Interrogation de rentrée (correction)

Pour réussir en Mathématiques, il faut...

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. *Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.*

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$. » :

a) La variable f est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :
« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »
Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

2. L'expression $\sum_{k=0}^{n} u_k$ dépend de

A. $\boxed{n}$ ***B.*** k ***C.*** n et k ***D.*** ni n, ni k

3. Une variable muette est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** parfois libre, parfois liée ***D.*** la réponse D

4. Dans l'écriture : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies |u_n| \leqslant \varepsilon$,

a) La variable n_0 est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable n est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable ε est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

5. Dans l'écriture $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$,

a) La variable R est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable y est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

d) La variable z est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

6. L'expression $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$ dépend de

A. $\boxed{n}$ ***B.*** t ***C.*** $\boxed{x}$ ***D.*** ni n, ni t, ni x

7. Dans la phrase « La famille $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable k est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable X est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

A. dépend toujours de n ***B.*** $\boxed{\text{ne dépend jamais de } n}$ ***C.*** peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$,

a) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable f est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

10. Une variable liée

A. doit toujours ***B.*** $\boxed{\text{ne doit jamais}}$ ***C.*** peut parfois

être introduite par un « Soit ».

Exercice 2
Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
u_n	Objet	Réel
$f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$	Objet	Fonction
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$	Objet	Ensemble
$\lfloor \pi \rfloor = 3$	Proposition	
$\sum\limits_{n \geqslant 3} u_n$	Objet	Série
$\displaystyle\int_0^1 x^3 \, dx$	Objet	Réel
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Objet	Suite
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$	Proposition	

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 4x + 4y - 4z = 0 \\ 8x + 8y - 8z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$.

Démonstration.

$$\begin{cases} 4x + 4y - 4z = 0 \\ 8x + 8y - 8z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{8} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \end{array}$$

$$\iff x + y - z = 0$$

$$\iff z = x + y$$

(x et y sont alors les variables auxiliaires)

□

2. ***a)*** Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-3z & = & 0 \\ 2x+\ \ y-3z & = & 0 \\ -2x-4y+3z & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-3z & = & 0 \\ 2x+\ \ y-3z & = & 0 \\ -2x-4y+3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-3z & = & 0 \\ -2y & = & 0 \\ -\ \ y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-3z & = & 0 \\ -2y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-3z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x \qquad -3z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3}{2}z \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_3(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = 3U\}$.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_3(A) & \iff & AU = 3U \\ & \iff & (A-3I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-3z & = & 0 \\ 2x+\ \ y-3z & = & 0 \\ -2x-4y+3z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3}{2}z \\ y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E_3(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{3}{2}z, y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

□

Exercice 4 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{2n} k$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} k &= \frac{(2n)((2n)+1)}{2} \\
&= n(2n+1)
\end{aligned}$$

□

Exercice 5 Soit $p \in \,]0,1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{E}(3X+1)$ et $\mathbb{V}(3X+1)$.

Démonstration. La variable aléatoire $3X+1$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine d'une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(3X+1) &= 3\mathbb{E}(X) + 1 && \textit{(par linéarité)} \\
&= 3\frac{1}{p} + 1 \\
&= \frac{3+p}{p}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(3X+1) &= 9\mathbb{V}(X) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= 9\frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

□

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 6
Soit $p \in \,]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit la loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :
$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$$
- On en déduit :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X > k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]\right) \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) && \textit{(par incompatibilité de } [X = k+1], [X = k+2], \ldots) \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p\, q^{i-1} \\
&= p \sum_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1} \\
&= p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{k+i} \\
&= pq^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
&= pq^k \frac{1}{1-q} && \textit{(on reconnaît une série géométrique de raison } q \in \,]-1,1[) \\
&= q^k && \textit{(car } 1 - q = p)
\end{aligned}$$

□

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}
[X > k-1] &= [X \geqslant k] && \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\
&= [X = k] \cup [X > k]
\end{aligned}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :
$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]).}$$

□

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = k]) & = & \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & q^{k-1} - q^k & \textit{(par hypothèse de la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1}p & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

□

3. Conclure.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
- D'après la question ***1.b)*** : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :} \\ X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k\ \big) \end{array}}$$

□

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 7

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire une fonction **Python**, nommée `f`, qui prend en argument un réel x et qui renvoie $f(x)$.

