

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Relations de comparaisons et théorème des croissances comparées</b>	<b>2</b>
1.1	Négligeabilité . . . . .	2
1.1.1	Définition et premiers exemples polynomiaux . . . . .	2
1.1.2	Croissances comparées . . . . .	2
1.1.3	Lien entre négligeabilité et fonction qui tend vers 0 . . . . .	3
1.1.4	Lien entre négligeabilité et fonction qui tend vers $+\infty$ . . . . .	3
1.2	Équivalence . . . . .	4
1.2.1	Définition . . . . .	4
1.2.2	Équivalents usuels . . . . .	4
1.2.3	Propriétés générales . . . . .	4
1.2.4	Équivalents et limites . . . . .	4
1.2.5	Calculs d'équivalents en pratique . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Continuité et dérivabilité</b>	<b>6</b>
2.1	Continuité d'une fonction en un point . . . . .	6
2.2	Taux d'accroissement . . . . .	7
2.3	Dérivabilité d'une fonction en un point . . . . .	7
2.4	Tangentes à la courbe représentative . . . . .	8
2.5	Démontrer de la régularité pour une composée . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Tracer la courbe représentative d'une fonction</b>	<b>10</b>

Dans tout le chapitre, sauf précisions :

- $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,
- $\bar{I}$  désigne l'adhérence de  $I$  (l'intervalle  $I$  auquel on a rajouté les bornes finies),
- $f, g, h$  désignent des fonctions réelles définies sur  $I$ ,
- $x_0$  est un point de  $\bar{I}$  ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

## 1 Relations de comparaisons et théorème des croissances comparées

### 1.1 Négligeabilité

#### 1.1.1 Définition et premiers exemples polynomiaux

**Définition 1.** On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  en  $x_0$  (ou que  $g$  domine  $f$  en  $x_0$ ) si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si c'est le cas, on dit que «  $f$  est un petit o de  $g$  en  $x_0$  » ( $o = 15^{\text{ème}}$  lettre de l'alphabet) et on note :  $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$ .

*Exemple 1.* •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$  donc  $x^2 = o_{x \rightarrow 0}(x)$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$  donc  $x^3 = o_{x \rightarrow 0}(x)$  et  $x^3 = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- On a  $x^2 = o_{x \rightarrow 0}(x)$  et  $x^3 = o_{x \rightarrow 0}(x)$  mais on ne peut pas conclure que  $x^2 = x^3$ .
- On peut écrire  $o_{x \rightarrow 0}(x^2) = o_{x \rightarrow 0}(x)$  mais il est faux d'écrire  $o_{x \rightarrow 0}(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$

Le symbole d'égalité est à manier avec précaution lorsque l'on travaille avec les petits o.

*Remarque 1.* De manière générale, écrire que  $f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow 0}(h(x))$ , c'est dire que  $f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow 0}(h(x))$ , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 0.$$

#### 1.1.2 Croissances comparées

**Théorème 1.** Soient  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $q > 1$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0, \quad \text{i.e. } (\ln(x))^b = o_{x \rightarrow +\infty}(x^a)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{q^x} = 0, \quad \text{i.e. } x^a = o_{x \rightarrow +\infty}(q^x)$$

Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{(\ln(x))^b} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q^x}{x^a} = +\infty$$

Exemple 2.

1.  $a = 1$  et  $b = 2$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$  donc  $(\ln(x))^2 = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$ .
2.  $a = 1/2$  et  $b = 1$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$  donc  $\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(\sqrt{x})$ .
3.  $a = 10$  et  $q = e$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0$  donc  $x^{10} = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x)$ .
4.  $a = 1$  et  $q = e^2$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$  donc  $x = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{2x})$ .
5.  $a = 2$  et  $q = e^{1/3}$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{3}x}}{x^2} = +\infty$  donc  $x^2 = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\frac{1}{3}x})$ .

Du théorème précédent, on tire

**Théorème 2.** Soient  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $0 < r < 1$ . Alors

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a (\ln(x))^b = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall a > 0, \forall r \in ]0, 1[, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a r^x = 0}$$

Exemple 3.

1.  $a = 1$  et  $b = 1$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$
2.  $a = 1$  et  $r = \frac{1}{2}$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ .
3.  $a = 2$  et  $r = \frac{1}{3}$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$ .
4.  $a = 5$  et  $r = e^{-2}$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 e^{-2x} = 0$ .
5.  $a = 3$  et  $r = e^{-4}$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-4x} = 0$ .

### 1.1.3 Lien entre négligeabilité et fonction qui tend vers 0

**Proposition 3.** On suppose que  $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

*Démonstration.* On écrit

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x)$$

ce qui est le produit de deux fonctions qui tendent vers 0 en  $x_0$ . □

*Remarque 2.* Dans cette situation, il faut penser à la fonction  $f$  comme à une fonction qui tend vers 0 en  $x_0$  *plus rapidement* que  $g$ . Autrement dit, lorsque  $x$  se rapproche de  $x_0$ , le nombre  $f(x)$  est beaucoup plus petit que le nombre  $g(x)$ .

