Exercices de cours

Exercice 1 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel x positif et renvoie le réel $f(x)$.
3. Écrire un script **Python** (utilisant la fonction précédente) permettant de tracer le graphe de la fonction f sur le segment $[0, 3]$. On pourra utiliser la commande `np.linspace` ou `np.arange`.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Démontrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Que vaut $f'(0)$?

Exercice 3 : Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 4 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

et on suppose que $f'(0) = -2$. Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 5 : Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	1		α		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$		$+$	0	$-$	
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

et le tableau de variations de f' est donné par

x	1		2		β		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$\|\|$		$-$		0	$+$	
Variations de f'	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f'(\beta)$	$\nearrow$	0

Tracer $\mathscr{C}_f$.

Calculs de limites et d'équivalents

Exercice 6 : À l'aide d'équivalents, déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x\ln(1+x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ln(x+1) - x\ln(x)$

Exercice 7 : Calculer les limites des fonctions suivante aux points indiqués.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}}$ en 0^+ et en $+\infty$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln\left(e^{-x} + x^{-2}\right)$ en 0^+ et en $+\infty$.
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{xe^x + 1}{e^x + 1}$ en 0^+ en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. $f_4 : x \mapsto x^4 e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x\ln(x) + \ln(x)}{\sqrt{x+1}}$ en 0^+ et en $+\infty$.
6. $f_6 : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ et en $+\infty$.

Études de fonctions

Exercice 8 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$ définie sur $]-2, +\infty[$.

1. Calculer, pour tout $x > -2$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. En déduire le tableau de variations de f et de f'.
3. Tracer le graphe de f.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln(x) \leqslant x + 1$.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe. Préciser le sens de variation de f.
3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Déterminer un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.
4. Tracer l'allure du graphe de f.