

La rédaction d'une récurrence suit une forme très précise qu'il faudra obligatoirement respecter pour éviter les erreurs courantes.

Montrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$   
 où  $\mathcal{P}(n)$  : « Propriété qui dépend de  $n$  »  
Initialisation :  
 On vérifie que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie lorsque  $n = 0$ .  
 D'où  $\mathcal{P}(0)$ .  
Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$ . Montrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .  
 On démontre que la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie en utilisant l'hypothèse de récurrence.  
 D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ .

*Exemple 1.* Considérons une suite  $(u_n)$  définie par récurrence. Si l'énoncé propose la question :

« Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ . »

Alors on écrira :

Montrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$   
 où  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  est bien défini et  $0 \leq u_n \leq 1$  »

*Exemple 2.* Considérons une suite  $(u_n)$  définie par récurrence. Si l'énoncé propose la question :

« Montrer qu'il existe deux suites d'entiers  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = a_n e + b_n$ . »

Alors on écrira :

Montrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$   
 où  $\mathcal{P}(n)$  : « il existe deux entiers  $a_n$  et  $b_n$  tels que  $u_n = a_n e + b_n$  »

*Exemple 3.* Considérons une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = 2A + I$ . Si l'énoncé propose la question :

« Montrer qu'il existe deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = u_n A + v_n I$ . »

Alors on écrira :

Montrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$   
 où  $\mathcal{P}(n)$  : « il existe deux réels  $u_n$  et  $v_n$  tels que  $A^n = u_n A + v_n I$  »