Table des matières

1 Introduction aux probabilités discrètes

Considérons le jeu suivant : Alice lance 10 fois un dé à 6 faces. Elle gagne si elle obtient au moins 2 fois le nombre 6, elle perd sinon. Alice a-t-elle plus de chances de gagner ou de perdre ?

Derrière ce jeu se cache une expérience aléatoire. Pour pouvoir répondre à la question il faut faire un calcul de probabilités, mais avant cela il faut *modéliser* cette expérience aléatoire.

On modélise l'expérience aléatoire par un *univers* Ω : il s'agit d'un ensemble qui contient tous les résultats possibles de l'expérience. Ici,

$$\Omega = [\![1,6]\!]^{10} = \{(\omega_1,\dots,\omega_{10}) \mid \forall k \in [\![1,10]\!],\ \omega_k \in [\![1,6]\!]\}$$

A la fin du jeu, Alice a bien obtenu 10 nombres entiers compris entre 1 et 6. De plus ces 10 nombres ont été obtenus dans un certain ordre. L'univers contient toutes les suites ordonnées (et finies) de 10 nombres que peut obtenir Alice. Si Alice obtient la suite de nombres $(x_1,\dots,x_{10})$, on dit que $(x_1,\dots,x_{10})$ est *l'issue* de l'expérience. Chaque fois que l'on répéte l'expérience on obtient une nouvelle issue et on ne peut pas prévoir quelle issue on va obtenir avant d'avoir réalisé l'expérience. Notons par ailleurs que cette expérience possède $6^{10} = 60466176$ issues différentes. C'est beaucoup ![1]

Certaines issues font gagner Alice (par exemple l'issue $\omega = (6,1,4,5,5,2,6,3,3,1)$) tandis que d'autres la font perdre (par exemple l'issue $\omega = (6,1,4,5,5,2,4,3,3,1)$). Ainsi, la phrase « Alice perd au jeu » est une proposition dont la valeur de vérité *dépend* de l'issue de l'expérience. On appelle une telle proposition un *événement*. Formellement, un événement est modélisé par un ensemble. Plus précisément, un événement défini par une proposition P est modélisé par la partie de l'univers Ω contenant toutes les issues rendant vrai la proposition P. Par exemple, l'événement « Alice perd au jeu » n'est rien d'autre que l'ensemble contenant toutes les issues qui font perdre Alice, c'est-à-dire l'ensemble

$$\begin{aligned} F &= \{(\omega_1,\dots,\omega_{10}) \in \Omega \mid \operatorname{Card}(\{k \in [\![1,10]\!] \mid \omega_k = 6\}) \leqslant 1\} \\ &= \{(\omega_1,\dots,\omega_{10}) \in \Omega \mid \forall k \in [\![1,10]\!],\ \omega_k \neq 6 \quad \text{ou} \quad \exists! k \in [\![1,10]\!],\ \omega_k = 6\} \end{aligned}$$

On dit que l'événement F est *réalisé* si l'issue de l'expérience appartient à l'ensemble F. Avec ce vocabulaire, on peut dire qu'un événement est un ensemble contenant toutes les issues qui le réalisent.

En passant des propositions (qui sont des phrases) aux ensembles (qui sont des objets plus abstraits) on perd en simplicité mais on gagne en puissance de calcul. En effet, les opérations génériques sur les ensembles peuvent être utilisées sur les événements :

- l'union (qui remplace le **OU** dans les phrases)
- l'intersection (qui remplace le **ET** dans les phrases)
- le passage au complémentaire (qui remplace la **négation** d'une phrase)

Ces opérations permettent de décrire des événements complexes à partir d'événements plus simples associés à chaque lancer, qu'on appelera des événements *élémentaires*. Pour cette expérience, nous introduisons les événements élémentaires :

$$\forall k \in [\![1,10]\!],\ P_k : \text{« On obtient 6 au lancer numéro } k \text{ »}$$

On peut décrire entièrement l'événement F à l'aide des événements P_k et des opérations ensemblistes précédentes :

$$\begin{aligned} F = \quad & \left(\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_{10}}\right) \\ \cup \quad & \left(P_1 \cap \overline{P_2} \cap \dots \cap \overline{P_{10}}\right) \\ \cup \quad & \left(\overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3} \cap \dots \cap \overline{P_{10}}\right) \\ \cup \quad & \left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3 \cap \overline{P_4} \cap \dots \cap \overline{P_{10}}\right) \\ \vdots \quad & \\ \cup \quad & \left(\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_9} \cap P_{10}\right) \end{aligned}$$

Cette description de F est plus simple que la précédente, au sens où l'on voit clairement ce qui arrive à chaque lancer du dé dans chacun des cas. Cependant, on peut remarquer que l'écriture devient fastidieuse dès qu'il y a beaucoup de lancers.

