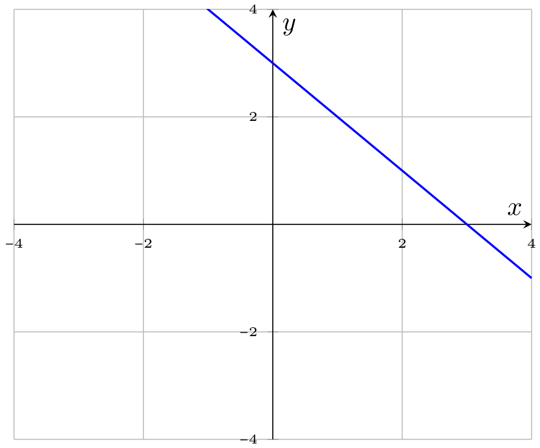
Ce sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des constantes réelles.

Exemple 2.

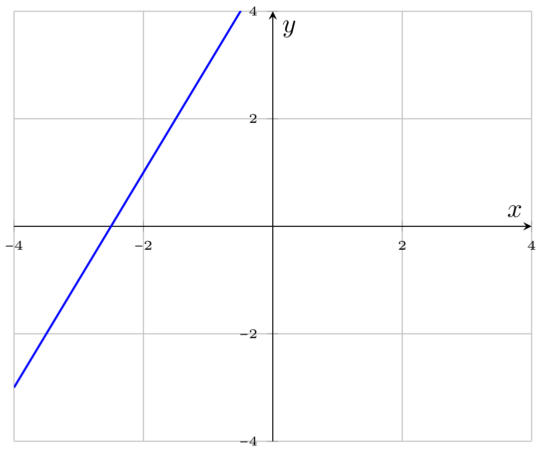
1. $f : x \mapsto 2x$



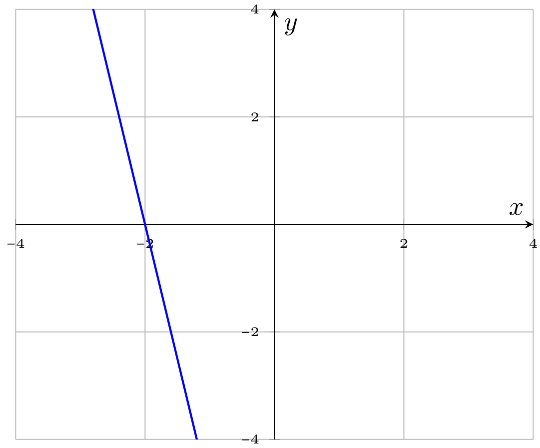
2. $f : x \mapsto -x + 3$



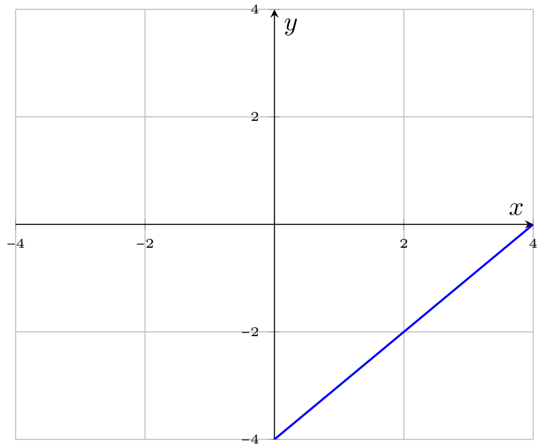
3. $f : x \mapsto 2x + 5$



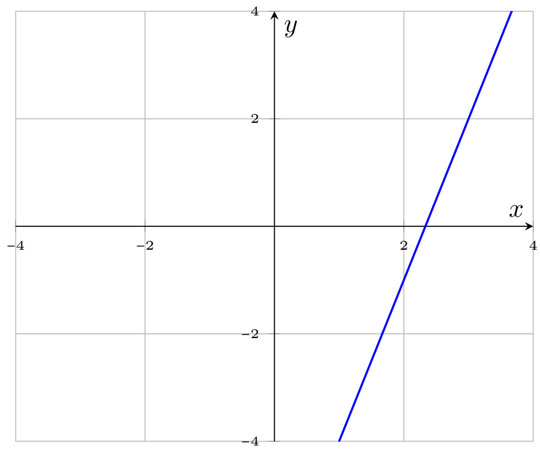
4. $f : x \mapsto -5x - 10$



5. $f : x \mapsto x - 4$



6. $f : x \mapsto 3x - 7$



Les courbes représentatives des fonctions affines sont des droites.

Ce vocabulaire est également utilisé dans le domaine des probabilités. En effet, on parle parfois de *transformation affine* pour les v.a.r. .

Exemple 3. Dans les exemples suivants, Y est une *transformée affine* de X. On dit aussi que l'on a construit Y par *transformation affine* de X.

1. $Y = 2X$
2. $Y = -X + 3$
3. $Y = 2X + 5$
4. $Y = -5X + 10$
