

DS1 (correction)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1 (librement inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - 2I)(A - I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
- Ensuite : $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit : $(A - 2I)(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A - 2I)(A - I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A - 2I)(A - I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A - 2I)(A - I)^2 = (A - 2I)(A^2 - 2A + I) = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$$

- On en déduit :

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

donc $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I$

et $A(A^2 - 4A + 5I) = 2I$

ainsi $A \left(\frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) \right) = I$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $\frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$.

$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$

Commentaire

- L'écriture $\frac{A}{9}$ n'a pas de sens puisqu'il n'existe pas d'opérateur de division entre les matrices et les réels. Par contre, l'écriture $\frac{1}{9} \cdot A$ est bien autorisée : on multiplie une matrice par un scalaire à l'aide de l'opérateur de multiplication externe $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On ne peut pas non plus diviser par une matrice. Rappelons que l'inverse d'une matrice A , si elle existe, est notée A^{-1} et pas $\frac{1}{A}$. L'écriture $\frac{A}{B}$ est elle aussi impropre car il n'y a pas d'opérateur de division entre deux matrices.

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -3x + 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}.$

Démonstration.

$$(S_1) \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -3x + 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ - 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2z = -y \\ - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 + 2L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} -3x = -3y \\ - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \square$$

b) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 U \in E_1(A) &\Leftrightarrow AU = U \\
 &\Leftrightarrow (A - I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -3x + 3y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x & = y \\ z & = 0 \end{cases} \quad \text{(d'après la question précédente)}
 \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \text{ ET } z = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

□

- c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

L'ensemble $E_1(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_1(A)$,

× est libre car est constituée d'une unique matrice non nulle.

C'est donc une base de $E_1(A)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel $E_1(A)$.

□

3. On note $E_2(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = 2U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_2) \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} (S_2) \quad & \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \\ \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \iff \end{matrix} & \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\ \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \iff \end{matrix} & \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} -2x + y = -2z \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \iff \end{matrix} & \begin{cases} -2x = -2z \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{matrix} L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ \iff \end{matrix} & \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

b) Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

• Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{aligned} U \in E_2(A) & \iff AU = 2 \cdot U \\ & \iff (A - 2 \cdot I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ ET } y = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

□

- c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'ensemble $E_2(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_2(A)$,

× est libre car est constituée uniquement d'une matrice non nulle.

C'est donc une base de $E_2(A)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel $E_2(A)$.

□

4. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Ainsi P est inversible.

On effectue l'opération $\{ L_2 \leftarrow L_2 + L_3$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right.$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right.$$

Enfinement : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Commentaire

On remarque que la matrice P est constituée des vecteurs des famille \mathcal{F} et \mathcal{G} . C'est ce choix qui va permettre d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

Ainsi : $P^{-1}AP = T$.

□

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^n P^{-1}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : A^n = PT^n P^{-1}$.

► **Initialisation**

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $PT^0 P^{-1} = PIP^{-1} = P P^{-1} = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $A^{n+1} = PT^{n+1} P^{-1}$).

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= PT^n P^{-1} \times PTP^{-1} && \text{(d'après la question précédente et} \\ & && \text{par hypothèse de récurrence)} \\ &= PT^n (P^{-1} P) TP^{-1} \\ &= PT^n ITP^{-1} = PT^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^n P^{-1}$.

□

5. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

D'après l'énoncé, $N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

En conclusion : $N^0 = I$, $N^1 = N$ et pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Commentaire

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geq 2$:

$$N^k = N^{k-2} \times N^2 = N^{k-2} \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geq 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

- c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N , à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

- Soit $n \geq 1$.

Les matrices D et N commutent. En effet :

$$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ND$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n &= (D + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} D^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \text{(ce découpage est valable car } n \geq 1) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \text{(car on a montré : } \forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}) \\ &= \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 \\ &= D^n + n D^{n-1} N \end{aligned}$$

- Enfin : $D^0 + 0 \cdot D^{-1} N = I$ et $T^0 = I$.

(la matrice D est bien inversible car c'est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls)

La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = D^n + n D^{n-1} N$.

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$$

(la seconde somme est nulle si $p = n$)

où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.

L'argument $n \geq 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.

Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.

- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.

- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter. □

Exercice 2 (EML 2017)

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \mapsto e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \quad 7,3 < e^2 < 7,4 \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Démonstration.

Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont deux fois dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en tant que fonctions usuelles.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \text{ et } f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}.$$

□

- b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

Démonstration.

- Pour tout $x \in]0, +\infty[, f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$.

La fonction f' est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} = +\infty$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty.$$

- De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

- $f'(1) = e^1 - \frac{e}{1} = e - e = 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	1	+	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	+	
Variations de f'				

□

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

Démonstration.

• La fonction f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi :

× $\forall x \in]0, 1[, f'(x) < f'(1) = 0.$

× $\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) > f'(1) = 0.$

Donc f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

• Déterminons la limite de f en 0. Comme : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$.

• Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. On écrit :

$$f(x) = e^x - e \ln(x) = e^x \left(1 - e \frac{\ln(x)}{e^x} \right)$$

Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0.$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

• $f(1) = e^1 - e \ln(1) = e.$

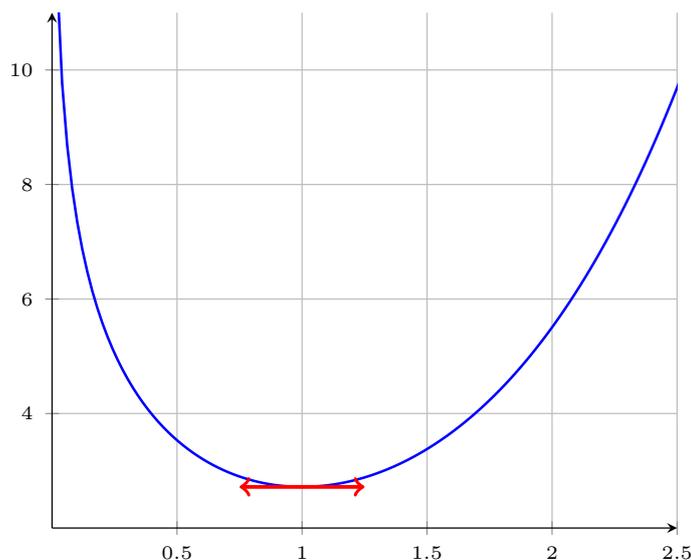
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	e	$+\infty$

□

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Démonstration.



Commentaire

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes. D'ailleurs, il ne faut oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant.

□

4. a) Étudier les variations de la fonction $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f'(x) - x$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ car elle est la somme $f_1 + f_2$ de :
 - × $f_1 = f'$ dérivable sur $]0, +\infty[$ car f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$,
 - × $f_2 : x \mapsto x$ dérivable sur $]0, +\infty[$.

La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in]0, +\infty[$:

$$u'(x) = f''(x) - 1 = e^x + \frac{e}{x^2} - 1 = \frac{x^2 e^x + e - x^2}{x^2} = \frac{x^2 (e^x - 1) + e}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, on en déduit que le signe de $u'(x)$ est celui de $x^2 (e^x - 1) + e$.

Or :

× comme $x > 0$, alors : $e^x > e^0 = 1$. Ainsi : $e^x - 1 > 0$.

× de plus : $x^2 > 0$ et $e > 0$.

On en déduit : $u'(x) > 0$.

La fonction u est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- D'après 1.b) : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$. De plus : $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty$.

- Déterminons alors la limite de f en $+\infty$. Soit $x \in]0, +\infty[$:

$$u(x) = e^x - \frac{e}{x} - x = e^x \left(1 - \frac{e}{xe^x} - \frac{x}{e^x} \right)$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{xe^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	+	
Variations de u	$-\infty$	$+\infty$

□

- b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, soit $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = x \Leftrightarrow f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$$

On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

- La fonction u est :
 - × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 4.a),
 - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Ainsi la fonction u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $u(]0, +\infty[)$.

$$u(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} u(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \right[=] - \infty, +\infty[$$

Or $0 \in] - \infty, +\infty[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que l'équation $f'(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.

- Tout d'abord :
 - × $u(\alpha) = 0$
 - × $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$
 - × $u(2) = f'(2) - 2 = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 0$

En effet, d'après les encadrements donnés par l'énoncé, on obtient :

- d'une part : $7,3 < e^2 < 7,4$. Donc : $5,3 < e^2 - 2 < 5,4$
- d'autre part : $2,7 < e < 2,8$. Donc : $1,35 < \frac{e}{2} < 1,4$. D'où : $-1,4 < -\frac{e}{2} < -1,35$

Ainsi : $3,9 < e^2 - 2 - \frac{e}{2} < 4,05$. On en conclut : $u(2) > 3,9 > 0$.

On en déduit :

$$u(1) < u(\alpha) < u(2)$$

Or, d'après le théorème de la bijection, $u^{-1} :] - \infty, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante sur $] - \infty, +\infty[$. En appliquant u^{-1} , on obtient alors :

$$\begin{array}{ccccc} u^{-1}(u(1)) & < & u^{-1}(u(\alpha)) & < & u^{-1}(u(2)) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 1 & & \alpha & & e \end{array}$$

$1 < \alpha < 2$

□

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 2$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : u_n$ existe et $u_n \geq 2$.

► **Initialisation** :

D'après l'énoncé : $u_0 = 2 \geq 2$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq 2$).

Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 2$.

• La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.

Or $u_n \geq 2$, donc $u_n \in]0, +\infty[$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.

• D'après la question 2., e est le minimum de f sur $]0, +\infty[$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \geq e$$

En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in]0, +\infty[$, on obtient :

$$u_{n+1} \geq e > 2$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

□

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{matrix}]2, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{matrix}$

Démonstration.

• La fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$ car elle est la somme $g_1 + g_2$ de :

× $g_1 = f$ dérivable (car deux fois dérivable d'après 1.a) sur $]0, +\infty[$, donc sur $]2, +\infty[$,

× $g_2 : x \mapsto x$ dérivable sur $]2, +\infty[$.

La fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.

• Soit $x \in]2, +\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1$.

D'après la question 1.b), la fonction f' est croissante sur $]2, +\infty[\subset]0, +\infty[$. Ainsi :

$$f'(x) \geq f'(2)$$

Or, avec les encadrements donnés par l'énoncé : $f'(2) = e^2 - \frac{e}{2} \geq 7,3 - 1,4 = 5,9 > 1$.

