# Autour de la ruine du joueur

Soit $m$ un réel strictement positif. On considère le jeu de paris suivant :

- Le joueur possède un capital initial de $m$ euros.
- Le joueur effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée.
- A chaque lancer, si la pièce tombe sur `Pile`, le capital est augmenté de 50%, et si la pièce tombe sur `Face`, le capital est diminué de 40%.

On pose $X_0 = m$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- $X_n$ la variable aléatoire égale au capital après $n$ lancers de la pièce (ou $n$ paris),
- $Z_n = \dfrac{X_n}{X_{n-1}}$,
- $Y_n$ la variable aléatoire égale à 1 si la pièce tombe sur `Pile` lors du $n^{\text{e}}$ lancer, et 0 sinon.

*1.* **Question de cours** : Lemme des coalitions.

*2.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Montrer que $Z_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}Y_n\right)\left(1 - \dfrac{2}{5}(1 - Y_n)\right)$ puis calculer $\Delta = \mathbb{E}(Z_n)$.

**b)** En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = m\Delta^n$ puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Ce résultat vous donne-t-il envie d'accepter le pari sur 100 lancers avec une mise initiale de 100 euros ?

*3.* **a)** Écrire une fonction **Python**, nommée `un_pari`, qui prend en argument un capital `c` et qui renvoie le nouveau capital après simulation d'un lancer de pièce.

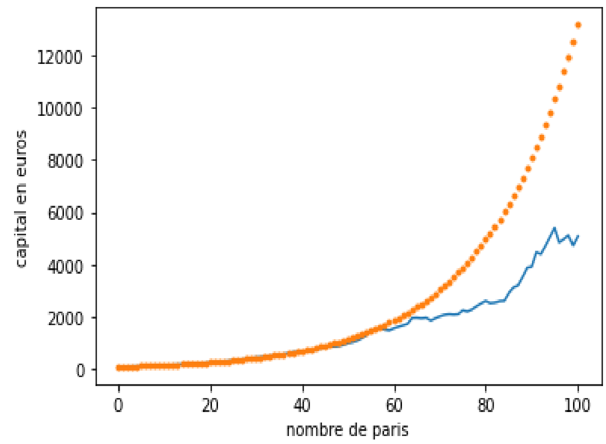
**b)** Écrire une fonction **Python**, nommée `suite_paris`, qui prend en argument le capital initial `m` et un entier `n`, qui simule `n` lancers et qui renvoie la liste des valeurs simulées de $X_0, \ldots, X_n$.

**c)** Écrire une fonction **Python**, nommée `plusieurs_suites_paris`, qui prend en arguments d'entrée le capital initial `m`, le nombre de paris simulés `n` et le nombre de joueurs `N`. Cette fonction doit simuler les `n` paris de ces `N` joueurs (qui possèdent tous le même capital initial) et doit renvoyer une matrice $M$ telle que la ligne $i$ de $M$ contient les valeurs simulées de $X_0, \ldots, X_n$ pour le joueur $i$.

**d)** On considère la fonction `mystere` suivante :

```
def mystere(mise_depart, nb_paris, nb_joueurs):
    M = plusieurs_suites_paris(mise_depart, nb_paris, nb_joueurs)
    liste_temps = [k for k in range(nb_paris+1)]
    liste_mystere_1 = [np.mean(M[:,j]) for j in liste_temps]
    plt.plot(liste_temps, liste_mystere_1)
    liste_mystere_2 = [mise_depart * (1.05 ** n) for n in liste_temps]
    plt.plot(liste_temps, liste_mystere_2, '.')
    plt.xlabel('nombre de paris')
    plt.ylabel('capital en euros')
    plt.show()
```

On reproduit ci-après la figure produite par l'appel `mystere(100, 100, 100000)`. Expliquer ce que répésentent les deux courbes. Que remarque-t-on ?



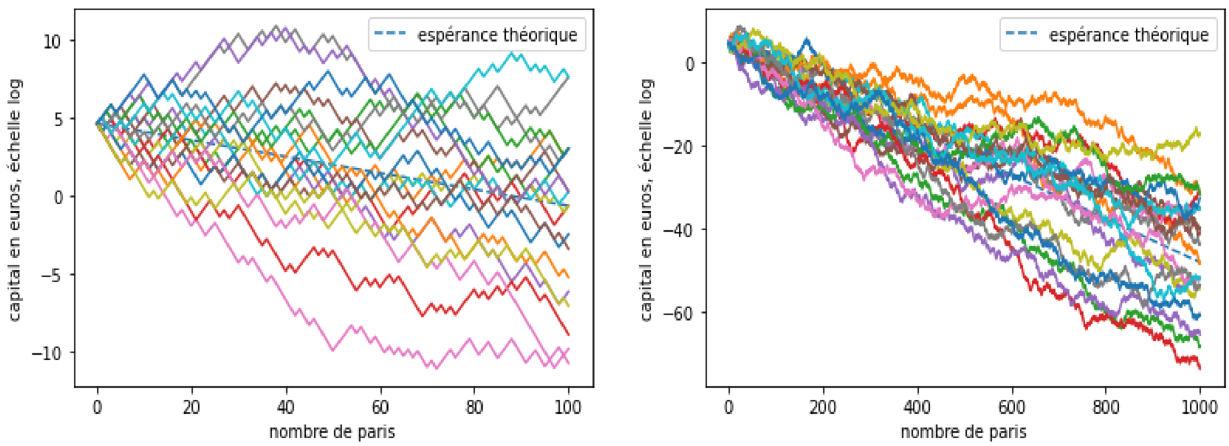

*4.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

***a)*** Calculer $\theta = \mathbb{E}(\ln(Z_n))$. Quel est le signe de $\theta$ ?

***b)*** En déduire une expression de $\mathbb{E}(\ln(X_n))$ en fonction de $n$, $m$ et $\theta$.

***c)*** Écrire une fonction **Python**, nommée `evolution_joueurs`, qui prend en arguments d'entrée le capital initial `m`, le nombre de paris simulés `n` et le nombre de joueurs `N`. Cette fonction doit simuler les `n` paris de ces `N` joueurs (qui possèdent tous le même capital initial) et doit tracer les valeurs simulées de $\ln(X_0), \ldots, \ln(X_n)$ pour chacun des joueurs, ainsi que la suite des espérances théoriques $(\mathbb{E}(\ln(X_k)))_{k \geqslant 0}$ au cours des $n$ paris.

***d)*** On reproduit ci-dessous les graphiques obtenus par les appels de `evolution_joueurs(100, 100, 20)` et `evolution_joueurs(100, 1000, 20)`.




Quelle conjecture peut-on faire sur le capital d'un joueur après un grand nombre de paris d'après ces graphiques ?

***e)*** Comment se transforme le capital au cours d'une période de deux paris consécutifs dont l'un est gagnant et l'autre perdant ? En utilisant cette remarque, justifier à l'aide d'un théorème du cours la conjecture précédente.

*5.* La stratégie initiale consiste à investir tout son capital dans les paris successifs. On souhaite changer cette stratégie en n'investissant qu'une fraction $x \in \,]0,1[$ du capital possédé. On se demande quelle fraction est optimale.

***a)*** Montrer que pour maximiser $\mathbb{E}(\ln(X_n))$, il faut maximiser la fonction $f : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{2}x\right)\left(1 - \dfrac{2}{5}x\right)$.

***b)*** Calculer en quel point $x_0$ la fonction $f$ admet un maximum. En choisissant cette fraction $x_0$ de capital investie à chaque pari, quelle proportion du capital est risquée à chaque pari ?