### 1.1.4 Lien entre négligeabilité et fonction qui tend vers $+\infty$

**Proposition 4.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions à valeurs positives. On suppose que  $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .

*Démonstration.* On écrit

$$g(x) = \frac{g(x)}{f(x)} f(x)$$

ce qui est le produit de deux fonctions qui tendent vers  $+\infty$  en  $x_0$ . □

*Remarque 3.* Dans cette situation, il faut penser à la fonction  $g$  comme à une fonction qui tend vers  $+\infty$  en  $x_0$  *plus rapidement* que  $f$ . Autrement dit, lorsque  $x$  se rapproche de  $x_0$ , le nombre  $g(x)$  est beaucoup plus grand que le nombre  $f(x)$ .

## 1.2 Équivalence

### 1.2.1 Définition

**Definition 2.** On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  en  $x_0$  si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si c'est le cas, on note  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ .

*Méthode* (Trouver un équivalent simple d'une somme de fonctions). On applique la même méthode que pour les suites, on cherche le terme qui tend le plus vite vers l'infini, ou le moins vite vers 0.

*Exemple 4.* Trouver un équivalent simple de  $f(x) = x^2 + 3x + e^x$  en  $+\infty$ .

$e^x$  est le « terme dominant » en  $+\infty$ . En effet, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{e^x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 1$ . D'où  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$

*Exemple 5.* Trouver un équivalent simple de  $f(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{e^x}$  en  $+\infty$ .

$\frac{1}{\ln(x)}$  est le « terme dominant » en  $+\infty$ . En effet, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{\ln(x)}} = 1$ . D'où

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}.$$

### 1.2.2 Equivalents usuels

**Théoreme 5.** On a, pour tout réel  $\alpha$  :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

*Démonstration.* Il s'agit de taux d'accroissements. □

### 1.2.3 Propriétés générales

**Théoreme 6.** La relation  $\underset{x \rightarrow x_0}{\sim}$  vérifie les propriétés suivantes.

1. *Réflexivité :*

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$$

2. *Symétrie :*

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$$

3. *Transitivité :*

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x)$$

### 1.2.4 Équivalents et limites

**Théoreme 7.**

1. *Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :*

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

(avec  $\ell$  limite éventuellement infinie)

2. Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R} \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$$

Remarque 4. Attention, on n'écrira jamais  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0$ .

Remarque 5. Attention si  $\ell = 0$ , c'est beaucoup plus délicat. Par exemple :

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \quad \text{est faux}$$

### 1.2.5 Calculs d'équivalents en pratique

#### Théorème 8.

1. Compatibilité avec le produit :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} t(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \times h(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \times t(x)$$

2. Compatibilité avec le quotient :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} t(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}$$

3. Compatibilité avec l'élevation à la puissance  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow (f(x))^n \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^n$$

4. Compatibilité avec l'élevation à la puissance  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ g > 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow (f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$$

5. Compatibilité avec la valeur absolue :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow |f(x)| \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} |g(x)|$$

Exemple 6. Simplification d'un terme ayant une limite finie dans un produit :

$$1. e^x \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^0 \times \ln(x) = \ln(x).$$

$$2. \frac{\ln(x)}{2e^{\frac{1}{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{2e^0} = \frac{1}{2} \ln(x).$$

$$3. \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1}} = e^{\frac{1}{x}}.$$

Exemple 7.

$$1. e^x + \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x \quad (\text{recherche du terme dominant})$$

2.  $e^x \times \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x \times \ln(x)$  (on ne peut pas simplifier un produit si aucun des deux termes de ce produit ne se simplifie)

3.  $(e^x + 1) \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x \ln(x)$  (compatibilité avec le produit)

4.  $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e^x}} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}$  (compatibilité avec l'élevation à la puissance 1/2 et avec le quotient)

5.  $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$  (compatibilité avec l'élevation à la puissance 2 et avec le quotient)

6. Limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10}$  ?

$$\frac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(3x)^3(8x^{-2})}{9x} = \frac{3^3 x^3 \times 8x^{-2}}{9x} = \frac{3^3 \cdot 8x}{9x} = 24$$

7. Limite en  $+\infty$  de  $\ln\left(\frac{e^x + x^2}{e^x - 1}\right)$  ? Tout d'abord :

$$\frac{e^x + x^2}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x - 1} = 1$ . Donc, par composition des limites :

$$\ln\left(\frac{e^x + x^2}{e^x - 1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par contre, écrire  $\ln\left(\frac{e^x + x^2}{e^x - 1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(1) = 0$  est faux. (on ne compose pas les équivalents par les fonctions)

8.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x + 1 \\ g(x) = x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$$

Par contre, écrire  $e^{x+1} = e^{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{g(x)} = e^x$  est faux puisque  $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$ .