5. $Y = X - 4$
6. $Y = 3X - 7$

Reconnaître que Y est une transformée affine de X permet de

- démontrer rapidement des propriétés sur Y (existence d'espérance, de variance, ...)
- faire un calcul rapide de certains objets (espérance, variance, ...)
- trouver la loi de Y dans certains cas où X suit une loi usuelle

il est donc très important de ne pas passer à côté de cette information.

A retenir. $\boxed{Y = aX + b \text{ est une transformée affine de } X \text{ si } a \text{ et } b \text{ sont des constantes réelles.}}$

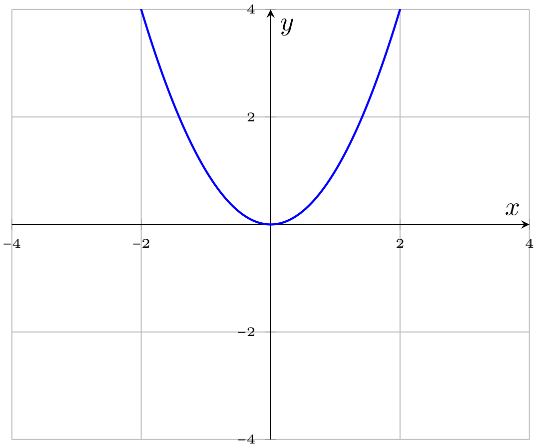
3 Fonctions polynomiales

Ce sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ où a_0, a_1, …, a_n sont des constantes réelles.

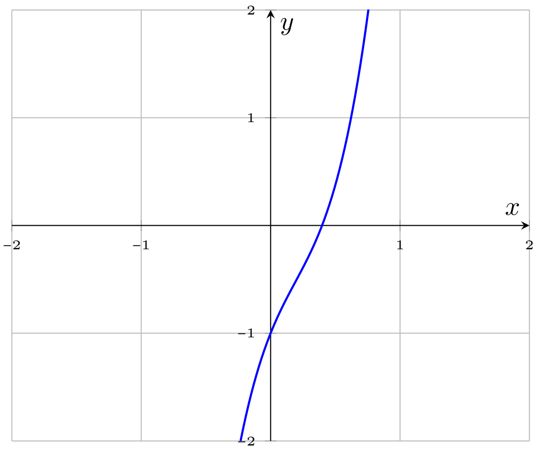
A retenir. Les puissances sur la variable x sont forcément des entiers positifs pour pouvoir parler de fonction polynomiale.

Exemple 4.

