DS1 (version A/B)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A-2I)(A-I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = U\}$.

a) Résoudre le système : $(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$

b) Déterminer $E_1(A)$.

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

3. On note $E_2(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = 2U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

b) Déterminer $E_2(A)$.

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
Le résultat devra faire apparaître T^n comme une combinaison linéaire de D et de N.

Exercice 2

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. ***a)*** Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

4. ***a)*** Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$.

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

6. ***a)*** Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

8. Écrire une fonction **Python** `premEntier(A)` qui prend en argument un réel A et qui renvoie le premier entier naturel N vérifiant : $u_N \geqslant A$.

9. ***a)*** Démontrer : $\forall x \in [2,+\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\, u_n$.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

10. ***a)*** Écrire une fonction **Python** `premTermesU(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie un tableau `numpy` contenant les n premiers termes de la suite (u_n).

b) Écrire un script utilisant la fonction précédente et permettant de tracer les 10 premiers termes de la suite (u_n). On pourra utiliser l'option graphique `'x'`.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$.

1. ***a)*** Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0,+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

2. ***a)*** Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. ***a)*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

e) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

4. ***a)*** Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε. On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leqslant n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np
def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while ..... :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            .....
        else:
            .....
    return (a+b)/2
```

b) Écrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près.
On pourra faire appel à la fonction ***`approx_u`*** *définie à la question précédente.*

Exercice 4

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

c) Écrire une fonction **Python** `f(x)` qui prend en argument un réel x strictement positif et qui renvoie la valeur de $f(x)$.

d) Écrire un script **Python** permettant de tracer le graphe de f sur le segment $[a, b]$ où $a = 0,1$ et $b = 3$.

e) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

f) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

g) Écrire une fonction **Python** `suiteU(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

2. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) On **admet** que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$ (développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0).
En déduire :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers γ.

3. ***a)*** Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

c) On rappelle que l'instruction `np.floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `suiteU` de la question ***1.g)*** a été correctement programmée.
Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = int(input('Entrer un réel strictement positif : '))
n = np.floor(1/eps) + 1
print(suiteU(n))
```

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

5. ***a)*** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

b) Déterminer deux réels α et β tels : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

6. ***a)*** Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

7. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

b) Retrouver alors le résultat de la question ***6.b)***.
On admettra pour cela le résultat suivant : pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ dt$$