*Exemple 8.* Attention, on ne somme pas les équivalents ! Considérons l'exemple suivant.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x + \sqrt{x} \\ g(x) = x + \ln(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} h(x) = -x \\ t(x) = -x \end{array} \right\} \Rightarrow h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} t(x)$$

mais écrire  $\sqrt{x} = f(x) + h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x) + t(x) = \ln(x)$  est faux.

## 2 Continuité et dérivabilité

### 2.1 Continuité d'une fonction en un point

**Definition 3.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ . On dit que la fonction  $f$  est *continue* en  $x_0$  si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

*Méthode.* Pour démontrer que  $f$  est continue en  $x_0$  dans le cas où  $f(x)$  est définie différemment à gauche et à droite de  $x_0$ , il faut donc faire deux calculs de limites.

*Méthode.* On démontre TOUJOURS la continuité d'une fonction sur des intervalles OUVERTS puis aux points restants (aux bords des intervalles ouverts considérés).

**Exercice 1 :** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

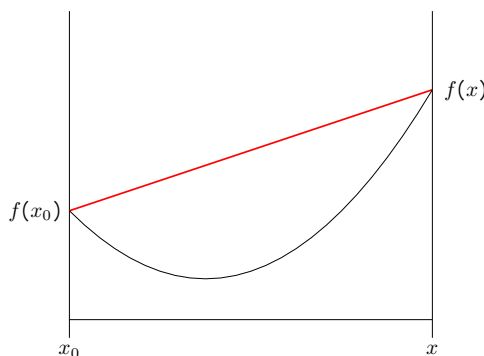
1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
2. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel  $x$  positif et renvoie le réel  $f(x)$ .
3. Écrire un script **Python** (utilisant la fonction précédente) permettant de tracer le graphe de la fonction  $f$  sur le segment  $[0, 3]$ . On pourra utiliser la commande `np.linspace` ou `np.arange`.

## 2.2 Taux d'accroissement

**Definition 4.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ . On appelle *taux d'accroissement* de  $f$  en  $x_0$  la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

*Remarque 6* (Interprétation graphique). Notons  $M = (x, f(x))$  et  $M_0 = (x_0, f(x_0))$  deux points de la courbe représentative de  $f$ . Alors  $\tau_{x_0}(f)(x)$  est la pente de la corde  $M_0M$ .



*Remarque 7* (Interprétation physique). Si  $f$  décrit l'évolution d'une distance parcourue par un mobile se déplaçant en ligne droite, alors

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est la vitesse moyenne de ce mobile entre l'instant  $x_0$  et l'instant  $x$ . En effet,  $f(x) - f(x_0)$  est la distance parcourue entre ces deux instants.

## 2.3 Dérivabilité d'une fonction en un point

**Definition 5.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ .

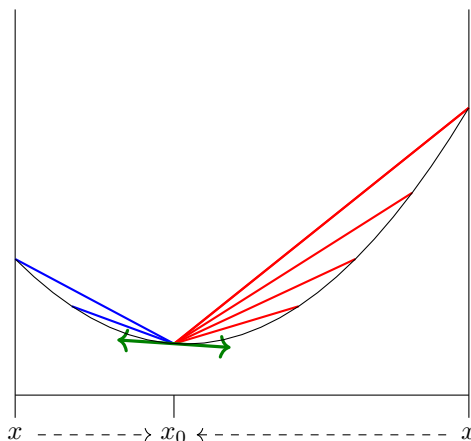
1. On dit que  $f$  est *dérivable en  $x_0$*  lorsque la fonction  $\tau_{x_0}(f)$  admet une limite finie en  $x_0$ .
2. Lorsque cette limite existe, elle est appelée *nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$*  et est notée  $f'(x_0)$ . Autrement dit :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*Remarque 8.* Dire qu'une fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$  c'est dire que la fonction taux d'accroissement se prolonge par continuité en  $x_0$  en posant  $\tau_{x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$ .

*Exemple 9.* La fonction  $x \mapsto |x|$  n'est pas dérivable en 0.

*Remarque 9* (Interprétation graphique).