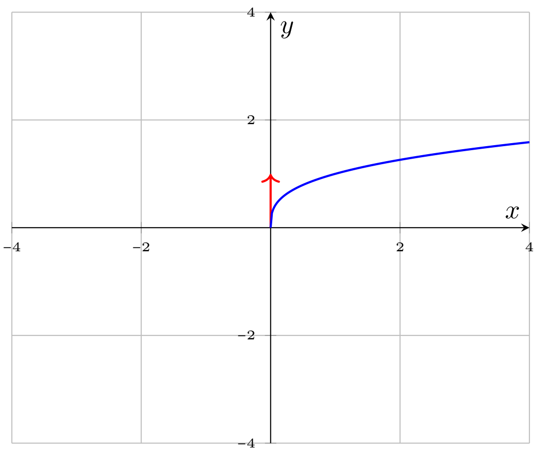
1. $f : x \mapsto x^2$ est une fonction polynomiale



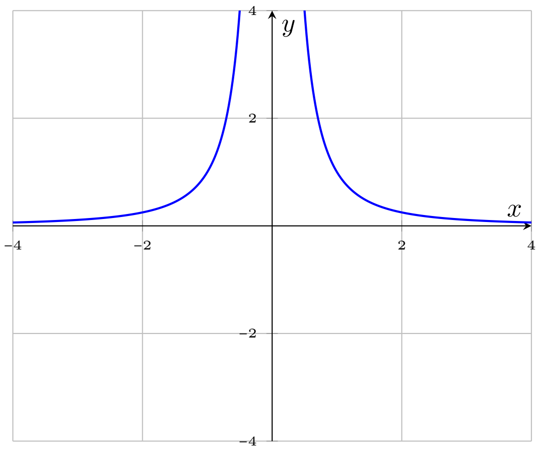
2. $f : x \mapsto -1 + 3x - 4x^2 + 7x^3$ est une fonction polynomiale



3. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ n'est pas une fonction polynomiale car $\frac{1}{3}$ n'est pas un entier



4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas une fonction polynomiale (c'est l'inverse d'une fonction polynomiale)



5. En général, pour $a \in \mathbb{R}$, on ne peut pas dire que $f : x \mapsto x^a$ est une fonction polynomiale (car a peut ne pas être un entier positif). *Voir la partie suivante.*
6. Si $a > 0$, $f : x \mapsto \frac{1}{x^a}$ n'est pas une fonction polynomiale

4 Fonctions puissances

Ce sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto x^a$ où a est une constante réelle.

On a par définition, pour tout $x > 0$,

$$\boxed{x^a = \mathrm{e}^{a\ln(x)}}$$

Une telle fonction puissance est donc définie sur $]0, +\infty[$ (c'est le même intervalle de définition que la fonction ln).

A retenir. Il ne faut pas confondre une telle fonction avec une fonction polynomiale lorsque l'on veut justifier la régularité. $\boxed{\text{On pourra affirmer que } f : x \mapsto x^a \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$

5 Fonction carrée

Il s'agit de la fonction $f : x \mapsto x^2$.

Il faut connaître par cœur les propriétés qui suivent.

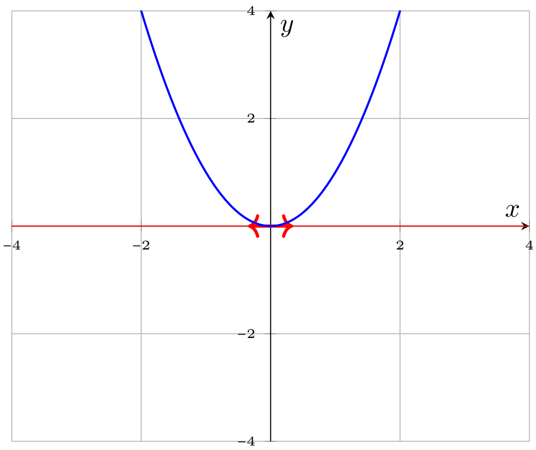
- son ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- ses propriétés remarquables :
  1. pour tout $(x,y) \in [0,+\infty[$, $x = y \iff x^2 = y^2$
  2. pour tout $(x,y) \in]-\infty,0[$, $x = y \iff x^2 = y^2$
  3. pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $a \geqslant 0$:

$$\boxed{x^2 \leqslant a \iff -\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}}$$

