Interrogation de rentrée (barème)

Pour réussir en Mathématiques, il faut…

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. *Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.*

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$. » :

a) La variable f est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :
« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »
Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

2. L'expression $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ dépend de

A. $\boxed{n}$ ***B.*** k ***C.*** n et k ***D.*** ni n, ni k

3. Une variable muette est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** parfois libre, parfois liée ***D.*** la réponse D

4. Dans l'écriture : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies |u_n| \leqslant \varepsilon$,

a) La variable n_0 est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable n est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable ε est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

5. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$,

a) La variable R est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable y est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

d) La variable z est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

6. L'expression $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\, dt$ dépend de

A. $\boxed{n}$ ***B.*** t ***C.*** $\boxed{x}$ ***D.*** ni n, ni t, ni x

7. Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable k est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable X est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

A. dépend toujours de n ***B.*** $\boxed{\text{ne dépend jamais de } n}$ ***C.*** peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^2$,

a) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable f est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

10. Une variable liée

A. doit toujours ***B.*** $\boxed{\text{ne doit jamais}}$ ***C.*** peut parfois

être introduite par un « Soit ».

- **10 pts : on attribue 1 pt par réponse juste, pas de point négatif en cas de réponse fausse. On ajoute un point si tout est juste. A la fin, division par 2 du total.**

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
u_n	Objet	Réel
$f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$	Objet	Fonction
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$	Objet	Ensemble
$\lfloor \pi \rfloor = 3$	Proposition	
$\sum\limits_{n \geqslant 3} u_n$	Objet	Série
$\displaystyle\int_0^1 x^3 \, dx$	Objet	Réel
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Objet	Suite
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$	Proposition	

- **7 pts : on attribue 1 pt par réponse juste, pas de point négatif en cas de question fausse. A la fin, division par 2 du total.**

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 4y - 4z = 0 \\ 8x + 8y - 8z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$.

- **1 pt : pivot de Gauss bien effectué et expliqué**
- **1 pt : raisonnement par équivalence**
- **1 pt : résultat $z = x + y$ (ou $x = -y + z$ ou $y = -x + z$)**
  Aucun point si pas d'explication ou si autre chose qu'un pivot de Gauss

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -2x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$.

- **1 pt : pivot de Gauss bien effectué et expliqué**

- **1 pt : raisonnement par équivalence**
- **1 pt : résultat** $\begin{cases} x & = \frac{3}{2} z \\ & y = 0 \end{cases}$

  Aucun point si pas d'explication ou si autre chose qu'un pivot de Gauss

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_3(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = 3U\}$.

- **1 pt :** $U \in E_3(A) \iff \begin{cases} x & = \frac{3}{2} z \\ & y = 0 \end{cases}$
- **2 pt :** $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 4
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{2n} k$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{2n} k = \frac{(2n)((2n)+1)}{2} = n(2n+1)$ **(0 pt si pas simplifié)**

Exercice 5 Soit $p \in \,]0,1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{E}(3X+1)$ et $\mathbb{V}(3X+1)$.

- **1 pt : La variable aléatoire $3X+1$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine d'une variable aléatoire admettant une espérance et une variance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(3X+1) = \dfrac{3}{p} + 1 = \dfrac{3+p}{p}$
- **1 pt : argument de linéarité cité**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(3X+1) = 9\dfrac{1-p}{p^2}$

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 6
Soit $p \in \,]0,1[$. On note $q = 1-p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

- **1 pt : incompatibilité des événements de l'union considérée**
- **1 pt : argument de somme géométrique correct**

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \; = \; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

- **1 pt : X est à valeurs entières**
- **1 pt : incompatibilité des événements**

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

- **1 pt : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$**
- **2 pt : $\mathbb{P}([X = k]) = q^{k-1}p$**

3. Conclure.

- **2 pt : écriture correcte de l'équivalence démontrée**

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 7

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire une fonction **Python**, nommée `f`, qui prend en argument un réel x et qui renvoie $f(x)$.

- **2 pts : 1 pt par ligne correcte**

```
def f(x):
    return x * np.exp(x)
```

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python**, nommée `suiteU`, qui prend en argument un entier n et qui renvoie u_n.