On en déduit : $f'(x) > 1$. D'où : $g'(x) > 0$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de g	$g(2)$ $+\infty$	

- Déterminons maintenant le signe de g . Comme g est croissante sur $[2, +\infty[$, on a :

$$\forall x \geq 2, \quad g(x) \geq g(2)$$

Il suffit alors de démontrer : $g(2) > 0$ pour pouvoir conclure. Calculons :

$$g(2) = f(2) - 2 = e^2 - e \ln(2) - 2$$

D'après les encadrements de l'énoncé :

× d'une part : $7,3 < e^2 < 7,4$

× d'autre part : $2,7 < e < 2,8$ et $0,6 < \ln(2) < 0,7$. D'où :

$$2,7 \times 0,6 < e \ln(2) < 2,8 \times 0,7$$

||

$$1,62$$

||

$$1,96$$

Ainsi : $-1,96 < -e \ln(2) < -1,62$.

On en déduit : $g(2) = e^2 - e \ln(2) - 2 > 7,3 - 1,96 - 2 = 3,34$.

On obtient alors : $g(2) > 0$.

$\forall x \in [2, +\infty[, g(x) > 0$

□

- b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.

- D'après la question **6.a)** : $\forall x \geq 2, g(x) > 0$. Autrement dit, pour tout $x \geq 2$:

$$f(x) > x$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $x = u_n \geq 2$ (question **5.**), on obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.

□

- 7.** Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

Démonstration.

- On sait que la suite (u_n) est croissante (d'après la question **6.b)**). Deux cas se présentent alors :

× soit (u_n) est de plus majorée, et alors elle converge.

× soit (u_n) n'est pas majorée, et alors elle diverge vers $+\infty$.

- Démontrons que (u_n) n'est pas majorée. On procède par l'absurde.

Supposons que la suite (u_n) est majorée.

× Dans ce cas, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge vers un réel ℓ .

D'après la question **5.** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$.

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geq 2$.

× D'autre part, par définition : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f est continue sur $[2, +\infty[$, elle est donc en particulier continue en ℓ . Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient : $\ell = f(\ell)$, i.e. $g(\ell) = 0$. On

Absurde ! En effet, d'après la question **6.a)** : $\forall x \geq 2, g(x) > 0$. En particulier : $\forall x \geq 2, g(x) \neq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) n'est pas majorée et diverge donc vers $+\infty$

Commentaire

Il faut prendre le réflexe de penser à un raisonnement par l'absurde lorsque le résultat à démontrer est formulé sous forme de négation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général). À titre d'illustration, il faut penser à ce type de raisonnement pour :

- × montrer qu'une suite N 'est PAS majorée,
- × montrer qu'une matrice admettant une seule valeur propre N 'est PAS diagonalisable.

□

8. Écrire une fonction **Python** `premEntier(A)` qui prend en argument un réel A et qui renvoie le premier entier naturel N vérifiant : $u_N \geq A$.

Démonstration.

On propose la fonction suivante :

```
1 def premEntier(A):
2     N = 0
3     u = 2
4     while u < A:
5         N += 1
6         u = np.exp(u) - np.exp(1) * np.log(u)
7     return N
```

Détaillons les éléments de cette fonction.

• **Début du programme**

On initialise la variable N à 0.

```
2 N = 0
```

La variable u qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) est initialisée à 2 : la valeur de u_0 .

```
3 u = 2
```

• **Structure itérative**

Les lignes 4 à 6 consistent à :

- 1) déterminer un entier n tel que : $u_n \geq A$,
- 2) calculer les valeurs successives de u_n .

On doit donc :

- 1) incrémenter la variable N de 1 jusqu'à ce que : $u_N \geq A$. Autrement dit, on doit incrémenter la variable N de 1 tant que : $u_n < A$. Pour cela on met en place une structure **while** :

```
4 while u < A:
```

Puis on met à jour la variable N .

```
5     N += 1
```

- 2) calculer les valeurs successives de u_n :

```
6         u = np.exp(u) - np.exp(1) * np.log(u)
```