  4. pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $a \geqslant 0$: $x^2 \geqslant a \iff (x \leqslant -\sqrt{a} \quad \text{ou} \quad \sqrt{a} \leqslant x)$
- sa dérivée : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$
- ses variations : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$
- ses limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- son tableau de variations (qui résume plusieurs propriétés) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- sa convexité : la fonction f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$
  (preuve : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 2 > 0$)
- son graphe :



6 Fonction racine carrée

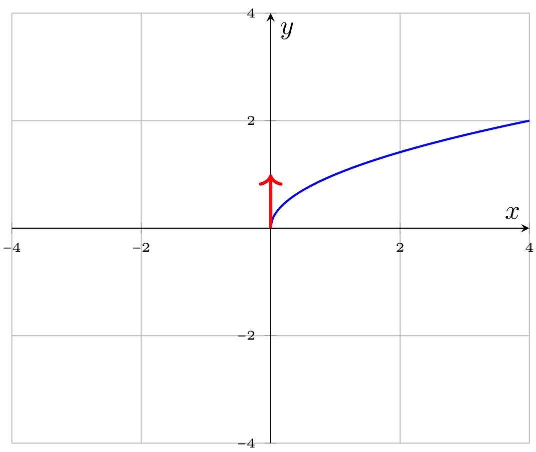
Il s'agit de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Il faut connaître par cœur les propriétés qui suivent.

- son ensemble de définition : $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$
- son ensemble de dérivation : $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$
- ses propriétés remarquables :
  1. pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \geqslant 0$
  2. pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- sa dérivée : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- ses variations : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
  (preuve : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ et f est continue en 0)
- ses limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- son tableau de variations (qui résume plusieurs propriétés) :

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$ $+$	
Variations de f	$0 \nearrow$	$+\infty$

- sa convexité : la fonction f est strictement concave sur $\mathbb{R}^+$
  (preuve : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$)
- son graphe :



- sa fonction réciproque : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(\sqrt{x})^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$
  (sa fonction réciproque est la restriction de la fonction carrée à $\mathbb{R}^+$)

7 Fonction exponentielle

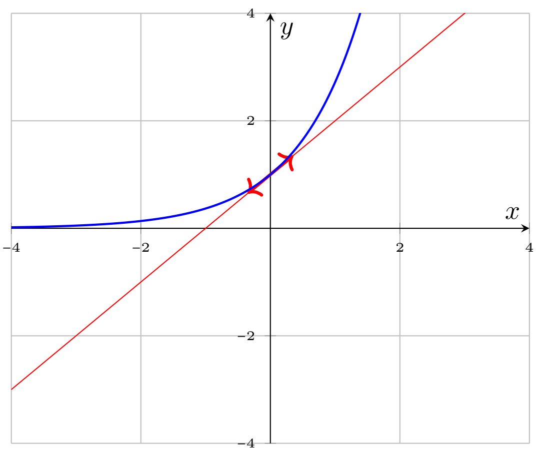
Il s'agit de la fonction $\exp : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Il faut connaître par cœur les propriétés qui suivent.

- son ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- ses propriétés remarquables :
  1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$
  2. pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$
  3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\left(\mathrm{e}^x\right)^a = \mathrm{e}^{ax}$
- sa dérivée : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$
- ses variations : exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
  (preuve : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = e^x > 0$)
- ses limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- son tableau de variations (qui résume plusieurs propriétés) :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\exp'(x)$	+	
Variations de exp	$0 \nearrow$	$+\infty$

- sa convexité : la fonction exp est strictement convexe sur $\mathbb{R}$
  (preuve : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp''(x) = e^x > 0$)
- l'inégalité de convexité classique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$
- son graphe :