- **1 pt :** `u = 1`
- **1 pt : boucle for correcte (bonne taille)**
- **1 pt :** `u = f(u)`
- **1 pt : bonus si tout est correct**

```
def suiteU(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

3. On **admet** que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Écrire une fonction **Python**, nommée `premTerme`, qui prend en argument un réel $A > 0$ et qui renvoie le premier entier n vérifiant : $u_n \geqslant A$.

- **1 pt :** `n = 0` **et** `u = 1`
- **1 pt :** `while u < A:`
- **1 pt :** `n =+ 1`
- **1 pt :** `u = f(u)`
- **1 pt :** `return n`

```python
def premTerme(A):
    n = 0
    u = 1
    while u < A:
        n += 1
        u = f(u)
    return n
```

4. Écrire une fonction **Python**, nommée `somme(n)`, qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- **1 pt :** `S = 0`
- **1 pt :** `for k in range(1,n+1):`
- **1 pt :** `S += 1/k`
- **1 pt : bonus si tout est correct**

```python
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S += 1/k
    return S
```

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 8 *(EDHEC 2023)*

1. Donner un exemple, d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0,1[$ tel que, pour tout couple (x,y) de réels, on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K \times |x - y| \qquad (*)$$

- **1 pt : exemple correct**
- **1 pt : démonstration que l'exemple convient bien**

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.
On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- **2 pt : utilisation correcte du thm d'encadrement**

3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

- **1 pt : raisonnement par l'absurde**
- **1 pt : vérification que l'on ne divise pas par** 0

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1}-u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

- **2 pt : preuve de l'absolue convergence de la série $\sum u_{n+1}-u_n$ par comparaison avec une série géométrique**
- **1 pt : convergence absolue implique convergence**
- **1 pt : télescopage**
- **1 pt : preuve de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

c) Conclure que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution.

- **1 pt : (u_n) converge vers a donc (u_{n+1}) également (comme suite extraite)**
- **1 pt : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (cf question *2*) donc $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$**
- **1 pt : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ donc, par unicité de la limite : $a=f(a)$**

5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1}-u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1-u_0|$.

- **1 pt : sommation de l'inégalité de la question *4.a)***

b) En déduire l'inégalité :

$$|u_{n+p}-u_n| \leqslant K^n \times \frac{1-K^p}{1-K} \times |u_1-u_0|$$

- **1 pt : télescopage**
- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt : somme géométrique de raison $K\neq 1$**

c) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$|a-u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1-u_0|$$

- **1 pt : continuité de la fonction valeur absolue**
- **1 pt : passage à la limite lorsque $p\to+\infty$**
- **1 pt : $\lim\limits_{p\to+\infty} K^p = 0$ (car $0<K<1$)**

6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$, pour tout réel t.

- **1 pt : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme inverse de la fonction $g : t\mapsto 1+\mathrm{e}^t$ qui est elle-même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $f'(t) = -\dfrac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$**
- **1 pt : $f''(t)=\mathrm{e}^t\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{(1+\mathrm{e}^t)^3}$**

b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \left|f'(t)\right| \leqslant \frac{1}{4}$$

- **1 pt :**

t	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

- **1 pt :** $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$

c) En déduire que f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

- **1 pt : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' vérifie :** $\forall t \in \mathbb{R}, \ |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$
- **1 pt : inégalité des accroissements finis**

d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

- **1 pt : la fonction f est $\dfrac{1}{4}$-contractante d'après la question précédente donc on peut appliquer la question *4.b)***

e) Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n, la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```
def suite(n):
    u = ------
    for k in range(1, n+1):
        u = -----
    return u
```

- **1 pt :** `u = 0`
- **1 pt :** `u = 1 / (1 + np.exp(u))`

f) En s'appuyant sur le résultat de la question ***5.c)***, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant 2000/3$.

- **1 pt :** $|a - u_n| \leqslant \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4^n}\dfrac{2}{3}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{4^n}\dfrac{2}{3} \leqslant 10^{-3} \iff \dfrac{2\times 10^3}{3} \leqslant 4^n \iff \dfrac{2000}{3} \leqslant 4^n$

g) En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

- **2 pt :** $4^n \geqslant \dfrac{2000}{3} \iff n \geqslant \left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{2000}{3}\right)}{\ln(4)} \right\rceil$ **(seulement 1 pt si arrêt avant de mettre la partie entière supérieure)**

- **1 pt :** `x = np.log(2000 / 3) / np.log(4)`
- **2 pt :** `n = int(np.ceil(x))` **(seulement 1 pt si oubli de** `int`**)**
- **1 pt :** `print('Une valeur approchée à 10**(-3) près de a est :', suite(n))`

Exercice 9 *(Bonus)* Démontrer le résultat admis en question *3* de l'exercice 7.

- **hors barème**