• **Fin du programme**

À l'issue de cette boucle, la variable N contient le premier entier n tel que : $u_n \geq A$. On finit donc cette fonction en renvoyant la valeur de cette variable.

```
s return N
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Scilab** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question. □

9. a) Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[, 2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$.

Démonstration.

• Démontrons tout d'abord : $\forall x \in [2, +\infty[, 2 \ln(x) \leq x$.

La fonction $h : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.

Sa courbe représentative \mathcal{C}_h est donc située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 2. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(2) + h'(2)(x - 2) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}(x - 2) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall x \in [2, +\infty[, \ln(x) \leq \ln(2) + \frac{1}{2}(x - 2)$$

Ainsi, pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$2 \ln(x) \leq 2 \ln(2) + (x - 2) = x + 2(\ln(2) - 1)$$

Or, comme : $0,6 < \ln(2) < 0,7$, alors : $2(\ln(2) - 1) < 0$. D'où : $x + 2(\ln(2) - 1) < x$.

Finalement, par transitivité : $\forall x \in [2, +\infty[, 2 \ln(x) \leq x$

• Démontrons maintenant : $\forall x \in [2, +\infty[, x \leq \frac{e^x}{3}$.

Considérons la fonction $h : x \mapsto \frac{e^x}{3} - x$.

× La fonction h est dérivable sur $[2, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$.

× Soit $x \in [2, +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{e^x}{3} - 1 = \frac{e^x - 3}{3}$$

Comme $3 > 0$, la quantité $h'(x)$ est du signe de $e^x - 3$.

Or, comme $x \geq 2$, par croissance de la fonction \exp sur \mathbb{R} :

$$e^x \geq e^2 > 7,3$$

Et ainsi : $e^x - 3 > 4,3 > 0$. D'où : $h'(x) > 0$.

× On obtient le tableau de variations suivant :

x	2	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	
Variations de h	$h(2)$	$+\infty$

× De plus : $h(2) = \frac{e^2}{3} - 2 = \frac{e^2 - 6}{3} > 0$ car $e^2 > 7,3$.

Or h est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in [2, +\infty[$:

$$h(x) \geq h(2) \geq 0$$

On en conclut : $\forall x \in [2, +\infty[, x \leq \frac{e^x}{3}$.

Commentaire

Pour démontrer la première inégalité, il est bien évidemment possible de passer par l'étude de la fonction $\varphi : x \mapsto x - 2 \ln(x)$.

- La fonction φ est dérivable sur $[2, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$.
- Soit $x \in [2, +\infty[$.

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x}$$

Comme $x \geq 2$, on en déduit : $\varphi'(x) \geq 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	2	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	+	
Variations de φ	$\varphi(2)$	$+\infty$

- Comme la fonction φ est croissante sur $[2, +\infty[$:

$$\forall x \in [2, +\infty[, \varphi(x) \geq \varphi(2) = 2 - 2 \ln(2)$$

Or : $2 - 2 \ln(2) > 0$. Ainsi : $\forall x \in [2, +\infty[, \varphi(x) \geq 0$. D'où :

$$\forall x \in [2, +\infty[, x - 2 \ln(x) \geq 0$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2}u_n$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e \ln(u_n)$$

- De plus, d'après la question précédente :

$$\forall x \in [2, +\infty[, 2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$$

En appliquant cette double inégalité à $x = u_n \in [2, +\infty[$, on obtient :

$$2 \ln(u_n) \leq u_n \leq \frac{e^{u_n}}{3}$$

On en déduit :

× d'une part : $2 \ln(u_n) \leq u_n$. Ainsi : $-e \ln(u_n) \geq -\frac{e}{2}u_n$.

× d'autre part : $u_n \leq \frac{e^{u_n}}{3}$. Ainsi : $e^{u_n} \geq 3u_n$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} e^{u_n} - e \ln(u_n) &\geq 3u_n - \frac{e}{2}u_n \\ \parallel & \qquad \qquad \parallel \\ u_{n+1} & \qquad \qquad \frac{6-e}{2} u_n \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2}u_n$

□

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question **9.b** :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geq \frac{6-e}{2} u_n \\ &\geq \frac{6-e}{2} \frac{6-e}{2} u_{n-1} &&= \left(\frac{6-e}{2}\right)^2 u_{n-1} \\ &\geq \frac{6-e}{2} \frac{6-e}{2} \frac{6-e}{2} u_{n-2} &&= \left(\frac{6-e}{2}\right)^3 u_{n-2} \\ &\dots \\ &\geq \frac{6-e}{2} \frac{6-e}{2} \frac{6-e}{2} \frac{6-e}{2} \dots \frac{6-e}{2} u_0 &&= \left(\frac{6-e}{2}\right)^{n+1} u_0 \end{aligned}$$

On peut démontrer rigoureusement ce résultat par récurrence (voir remarque en page suivante).

Comme $u_0 = 2$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2 \left(\frac{6-e}{2}\right)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n \geq 2 \left(\frac{6-e}{2} \right)^n$$

donc $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{6-e} \right)^n$ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, car $u_n \geq 2 > 0$ d'après 5.)

- On obtient alors :

× $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \left(\frac{2}{6-e} \right)^n$

× la série $\sum \left(\frac{2}{6-e} \right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{2}{6-e} \in]-1, 1[$.

(en effet : $3 < 3,2 < 6-e < 3,3 < 4$. D'où : $-1 < \frac{2}{4} < \frac{2}{6-e} < \frac{2}{3} < 1$)

Elle est donc convergente.

Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{u_n}$ est convergente.

Commentaire

- On pouvait aussi résoudre cette question de la façon suivante.
On sait que les termes de la suite (u_n) sont non nuls, donc, d'après la question 9.b) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{2}{6-e} \geq \frac{u_k}{u_{k+1}}$$

En effectuant le produit de ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient (tous les termes considérés sont positifs) :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2}{6-e} \geq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_{k+1}} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{2}{6-e} \right)^n \geq \frac{u_0 \cancel{u_1} \dots \cancel{u_{n-1}}}{\cancel{u_1} \cancel{u_2} \dots u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{2}{u_n}$$

On conclut en utilisant le critère de comparaison de séries à termes positifs.

- La question portait ici sur l'application du critère de comparaison des séries à termes positifs. On pouvait se permettre de simplement citer le principe de récurrence. Détaillons quand même cette rédaction.
- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$, où $\mathcal{P}(n) : u_n \geq 2 \left(\frac{6-e}{2} \right)^n$

► **Initialisation :**

D'une part, $u_0 = 2$.

D'autre part, $2 \left(\frac{6-e}{2} \right)^0 = 2$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

Commentaire

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 2 \left(\frac{6-e}{2}\right)^{n+1}$)

D'après la question **9.b**), $u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n$.

Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \geq 2 \left(\frac{6-e}{2}\right)^n$. Ainsi, par transitivité :

$$u_{n+1} \geq \frac{6-e}{2} u_n \geq \frac{6-e}{2} 2 \left(\frac{6-e}{2}\right)^n \\ \parallel \\ 2 \left(\frac{6-e}{2}\right)^{n+1}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2 \left(\frac{6-e}{2}\right)^n$. □

10. a) Écrire une fonction **Python** `premTermesU(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie un tableau **numpy** contenant les n premiers termes de la suite (u_n) .

Démonstration.