- sa fonction réciproque : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$ et, pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$

8 Fonction logarithme

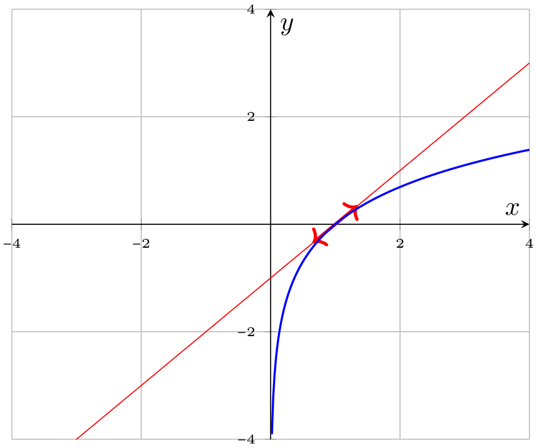
Il s'agit de la fonction $\ln : x \mapsto \ln(x)$.

Il faut connaître par cœur les propriétés qui suivent.

- son ensemble de définition : $]0, +\infty[$
- ses propriétés remarquables :
  1. pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
  2. pour tout $a \in]0, +\infty[$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$, $\ln(a^b) = b\ln(a)$
- sa dérivée : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
- ses variations : ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
  (preuve : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$)
- ses limites : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- son tableau de variations (qui résume plusieurs propriétés) :

x	0		$+\infty$
Signe de $\ln'(x)$	‖	$+$	
Variations de ln	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

- sa convexité : la fonction ln est strictement concave sur $]0, +\infty[$
  (preuve : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$)
- l'inégalité de convexité classique : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$
  qu'il faut également savoir reconnaître sous la forme : pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$
- son graphe :



- sa fonction réciproque : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^x\right) = x$ et, pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$

9 Fonction valeur absolue

Il s'agit de la fonction $f : x \mapsto |x|$ définie par « cas » : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

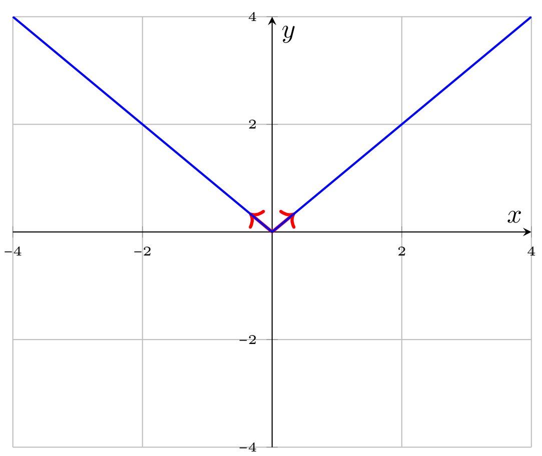
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il faut connaître par cœur les propriétés qui suivent.

- son ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- ses propriétés remarquables :
  1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \iff x = 0$
  2. pour tout $a > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $$\boxed{|x| = a \iff x = a \quad \text{ou} \quad x = -a}$$
  3. pour tout $a \geqslant 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $$\boxed{|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \iff x \in [-a, a]}$$
  4. pour tout $a \geqslant 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned} |x| \geqslant a &\iff x \leqslant -a \quad \text{ou} \quad x \geqslant a \\ &\iff x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[\end{aligned}$$
- ses limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty$
- son tableau de variations (qui résume plusieurs propriétés) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- son graphe :



Il est essentiel de connaître les deux propriétés remarquables listées ci-dessus pour résoudre certains exercices classiques de probabilité (étude de la valeur absolue d'une v.a.r. , utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour construire un intervalle de confiance).

10 Fonction partie entière

Il s'agit en fait de deux fonctions : la partie entière inférieure $\lfloor . \rfloor : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et la partie entière supérieure $\lceil . \rceil : x \mapsto \lceil x \rceil$.

