Objectif du DM

On rappelle qu'un nombre $a \in \mathbb{R}$ est *rationnel* si il existe deux entiers relatifs p et q, avec $q \neq 0$, tels que $a = \dfrac{p}{q}$. L'objectif de ce DM est de montrer que le nombre e n'est pas rationnel (autrement dit : $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$).

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

   Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^x$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc u_n est bien défini. □

2. (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.

   Démonstration. • $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[\, \mathrm{e}^x \,\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$.

   • $u_1 = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$. On effectue une IPP :

   $$\left|\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

   Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$.

   $$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= \left[\, x\mathrm{e}^x \,\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - u_0 \\ &= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

   donc $\boxed{u_1 = 1}$.

   • $u_2 = \displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$. On effectue une IPP :

   $$\left|\begin{array}{ll} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

   Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$.

   $$\begin{aligned} \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= \left[\, x^2\mathrm{e}^x \,\right]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - 2u_1 \\ &= \mathrm{e} - 2 \end{aligned}$$

   donc $\boxed{u_2 = \mathrm{e} - 2}$.

   □

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$.

   Démonstration. Il s'agit de généraliser les deux calculs précédents. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$. On effectue une IPP :

   $$\left|\begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & v(x) = \mathrm{e}^x \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \left[\ x^{n+1}\mathrm{e}^x\ \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e} - (n+1)u_n\end{aligned}$$

d'où $\boxed{u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n}$. □

(c) En déduire qu'il existe deux suites d'entiers (a_n) et (b_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n\mathrm{e} + b_n$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux entiers a_n et b_n tels que $u_n = a_n\mathrm{e} + b_n$ »
Initialisation :
$u_0 = \mathrm{e} - 1$ donc en posant $a_0 = 1$ et $b_0 = -1$, il vient que $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, il existe a_n et b_n deux entiers tels que $u_n = a_n\mathrm{e} + b_n$. D'après la question 2b,

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \mathrm{e} - (n+1)u_n\\ &= \mathrm{e} - (n+1)(a_n\mathrm{e} + b_n)\\ &= (1-(n+1)a_n)\mathrm{e} - (n+1)b_n\\ &= a_{n+1}\mathrm{e} + b_{n+1}\end{aligned}$$

où $a_{n+1} = 1-(n+1)a_n$ et $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ sont bien deux entiers (sommes et produits d'entiers). D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
Par récurrence, on a montré que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers a_n et b_n tels que $u_n = a_n\mathrm{e} + b_n$. □

3. (a) Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$.

Démonstration. La fonction exponentielle est croissante sur $[0,1]$ donc, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. □

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, la fonction $f_n : x \mapsto x^n\mathrm{e}^x$ est continue sur le segment $[0,1]$ et, pour tout $x \in]0,1]$, $f_n(x) > 0$. Donc $u_n > 0$ par positivité de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant).
- Ensuite, pour tout $x \in [0,1]$, $x^n\mathrm{e}^x \leq x^n\mathrm{e}$ d'après la question précédente. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant $(0 < 1)$, on a :

$$u_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \mathrm{e}\frac{1}{n+1} = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

□

(c) Conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. On sait que $\dfrac{\mathrm{e}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par théorème d'encadrement et d'après la question précédente, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

4. On suppose dans cette question que e est rationnel. Ainsi, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ (car $\mathrm{e} > 0$).

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a_np + b_nq}{q}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_n = a_n\mathrm{e} + b_n = a_n\frac{p}{q} + b_n = \frac{a_np + b_nq}{q}$$

□

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n p + b_n q$ est un entier.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les nombres a_n, p, b_n et q sont tous des entiers donc $a_n p + b_n q$ est un entier. □

(c) En utilisant les questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n p + b_n q > 0$ et donc $a_n p + b_n q \geqslant 1$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, on remarque que $a_n p + b_n q = q u_n$. Or, $q \in \mathbb{N}^*$ donc $q > 0$ et $u_n > 0$ d'après la question 3b. Donc $a_n p + b_n q > 0$.
- Il vient alors que $a_n p + b_n q$ est un entier strictement positif. Le plus petit des entiers strictement positifs est 1, d'où $a_n p + b_n q \geqslant 1$.

□

(d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{q}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_n = \dfrac{a_n p + b_n q}{q}$ et que $a_n p + b_n q \geqslant 1$. Puisque $q > 0$, on peut donc en déduire que $u_n \geqslant \dfrac{1}{q}$. □

(e) Conclure.

Démonstration. On sait que :

- $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{q}$.

Par passage à la limite, on obtient : $0 \geqslant \dfrac{1}{q}$. Or, $\dfrac{1}{q} > 0$. C'est absurde.

On peut alors conclure que $\boxed{\text{e est irrationel}}$. □