```
1 def premTermesU(n):
2     T = np.zeros(n)
3     T[0] = 2
4     for k in range(n-1):
5         T[k+1] = np.exp(T[k]) - np.exp(1) * np.log(T[k])
6     return T
```

□

b) Écrire un script utilisant la fonction précédente et permettant de tracer les 10 premiers termes de la suite (u_n) . On pourra utiliser l'option graphique 'x'.

Démonstration.

```
1 N = 10
2 plt.plot(premTermesU(N), 'x')
```

Remarquons que la suite est numérotée à partir de 0 et que c'est pour cette raison qu'il est inutile de spécifier un argument pour les abscisses lors de l'utilisation de `plt.plot` (**Python** commence toujours la numérotation à 0). □

Exercice 3 (ECRICOME 2023)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < e < 3$.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

Démonstration. La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$ où

- $u : x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est dérivable sur \mathbb{R} (et donc sur $]0, +\infty[$) comme composée de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} ($u = u_1 \circ u_2$ où $u_1 : x \mapsto e^x$ et $u_2 : x \mapsto \frac{x}{2}$).
- $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}}(x-1)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{2}}(x-1)}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{(x-1)}{2x} f(x) \end{aligned}$$

□

b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Démonstration. Soit $x \in]0, +\infty[$.

On a $2x > 0$ et $f(x) > 0$ (car $\sqrt{x} > 0$ et $e^{\frac{x}{2}} > 0$) donc $f'(x)$ a le même signe que $x - 1$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	+
Variations de f	$+\infty$	\searrow	\nearrow $+\infty$

Détaillons les calculs de limites :

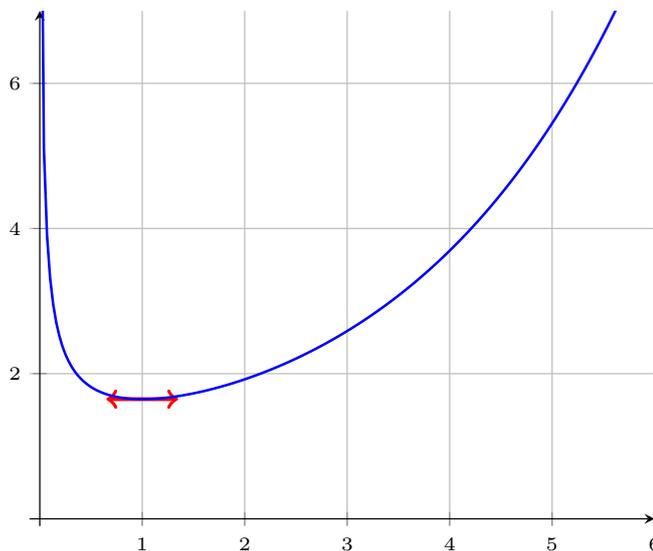
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x}{2}} = e^0 = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

□

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Démonstration.



□

d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0, +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n , avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

Démonstration. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction f est :

- continue sur $]0, 1]$ (car dérivable)
- strictement décroissante sur $]0, 1]$

donc f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $f(]0, 1]) = [\sqrt{e}, +\infty[$.

De plus, $n \in [\sqrt{e}, +\infty[$. En effet, $2 < e < 3$ donc $\sqrt{2} < \sqrt{e} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 \leq n$.

Donc l'équation $f(x) = n$ d'inconnue x admet une unique solution dans $]0, 1]$. Notons la u_n . On remarque que $f(1) = \sqrt{e} < n$ donc $u_n \neq 1$ donc $0 < u_n < 1$.

De manière analogue (en remplaçant la stricte décroissance par la stricte croissance), on montre que l'équation $f(x) = n$ d'inconnue x admet une unique solution dans $]1, +\infty[$, que l'on note v_n . D'où l'existence d'exactly deux solutions à l'équation $f(x) = n$ sur $]0, +\infty[$, notées u_n et v_n et vérifiant $0 < u_n < 1 < v_n$. □

2. a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Démonstration. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On a $f(v_n) = n$ et $f(v_{n+1}) = n + 1$ donc $f(v_n) < f(v_{n+1})$.

Par stricte croissance de f sur $]1, +\infty[$ (on a bien $v_n > 1$ et $v_{n+1} > 1$), on en déduit que $v_n < v_{n+1}$.

Donc la suite (v_n) est (strictement) croissante.

□

b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. La suite (v_n) étant croissante, soit elle est majorée et elle converge (par théorème de convergence monotone), soit elle n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Supposons que (v_n) soit majorée et converge vers une certaine limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \geq 2$, $v_n > 1$ donc par passage à la limite : $\ell \geq 1$.

Pour tout $n \geq 2$, $f(v_n) = n$. Or,

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(\ell)$ par continuité de f sur $[1, +\infty[$

C'est absurde,

donc la suite (v_n) n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

□

3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

Démonstration. On procède de manière analogue à la question **2.a**).

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On a $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n + 1$ donc $f(u_n) < f(u_{n+1})$.

Par stricte décroissance de f sur $]0, 1[$ (on a bien $0 < u_n < 1$ et $0 < u_{n+1} < 1$), on en déduit que $u_n > u_{n+1}$.

Donc la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

□

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge.

Démonstration. La suite (u_n) est

- décroissante (cf question **3.a**)
- minorée par 0 (cf question **1.d**)

donc, par théorème de convergence monotone,

la suite (u_n) converge.

□

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 2$, $0 < u_n < 1$ donc, par passage à la limite : $0 \leq \ell \leq 1$.

Supposons que $\ell \neq 0$. Alors $\ell \in]0, 1]$.

Pour tout $n \geq 2$, $f(u_n) = n$. Or,

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ par continuité de f sur $]0, 1]$

C'est absurde,

$$\text{donc } \ell = 0.$$

□

- d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On a $f(u_n) = n$, donc $e^{\frac{u_n}{2}} = n\sqrt{u_n}$ donc $e^{u_n} = n^2 u_n$ en élevant au carré.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} = 1$ par continuité de \exp en 0.

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$$

et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

□

- e) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Démonstration. On sait que :

× pour tout entier $n \geq 2$, $0 < u_n$ et $0 \leq \frac{1}{n^2}$

× $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

× la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente par critère de Riemann

On en déduit, par critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, que la série $\sum u_n$ est convergente. □

Commentaire

Le sujet initial ne comportait pas cette question sur la série $\sum u_n$. Je trouvais regrettable cette occasion manquée et j'ai donc rajouté cette question.

4. a) Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε . On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.

On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leq n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.

- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif eps , et renvoyant une valeur approchée de u_n à eps près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
1 import numpy as np
2
3 def approx_u(n, eps):
4     a = 0
5     b = 1
6     while ..... :
7         c = (a+b)/2
8         if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
9             .....
10        else:
11            .....
12        return (a+b)/2
```