Démonstration.

```
def f(x):
    return x * np.exp(x)
```

□

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python**, nommée `suiteU`, qui prend en argument un entier n et qui renvoie u_n.

Démonstration.

```python
def suiteU(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

□

3. On **admet** que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. Écrire une fonction **Python**, nommée `premTerme`, qui prend en argument un réel $A > 0$ et qui renvoie le premier entier n vérifiant : $u_n \geqslant A$.

Démonstration.

```python
def premTerme(A):
    n = 0
    u = 1
    while u < A:
        n += 1
        u = f(u)
    return n
```

□

4. Écrire une fonction **Python**, nommée `somme(n)`, qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Démonstration.

```python
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S += 1/k
    return S
```

□

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 8 *(EDHEC 2023)*

1. Donner un exemple, d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0,1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K \times |x - y| \qquad (*)$$

Démonstration. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| = \frac{1}{2}\,|x - y| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$$

Donc la relation $(*)$ est vérifiée avec $K = \dfrac{1}{2} \in \,]0,1[$. □

Commentaire

L'inégalité $(*)$ fait penser à l'inégalité des accroissements finis. On a donc choisi à la question précédente une fonction très simple qui vérifie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour cette fonction affine (et même linéaire), le calcul est direct et il n'est pas utile de recourir à l'inégalité des accroissements finis.

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.
On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après $(*)$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant K \times |x - x_0|$$

Or, $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$ donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$.
Autrement dit,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ceci prouve que f est continue en x_0. Le réel x_0 étant quelconque, on peut conclure que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

Démonstration. Supposons que l'équation $f(x) = x$ admet au moins deux solutions réelles distinctes, que l'on note a et b. On a alors, d'après $(*)$:

$$|f(a) - f(b)| \leqslant K \times |a - b|$$

i.e.

$$|a - b| \leqslant K \times |a - b|$$

Puisque $a \neq b$, on a $|a - b| > 0$ et donc $1 \leqslant K$. Ceci contredit l'hypothèse faite sur K. Donc

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet au plus une solution.}}$$

□

4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$ »
<u>Initialisation</u> :
$K^0 = 1$ donc on a bien $|u_1 - u_0| \leqslant K^0 \, |u_1 - u_0|$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - u_{n+1}| &= |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \\ &\leqslant K\,|u_{n+1} - u_n| && \textit{d'après } (*) \\ &\leqslant K \times K^n \times |u_1 - u_0| && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= K^{n+1} \times |u_1 - u_0| \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a bien montré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n \times |u_1 - u_0|$.

□

b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

Démonstration. On a

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n\,|u_1 - u_0|$
- la série $\sum K^n$ est une série géométrique de raison $K \in \,]0, 1[$ donc converge

Ainsi, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il vient que la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente, ce qui prouve qu'elle converge.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1} - u_n = u_N - u_0$$

donc

$$u_N = u_0 + \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1} - u_n$$

Ceci prouve que la suite (u_n) converge (comme somme de deux suites convergentes) et sa limite a vérifie :

$$a = u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n$$

□

c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

Démonstration. On sait déjà que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution, il suffit donc de montrer qu'elle en admet au moins une. Plus précisément, montrons que $f(a) = a$.

- (u_n) converge vers a donc (u_{n+1}) également (comme suite extraite)
- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (cf question ***2***) donc $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, par unicité de la limite : $a = f(a)$

□

5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a) Justifier que l'on a : $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum\limits_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.

Démonstration. Remarquons que n et $n+p-1$ sont des entiers naturels. D'après la question ***4.a)***, pour tout $i \in [\![n, n+p-1]\!]$, on a

$$|u_{i+1} - u_i| \leqslant K^i \, |u_1 - u_0|$$

En sommant cette inégalité pour i variant de n à $n+p-1$, on obtient bien

$$\boxed{\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|.}$$

□

b) En déduire l'inégalité :

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

Démonstration. Tout d'abord, par télescopage,

$$u_{n+p} - u_n = \sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
|u_{n+p} - u_n| &= \left| \sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i \right| \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| && \textit{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0| && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\
&\leqslant |u_1 - u_0| \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \\
&\leqslant |u_1 - u_0| \sum_{i=0}^{p-1} K^{n+i} && \textit{(décalage d'indice)} \\
&\leqslant |u_1 - u_0| \, K^n \sum_{i=0}^{p-1} K^i \\
&\leqslant |u_1 - u_0| \, K^n \frac{1 - K^p}{1 - K} && \textit{(somme géométrique de raison } K \neq 1\textit{)}
\end{aligned}$$

□

c) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

Démonstration. On sait que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ donc $\lim\limits_{p \to +\infty} u_{p+n} = a$. On en déduit, par continuité de la fonction valeur absolue, que

$$\lim_{p \to +\infty} |u_{n+p} - u_n| = |a - u_n|$$

D'autre part, $\lim\limits_{p \to +\infty} K^p = 0$ (car $0 < K < 1$) et donc

$$\lim_{p \to +\infty} K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} \times |u_1 - u_0| = \frac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

Finalement, par passage à la limite (lorsque $p \to +\infty$) dans l'inégalité de la question précédente, on obtient

$$\boxed{|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|.}$$

$\square$

6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$, pour tout réel t.

Démonstration. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme inverse de la fonction $g : t \mapsto 1 + \mathrm{e}^t$ qui est elle-même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (en effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t > 0$ donc $1 + \mathrm{e}^t > 0$).
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$$

et

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\frac{\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)^2 - 2\mathrm{e}^t\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)}{(1+\mathrm{e}^t)^4} \\ &= -\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)\frac{1+\mathrm{e}^t-2\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^4} \\ &= -\mathrm{e}^t\frac{1-\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^3} \\ &= \mathrm{e}^t\frac{\mathrm{e}^t-1}{(1+\mathrm{e}^t)^3} \end{aligned}$$

$\square$

b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left|f'(t)\right| \leqslant \frac{1}{4}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que $\mathrm{e}^t > 0$ et $(1+\mathrm{e}^t)^3 > 0$ donc

- $f''(t) > 0 \iff \mathrm{e}^t - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^t > 1 \iff t > 0$ (par stricte croissance de ln sur $]0,1[$)
- $f''(t) = 0 \iff t = 0$

D'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

D'après ce tableau de variations, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{1}{4} \leqslant f'(t) \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{4}$$

et donc

$$\boxed{|f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}.}$$

$\square$

c) En déduire que f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

Démonstration. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' vérifie : $\forall t \in \mathbb{R},\ |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$. D'après l'inégalité des accroissements finis : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}\,|x - y|$$

ce qui prouve bien que

$$\boxed{f \text{ est } \frac{1}{4}\text{-contractante.}}$$

$\square$

d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

Démonstration. La fonction f est $\dfrac{1}{4}$-contractante d'après la question précédente donc on peut appliquer la question ***4.b)***. Il vient alors que la suite (u_n) est convergente. $\square$

e) Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n, la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```
def suite(n):
    u = ------
    for k in range(1, n+1):
        u = -----
    return u
```