Definition 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La *partie entière inférieure* de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier relatif k vérifiant $k \leqslant x$. Autrement dit,

$$\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$$

Definition 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. La *partie entière supérieure* de x, notée $\lceil x \rceil$, est le plus petit entier relatif k vérifiant $k > x$. Autrement dit,

$$\lceil x \rceil = \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$$

Ces deux fonctions sont reliées par la relation : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$$

Il suffit alors de connaître par cœur les propriétés suivantes de la fonction partie entière inférieure.

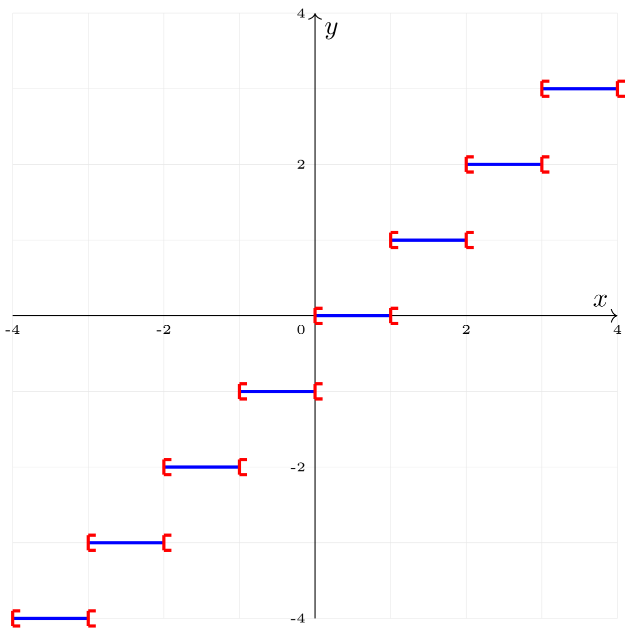
- son ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- l'encadrement remarquable : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

  qui donne l'équivalence fondamentale : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lfloor x \rfloor = k \iff k \leqslant x < k + 1}$$

- son graphe :



Il est essentiel de connaître les deux propriétés remarquables listées ci-dessus pour résoudre certains exercices classiques de probabilité, typiquement l'étude de la partie entière d'une v.a.r. (permettant de construire une v.a.r. discrète à partir d'une v.a.r. à densité).

11 Fonction partie fractionnaire

Moins importante que la fonction partie entière mais apparaissant tout de même régulièrement dans les sujets du TOP 3, il est bon de connaître la fonction partie fractionnaire, souvent notée $x \mapsto \{x\}$. Elle est définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

Pour se préparer efficacement au top 3 (la fonction partie fractionnaire peut également tomber dans les sujets TOP 5 mais c'est plus rare), il faut connaître par cœur les propriétés qui suivent.

- son ensemble de définition : $\mathbb{R}$
- l'encadrement remarquable : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{0 \leqslant \{x\} < 1}$$

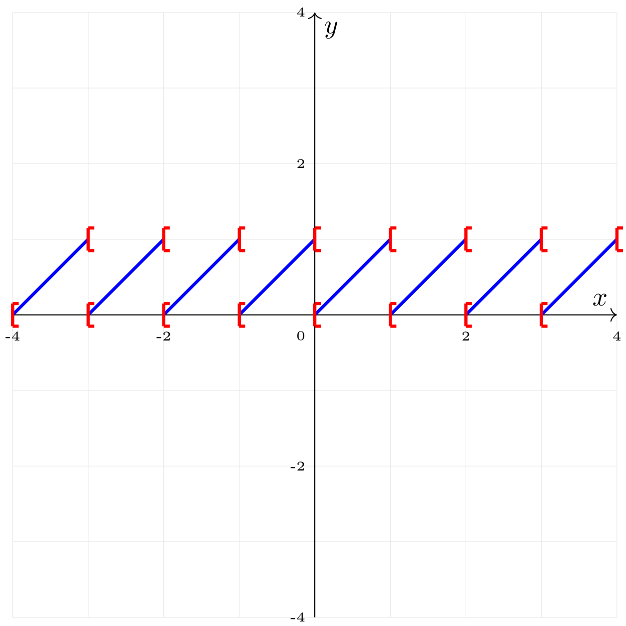
- la résolution d'inégalités :
  1. pour tout $y \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \{x\} \leqslant y &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant x \leqslant k + y \\ &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+y] \end{aligned}$$

