Interrogation de rentrée

Pour réussir en Mathématiques, il faut...

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. *Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.*

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]0,+\infty[$. » :

a) La variable f est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :
« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. »
Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

2. L'expression $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ dépend de

A. n ***B.*** k ***C.*** n et k ***D.*** ni n, ni k

3. Une variable muette est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** parfois libre, parfois liée ***D.*** la réponse D

4. Dans l'écriture : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies |u_n| \leqslant \varepsilon$,

a) La variable n_0 est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable n est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable ε est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

5. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$,

a) La variable R est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable y est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

d) La variable z est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

6. L'expression $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\, dt$ dépend de

A. n ***B.*** t ***C.*** x ***D.*** ni n, ni t, ni x

7. Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable k est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable X est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

A. dépend toujours de n ***B.*** ne dépend jamais de n ***C.*** peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$,

a) La variable x est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable f est

A. libre ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

10. Une variable liée

A. doit toujours ***B.*** ne doit jamais ***C.*** peut parfois

être introduite par un « Soit ».

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
u_n		
$f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$		
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$		
$\lfloor \pi \rfloor = 3$		
$\sum\limits_{n \geqslant 3} u_n$		
$\displaystyle\int_0^1 x^3 \, dx$		
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$		
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$		

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 4y - 4z = 0 \\ 8x + 8y - 8z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$.

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -2x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$.

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

Exercice 4 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{2n} k$.

Exercice 5 Soit $p \in \,]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{E}(3X + 1)$ et $\mathbb{V}(3X + 1)$.

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 6

Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit la loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

3. Conclure.

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 7

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire une fonction **Python**, nommée `f`, qui prend en argument un réel x et qui renvoie $f(x)$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python**, nommée `suiteU`, qui prend en argument un entier n et qui renvoie u_n.

3. On **admet** que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Écrire une fonction **Python**, nommée `premTerme`, qui prend en argument d'entrée un réel $A > 0$ et qui renvoie le premier entier n vérifiant : $u_n \geqslant A$.

4. Écrire une fonction **Python**, nommée `somme(n)`, qui prend en argument d'entrée un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 8

1. Donner un exemple, d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0,1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K \times |x - y| \qquad (*)$$

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.
On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$$

b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.

b) En déduire l'inégalité :

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

c) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^t}$$

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$, pour tout réel t.

b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left|f'(t)\right| \leqslant \frac{1}{4}$$

c) En déduire que f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

e) Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n, la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```
def suite(n):
    u = ------
    for k in range(1, n+1):
        u = -----
    return u
```

f) En s'appuyant sur le résultat de la question ***5.c)***, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant 2000/3$.

g) En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Exercice 9 *(Bonus)* Démontrer le résultat admis en question ***3*** de l'exercice 7.