Démonstration. La fonction **Python** se complète de la manière suivante :

```
1 import numpy as np
2
3 def approx_u(n, eps):
4     a = 0
5     b = 1
6     while b - a > eps :
7         c = (a+b)/2 # Milieu de l'intervalle.
8         if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n: # Si f(c) < n.
9             b = c # Alors on cherche à gauche.
10        else:
11            a = c # Alors on cherche à droite.
12        return (a+b)/2
```

□

- b) Écrire une fonction en langage Python, nommée **sp**, prenant en entrée un entier N supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif eps et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^N u_n$ à eps près.

*On pourra faire appel à la fonction **approx_u** définie à la question précédente.*

Démonstration. On va approcher la somme $\sum_{n=2}^N u_n$ en approchant chacun des $N - 1$ termes qui la constituent, grâce à la fonction de la question précédente. Attention cependant, on souhaite une erreur d'au plus eps sur la somme, et on va sommer les erreurs commises sur chacun des $N - 1$ termes. On comprend donc qu'il faut partir d'une erreur de $\text{eps} / (N-1)$ sur chacun des termes pour atteindre notre but.

On propose alors la fonction suivante :

```
1 def sp(N, eps):
2     S = 0
3     for k in range(2, N + 1):
4         S = S + approx_u(k, eps / (N - 1))
5     return S
```

Pour terminer, démontrons que l'erreur totale est bien inférieure à $\overline{\text{eps}}$.

Notons, pour tout $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$, \tilde{u}_k une approximation de u_k à $\frac{\varepsilon}{N-1}$ près. On a alors

$$u_k - \frac{\varepsilon}{N-1} \leq \tilde{u}_k \leq u_k + \frac{\varepsilon}{N-1}$$

Sommons cet encadrement, pour k variant de 2 à $N-1$:

$$\sum_{k=2}^N \left(u_k - \frac{\varepsilon}{N-1} \right) \leq \sum_{k=2}^N \tilde{u}_k \leq \sum_{k=2}^N \left(u_k + \frac{\varepsilon}{N-1} \right)$$

donc

$$\sum_{k=2}^N u_k - \varepsilon \leq \sum_{k=2}^N \tilde{u}_k \leq \sum_{k=2}^N u_k + \varepsilon$$

donc $\sum_{k=2}^N \tilde{u}_k$ est une approximation de $\sum_{k=2}^N u_k$ à ε près.

Commentaire

Cette question est délicate, car on peut facilement passer à côté de l'idée que les erreurs se cumulent sur chaque terme. En effet, le programme de maths appliquées en ECG ne s'aventure pas dans les preuves techniques de convergence de suites à base de découpage d'épsilon, et donc les élèves de cette section n'auront pas vraiment eu l'occasion de se poser ce genre de questions pendant leur cursus.

On peut se demander si il était pertinent de proposer une telle difficulté, alors que par ailleurs plein de points du programme de deuxième année n'ont pas été abordés bien qu'ils auraient facilement pu l'être (série ou fonction de deux variables en lien avec cet exercice). Dans tous les cas, il n'est jamais problématique de proposer une question nettement plus difficile en fin d'exercice, car celle-ci ne sera pas bloquante et permettra seulement de distinguer les tous·tes meilleur·es candidat·es.

On peut s'attendre à avoir une partie des points si le codage de la somme est correct mais que l'erreur sur l'approximation est mal gérée. La justification du code n'était probablement pas un attendu.