Démonstration. La complétion de la fonction s'effectue de la manière suivante :

```
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 1 / (1 + np.exp(u))
    return u
```

$\square$

f) En s'appuyant sur le résultat de la question ***5.c)***, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant 2000/3$.

Démonstration. D'après la question ***5.c)***, pour tout entier naturel n,

$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1 - K} \times |u_1 - u_0|$$

où $K = \frac{1}{4}$, $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a - u_n| \leqslant \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4^n}\frac{2}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\frac{1}{4^n}\frac{2}{3} \leqslant 10^{-3} \iff \frac{2 \times 10^3}{3} \leqslant 4^n \iff \frac{2000}{3} \leqslant 4^n$$

Ainsi, dès que $\frac{2000}{3} \leqslant 4^n$, on a $\frac{1}{4^n}\frac{2}{3} \leqslant 10^{-3}$ et donc $|a - u_n| \leqslant 10^{-3}$, ce qui veut dire que u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près. □

g) En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} 4^n \geqslant \frac{2000}{3} &\iff n\ln(4) \geqslant \ln\left(\frac{2000}{3}\right) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{2000}{3}\right)}{\ln(4)} \\ &\iff n \geqslant \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{2000}{3}\right)}{\ln(4)} \right\rceil \end{aligned}$$

Nous proposons alors le programme suivant :

```
import numpy as np
x = np.log(2000 / 3) / np.log(4)
n = int(np.ceil(x))
print('Une valeur approchée à 10**(-3) près de a est :', suite(n))
```

□

Exercice 9 *(Bonus)* Démontrer le résultat admis en question ***3*** de l'exercice 7.

Démonstration. Venir me voir directement avec vos pistes si vous souhaitez aller au bout de cet exercice. □