**Exercice 2 :** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ . Que vaut  $f'(0)$  ?

### 2.4 Tangentes à la courbe représentative

**Definition 6.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

1. Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , on appelle *tangente de  $f$  en  $x_0$*  la droite passant par  $(x_0, f(x_0))$  de coefficient directeur  $f'(x_0)$ . Autrement dit, c'est la droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2. Si  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$ , on appelle *demi-tangente à gauche de  $f$  en  $x_0$*  la demi-droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

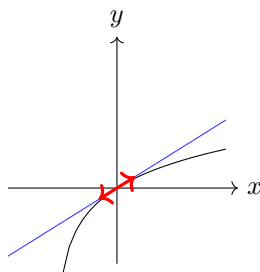
3. Si  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$ , on appelle *demi-tangente à droite de  $f$  en  $x_0$*  la demi-droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

*Exemple 10.* 1. La tangente de  $f : x \mapsto \ln(1 + x)$  en 0 a pour équation :

$$y = x$$

En effet,  $f(0) = \ln(1) = 0$  et  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$  donc  $f'(0) = 1$ . On en déduit que pour tout  $x > -1$ ,  $\ln(1 + x) \leq x$  par concavité. Représentation de la tangente :

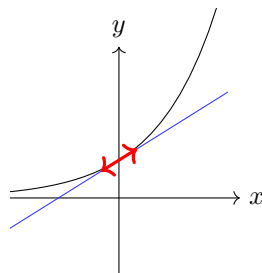


2. La tangente de  $f : x \mapsto e^x$  en 0 a pour équation :

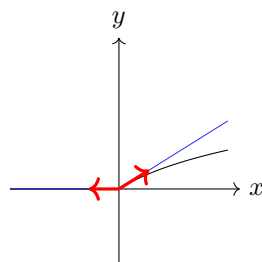
$$y = x + 1$$

En effet,  $f(0) = e^0 = 1$  et  $f'(x) = e^x$  donc  $f'(0) = 1$ . On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \geq x + 1$  par convexité. Représentation de la tangente :





3. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ . La fonction  $f$  admet deux demi-tangentes en 0.

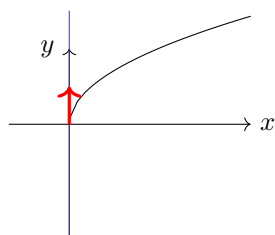


**Definition 7.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ . Supposons que :

1.  $f$  est continue en  $x_0$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ) ( $f$  est donc non dérivable en  $x_0$ )

On appelle alors *tangente verticale* de  $f$  en  $x_0$  la droite verticale passant par le point  $(x_0, f(x_0))$ . Autrement dit, c'est la droite d'équation  $x = x_0$ .

*Exemple 11.* Soit  $f : \begin{cases} [0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ . La fonction  $f$  admet une tangente verticale en 0.



### 2.5 Démontrer de la régularité pour une composée

*Méthode.* Soit  $f = g \circ h$ . On veut montrer que  $f$  est dérivable (par exemple) sur un intervalle  $I$ . La démonstration suit toujours le même schéma :

- la fonction  $g$  est dérivable sur  $J$  (on donne ici le plus grand intervalle  $J$  possible)
- la fonction  $h$  est dérivable sur  $I$  et vérifie  $h(I) \subset J$

On peut alors conclure que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

*Remarque 10.* On peut remplacer « dérivable » par « continue » ou « de classe  $\mathcal{C}^1$  » ou « de classe  $\mathcal{C}^2$  ».

### 3 Tracer la courbe représentative d'une fonction

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On veut tracer  $\mathcal{C}_f$ , la courbe représentative de  $f$ .

Ordre des tracés :

1. On place les points remarquables
  - $(x_0, 0)$  si  $f(x_0) = 0$  (points d'intersection du graphe et de l'axe des abscisses)
  - $(x_0, f(x_0))$  si  $f'(x_0) = 0$  (points où le graphe admet une tangente horizontale)
  - $(x_0, f(x_0))$  si  $x_0$  est au bord de l'intervalle  $I$
2. On place les tangentes remarquables
  - les tangentes horizontales
  - les (demi-)tangentes calculées aux questions précédentes
  - les tangentes verticales
3. On trace les éventuelles asymptotes verticales et horizontales
4. On trace la courbe d'un seul coup de crayon, en passant par les points remarquables, en suivant la direction des tangentes et en respectant les contraintes suivantes :
  - (a) La monotonie doit être respectée sur les différents intervalles
  - (b) Le graphe doit être cohérent avec les limites calculées
  - (c) En cas d'étude de la dérivée seconde, il faut respecter la concavité/convexité de la courbe

**Exercice 3 :** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que le tableau de variations de  $f$  est donné par

$x$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	+
Variations de $f$	$+\infty$	1	$+\infty$

Tracer  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 4 :** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que le tableau de variations de  $f$  est donné par

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	+
Variations de $f$	1	0	2

et on suppose que  $f'(0) = -2$ . Tracer  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 5 :** Soit  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que le tableau de variations de  $f$  est donné par

$x$	1	$\alpha$	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Variations de $f$	$-\infty$	0	2	0

et le tableau de variations de  $f'$  est donné par

$x$	1	2	$\beta$	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		-	0	+
Variations de $f'$	$+\infty$	0	$f'(\beta)$	0

Tracer  $\mathcal{C}_f$ .