□

Exercice 4 (ECRICOME 2018)

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1, \quad \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty \quad \text{et} \quad \ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(1) = 0$$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

• D'autre part :

$$\ln(x) - \ln(x+1) = -(\ln(x+1) - \ln(x)) = -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\ln(1) = 0$$

Comme de plus $\frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. □

b) Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* et dresser son tableau de variations.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{-x + (x^2 + 2x + 1) - x^2 - x}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

Or $x(x+1)^2 > 0$.

Ainsi : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0$.

• On en déduit le tableau de variations de f .

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f		

□

c) Écrire une fonction **Python** $f(x)$ qui prend en argument un réel x strictement positif et qui renvoie la valeur de $f(x)$.

Démonstration.

```
1 def f(x):  
2     return 1/(x+1) + np.log(x) - np.log(x+1)
```

□

- d) Écrire un script **Python** permettant de tracer le graphe de f sur le segment $[a, b]$ où $a = 0,1$ et $b = 3$.

Démonstration.

```
1 a = 0.1  
2 b = 3  
3 Xabs = np.linspace(a,b,1000)  
4 Yord = [f(x) for x in Xabs]  
5 plt.plot(Xabs, Yord)
```

□

- e) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = f(n) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$$

□

- f) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'étude en question **1.b**), la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On en déduit :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) < 0$$

- En appliquant cette propriété en $x = n$, on obtient, d'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$$

On en conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est (strictement) décroissante.

□

- g) Écrire une fonction **Python** `suiteU(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .

Démonstration.

```

1 def suiteU(n):
2     S = 0
3     for k in range(1,n+1):
4         S += 1/k
5     return S - np.log(n)

```

Commentaire

On doit faire bien attention dans cette fonction au fait de ne pas sommer le terme $\ln(n)$.

A la fin de la boucle `for`, la variable `S` contient la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

□

2. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) \\
 &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
 &= \left(\frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1)\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (\text{d'après la question 1.c}) \\
 &= \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

□

- b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Démonstration.

- La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave.

On en déduit que sa courbe représentative \mathcal{C}_f se situe sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned}
 y &= g(1) + g'(1)(x-1) \\
 &= \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) = x-1
 \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x-1$$

Soit $t \geq 0$. En appliquant la propriété ci-dessus à $x = 1 + t \in]0, +\infty[$, on obtient :

$$\ln(1 + t) \leq (1 + t) - 1 = t$$

On a bien : $\forall t \geq 0, \ln(1 + t) \leq t$.

Commentaire

- Notons tout d'abord que la variable t étant sous la portée d'un quantificateur, elle est muette. Ainsi, le résultat démontré est bien celui souhaité.
- Il est possible de procéder différemment.
On peut par exemple considérer la fonction $g_1 : x \mapsto \ln(1 + x)$ et démontrer qu'elle est concave. Ainsi, la courbe \mathcal{C}_{g_1} est située sous sa tangente au point d'abscisse 0 :

$$\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \leq g_1(0) + g_1'(0)(x - 0) = \ln(1) + x = x$$

- On peut aussi considérer la fonction $g_2 : x \mapsto x - \ln(1 + x)$, procéder à son étude et conclure quant à son signe :

$$\forall x \geq 0, g_2(x) \geq 0$$

ce qui correspond à l'inégalité souhaitée.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et ainsi} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. □

c) On **admet** que $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ (développement limité d'ordre 2 de $\ln(1 + x)$ en 0).

En déduire :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Démonstration. Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on peut appliquer le développement limité à $x = \frac{1}{n}$ pour n dans un voisinage de $+\infty$.

On obtient :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi : $v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. □

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

Démonstration.

D'après ce qui précède :

$$\times v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}.$$

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \geq 0 \text{ et } \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

\times La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Il en est de même de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série

$$\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n) \text{ est convergente.}$$

Commentaire

La seule difficulté de cette démonstration réside dans la rédaction du critère des séries à termes positifs (les arguments à utiliser ont tous été démontrés dans les questions précédentes). C'est donc une question d'application directe du cours qu'il convient de savoir traiter. □

e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.

En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .

Démonstration.

Soit $n \geq 2$.

• Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_{(n-1)+1} - v_1 = v_n - v_1$$

On en déduit : $v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.

• Or, d'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente.

On déduit de l'écriture précédente de v_n que la suite (v_n) est convergente, de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = v_1 + \gamma$$

• Enfin :

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{1} = \left(\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} - \ln(1) \right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Ainsi, la suite (v_n) est convergente, de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma$. □

3. a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par définition : $u_n = v_n + \frac{1}{n}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente car elle est la somme de suites convergentes.

$$\text{De plus, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \gamma + 0 = \gamma.$$

Commentaire

- Il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. Il n'est donc pas judicieux de laisser de côté certaines parties.
- Cette question 3.a) ne présente pas de difficulté. Comme dans la question 2.d), on est confronté ici à une question bilan qui consiste simplement à rappeler puis utiliser certains résultats précédents. Ces résultats étant fournis par l'énoncé, cette question peut être traitée même si les questions précédentes ne l'ont pas été. □

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma \leq u_n$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
 - × la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (question 2.b).
 - × la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ .

Démontrons alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma$.

On procède par l'absurde.

Suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_{n_0} > \gamma$.

La suite (v_n) étant croissante : $\forall n \geq n_0, v_n \geq v_{n_0}$.