  2. pour tout $y \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} y \leqslant \{x\} < 1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ k + y \leqslant x < k + 1 \\ &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k + y, k + 1[\end{aligned}$$

- son graphe :



Ici encore, il est essentiel de savoir résoudre les inégalités avec la partie fractionnaire pour les exercices de probabilités faisant intervenir cette transformation de v.a.r. .

12 Fonctions min et max

Les fonctions min et max sont différentes des fonctions précédentes au sens où elles prennent en argument plusieurs variables (au lieu d'une seule). Elles sont régulièrement utilisées dans les exercices de probabilités pour construire de nouvelles v.a.r. à partir de v.a.r. suivant des lois usuelles.

Commençons par une définition utilisant deux variables.

Definition 3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $\min(a, b)$ est égal au plus petit des deux nombres a et b. Autrement dit,

$$\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leqslant b \\ b & \text{si } b < a \end{cases}$$

- $\max(a, b)$ est égal au plus grand des deux nombres a et b. Autrement dit,

$$\max(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } a \leqslant b \\ a & \text{si } b < a \end{cases}$$

Il faut connaître par cœur les propriétés qui suivent. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\min(a, b) \geqslant x \iff a \geqslant x \quad \text{et} \quad b \geqslant x$
- $\max(a, b) \leqslant x \iff a \leqslant x \quad \text{et} \quad b \leqslant x$
- $\min(a, b) \leqslant a \leqslant \max(a, b)$
- $\min(a, b) \leqslant b \leqslant \max(a, b)$
- $\min(a, b) + \max(a, b) = a + b$

Généralisons maintenant l'usage des fonctions min et max à n variables.

Definition 4. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- $\min(x_1, \dots, x_n)$ est égal au plus petit nombre parmi les nombres $x_1, \dots, x_n$.
- $\max(x_1, \dots, x_n)$ est égal au plus grand nombre parmi les nombres $x_1, \dots, x_n$.

Il faut connaître par cœur les propriétés qui suivent. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\min(x_1, \dots, x_n) \geqslant x \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geqslant x$
- $\max(x_1, \dots, x_n) \leqslant x \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \leqslant x$
- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\min(x_1, \dots, x_n) \leqslant x_i \leqslant \max(x_1, \dots, x_n)$

13 Exercices

On regroupe dans cette partie plusieurs (bouts de) questions classiques de concours, qui utilisent toutes les propriétés remarquables des fonctions usuelles citées précédemment.

Exercice 1 : Soit X une v.a.r. et soit $x \geqslant 0$. On note $Y = X^2$. Ecrire les événements suivants à l'aide d'événements portant sur X :

- $[Y = 0]$
- $[Y = 1]$
- $[Y \leqslant x]$

Correction détaillée de l'exercice 1 :

- $[Y = 0] = \left[X^2 = 0\right] = [X = 0]$
- $[Y = 1] = \left[X^2 = 1\right] = [X = 1] \cup [X = -1]$
- $[Y \leqslant x] = \left[X^2 \leqslant x\right] = [-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]$

Exercice 2 : Démontrer les deux inégalités suivantes en utilisant un argument de convexité.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
2. Pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

Correction détaillée de l'exercice 2 :

1. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, son graphe se situe donc au dessus de chacune de ses tangentes. En particulier, son graphe se situe au dessus de sa tangente en 0, qui a pour équation : $y = f'(0)x + f(0) = x + 1$.
   Ainsi : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
2. La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$, son graphe se situe donc en dessous de chacune de ses tangentes. En particulier, son graphe se situe en dessous de sa tangente en 0, qui a pour équation : $y = f'(0)x + f(0) = x$.
   Ainsi : pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

Exercice 3 : Soit $(x, m) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\varepsilon > 0$. Traduire par équivalence l'inégalité $|x - m| \leqslant \varepsilon$ en un encadrement de m.