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\gamma \geq v_{n_0}$.
En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors :

$$\gamma \geq v_{n_0} > \gamma$$

Absurde!

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \gamma$.

- En appliquant le résultat précédent à la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui est croissante (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante) et de limite $-\gamma$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -u_n \leq -\gamma$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \gamma$.

Commentaire

- L'esprit de l'énoncé semble être d'utiliser directement le résultat suivant :

$$\left. \begin{array}{l} (v_n) \text{ croissante} \\ v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \ell$$

- Le résultat encadré ci-dessus est lié à la notion de borne supérieure d'une suite, qui par définition, et sous réserve d'existence, est le plus petit des majorants de la suite. Si on connaît ce vocabulaire, on a accès à un énoncé plus précis du théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée converge **vers sa borne supérieure**. On peut alors démontrer le résultat précédent :

- × la suite (v_n) converge (vers ℓ) donc elle est majorée,
- × la suite (v_n) est croissante.

Ainsi, d'après le théorème ci-dessus, $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \ell$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité précédente : $u_n - \gamma \geq 0$. On en déduit :

$$|u_n - \gamma| = u_n - \gamma$$

Or, par définition de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$u_n - \gamma = v_n + \frac{1}{n} - \gamma = (v_n - \gamma) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

car, d'après ce qui précède : $v_n - \gamma \leq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

□

c) On rappelle que l'instruction `np.floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `suiteU` de la question 1.g) a été correctement programmée.

Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
1 eps = int(input('Entrer un réel strictement positif : '))
2 n = np.floor(1/eps) + 1
3 print(suiteU(n))
```

Démonstration.

- Ce script a pour but d'afficher une valeur approchée de γ à ε près (où ε est un réel strictement positif fourni par l'utilisateur et stocké dans la variable `eps`).

Pour ce faire, il faut commencer par trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$|u_N - \gamma| \leq \varepsilon$$

- Or, d'après ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$$

Afin de trouver l'entier N recherché, il suffit de trouver un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{N} \leq \varepsilon$$

Si c'est le cas, on obtient alors, par transitivité :

$$|u_N - \gamma| \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$$

- Raisonnons par équivalence pour trouver N :

$$\frac{1}{N} \leq \varepsilon \Leftrightarrow N \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[)$$

Ainsi, tout entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$ convient. En particulier, l'entier $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ convient.

Ce script affiche la valeur u_N où $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. C'est une valeur approchée de γ à ε près. \square

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

Démonstration. On a :

$$\times a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}.$$

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 0 \text{ et } \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \geq 0.$$

\times La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Il en est de même de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$ (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul).

Ainsi, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ est convergente.

Commentaire

La démonstration demandée ici est à peu de choses près celle de la question **I.2.d**. □

5. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$$

Commentaire

- L'énoncé demande de « Justifier » le résultat. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles.
- Il est aussi possible ici de procéder par récurrence. Détaillons la rédaction.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

► **Initialisation :**

– D'une part : $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$.

– D'autre part : $\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{2k} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = 1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k}$).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \right) + \frac{1}{2(n+1)-1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2n+1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n+2} \right) && \text{(en introduisant } \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2} \text{)} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$.

□

b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n(2n-1)} &= \frac{\alpha(2n-1) + \beta n}{n(2n-1)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n(2n-1)} &= \frac{(2\alpha + \beta)n - \alpha}{n(2n-1)} \\ \Leftrightarrow 1 &= (2\alpha + \beta)n - \alpha && \text{(en multipliant par } n(2n-1) > 0 \text{)} \end{aligned}$$

La dernière égalité étant vérifiée pour tout entier non nul n , elle est équivalente, par identification, au système suivant :

$$(S) \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = 1 \end{cases}$$

Et enfin : $(S) \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\iff} \begin{cases} \beta = 2 \\ -\alpha = 1 \end{cases}$.

Les réels $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ conviennent.

□

c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k = \frac{-1}{k} + \frac{2}{2k-1}$$

- En sommant ces égalités membre à membre, on obtient, par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) && \text{(d'après la question 2.b))} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k} + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{-1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^n \cancel{\frac{1}{k}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \cancel{\frac{1}{k}} \right) = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

□

6. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - (\ln(2n) - \ln(n)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - ((\ln(2) + \ln(n)) - \ln(n)) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) \end{aligned}$$

On en déduit, en réordonnant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).$

□

b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Démonstration.

- D'après la question 1., la série $\sum a_n$ est convergente.
- Déterminons sa somme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} && \text{(d'après la question 2.c)} \\ &= 2 (u_{2n} - u_n + \ln(2)) && \text{(d'après la question 3.a)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 (\gamma - \gamma + \ln(2)) && \text{(car comme la suite } (u_n) \text{ converge vers } \gamma, \text{ il en est de même de sa sous-suite } (u_{2n})) \end{aligned}$$

On en conclut : $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \ln(2).$

□

7. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \left(\frac{k}{n} + 1 \right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$

□

b) Retrouver alors le résultat de la question 6.b).

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$.

- On reconnaît une somme de Riemann (théorème admis dans l'énoncé car hors-programme depuis 2022), ce qui démontre :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$

Or :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(|1+x|)]_0^1 = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1)$$

- Ainsi, d'après la question 5.c) :

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(2)$$

On retrouve bien : $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \ln(2)$

□