Correction détaillée de l'exercice 3 :

$$\begin{aligned} |x - m| \leqslant \varepsilon &\iff -\varepsilon \leqslant x - m \leqslant \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon \leqslant m - x \leqslant \varepsilon && \textit{(en multipliant par } -1\textit{)} \\ &\iff x - \varepsilon \leqslant m \leqslant x + \varepsilon \end{aligned}$$

Exercice 4 : Soit X une v.a.r. , soit $k \in \mathbb{Z}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On note $Y = \lfloor X \rfloor$ la partie entière de X. Ecrire les événements suivants à l'aide d'événements portant sur X :

- $[Y = k]$
- $[Y \leqslant x]$

Correction détaillée de l'exercice 4 :

- $[Y = k] = [\ \lfloor X \rfloor = k\ ] = [k \leqslant X < k + 1]$
- $[Y \leqslant x] = [\ \lfloor X \rfloor \leqslant x\ ] = [\ \lfloor X \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor\ ] = [X \leqslant \lfloor x \rfloor]$

Exercice 5 : Soit X une v.a.r. et soit $x \in [0,1[$. On note $Z = \{X\} = X - \lfloor X \rfloor$ la partie fractionnaire de X. Ecrire les événements suivants à l'aide d'une union d'événements portant sur X :

- $[Z = 0]$
- $[Z \leqslant x]$
- $[Z > x]$

Correction détaillée de l'exercice 5 :

- $$\begin{aligned}[Z=0] &= [X - \lfloor X \rfloor = 0] \\ &= [X = \lfloor X \rfloor] \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X = \lfloor X \rfloor] \cap [\lfloor X \rfloor = k] \qquad \textit{car } ([X = \lfloor X \rfloor])_{k\in\mathbb{Z}} \textit{ est un système complet d'événements} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X = k] \cap [\lfloor X \rfloor = k] \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X = k] \qquad \textit{car } [X = k] \subset [\lfloor X \rfloor = k]\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}[Z \leqslant x] &= [X - \lfloor X \rfloor \leqslant x] \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X - \lfloor X \rfloor \leqslant x] \cap [\lfloor X \rfloor = k] \qquad \textit{car } ([X = \lfloor X \rfloor])_{k\in\mathbb{Z}} \textit{ est un système complet d'événements} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X - k \leqslant x] \cap [\lfloor X \rfloor = k] \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X \leqslant k + x] \cap [k \leqslant X < k+1] \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k \leqslant X \leqslant k + x] \qquad \textit{car } k \leqslant k + x < k+1\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}[Z > x] &= [X - \lfloor X \rfloor > x] \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X - \lfloor X \rfloor > x] \cap [\lfloor X \rfloor = k] \qquad \textit{car } ([X = \lfloor X \rfloor])_{k\in\mathbb{Z}} \textit{ est un système complet d'événements} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X - k > x] \cap [\lfloor X \rfloor = k] \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [X > k + x] \cap [k \leqslant X < k+1] \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k + x < X < k+1] \qquad \textit{car } k \leqslant k + x < k+1\end{aligned}$$

Exercice 6 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. et soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire les événements suivants à l'aide d'une intersection d'événements portant sur les X_i :

- $[\min(X_1, \ldots, X_n) > x]$
- $[\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x]$

Correction détaillée de l'exercice 6 :

- $[\min(X_1, \ldots, X_n) > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]$
- $[\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$