1. Si l'on considère qu'il faut environ 6 secondes pour effectuer un lancer de dé, l'expérience dure environ 1 minute. Avec cette hypothèse, il faudrait au moins 115 années de jeu ininterrompu à Alice pour avoir une chance d'obtenir toutes les issues. Ce nombre est une borne minimale, mais est bien loin du temps d'attente moyen. En effet, 115 années est le temps qu'il faut pour obtenir toutes les issues si on n'obtient jamais deux fois la même issue, mais une telle hypothèse n'est pas raisonnable !

Ainsi, plutôt que de prendre le point de vue des événements élémentaires associés à chaque lancer, on peut considérer le nombre de 6 obtenus par Alice, noté X, qui lui dépend de l'entiereté de l'expérience. Puisque ce nombre dépend de l'issue de l'expérience, on l'appelle *variable aléatoire*. Formellement, une variable aléatoire est une application $\Omega \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire un processus qui à chaque issue associe un nombre réel. Par exemple,

$$\begin{aligned} X(6,1,4,5,5,2,4,3,3,1) &= 1 \\ X(6,1,4,5,5,2,6,3,3,1) &= 2 \\ X(1,2,3,4,5,6,6,6,6,6) &= 5 \end{aligned}$$

On dit que X *prend la valeur* k si l'issue ω obtenue est telle que $X(\omega) = k$. On notera $[X = k]$ l'événement « X prend la valeur k ». Ainsi, dire que X prend la valeur k revient à dire que l'événement $[X = k]$ est réalisé.

Revenons maintenant à notre événement F : « Alice perd au jeu ». Dire que Alice perd, c'est dire que X prend la valeur 0 ou la valeur 1. On peut donc écrire

$$F = [X = 0] \cup [X = 1]$$

ce qui est nettement plus économe que la description en terme d'événements élémentaires. Cependant, on peut se demander si l'on comprend aussi bien les événements $[X = k]$ que les événements P_k. La réponse est oui lorsque la loi de X est connue, et c'est en particulier le cas lorsque X suit une loi usuelle.

En considérant que toutes les issues sont équiprobables (chaque face du dé à autant de chances d'apparaître que les autres), il vient que X suit la loi binomiale de paramètres 10 (le nombre de lancers) et $\frac{1}{6}$ (la probabilité qu'un dé tombe sur 6). Puisque les événements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ sont incompatibles, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}([X = 0] \cup [X = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X = 1]) \\ &= \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^9 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \times \frac{5^9}{6^{10}} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \\ &= 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \\ &\simeq 0,48 \end{aligned}$$

Ainsi, Alice à environ 48% de chances de perdre et 52% de chances de gagner le jeu.

Pour réussir les exercices de concours, il faut être à l'aise avec la décomposition d'événements complexes en événements élémentaires ou en événements définis à l'aide de variables aléatoires. Lorsque aucune loi usuelle n'est en jeu, ce sont les événements élémentaires qui permettent d'aller au bout du calcul, malgré l'imbrication parfois lourde d'intersections et d'unions. Dans cet exemple, nous aurions pu calculer $\mathbb{P}(F)$ directement via les événements élémentaires en utilisant l'incompatibilité (pour les unions) et l'indépendance des lancers (pour les intersections) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F) = & \quad \left(\mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{P_{10}})\right) \\ & + \left(\mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(\overline{P_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{P_{10}})\right) \\ & + \left(\mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(\overline{P_3}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{P_{10}})\right) \\ & \vdots \\ & + \left(\mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{P_9}) \times \mathbb{P}(P_{10})\right) \\ = & \quad \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10} + 10 \times \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{5}{6}\right)^9 \end{aligned}$$

On retiendra que pour pouvoir effectuer le calcul de probabilité, on essaye d'écrire F comme une union d'événements incompatibles, chacun étant une intersection d'événements indépendants. Si les événements ne sont pas indépendants, on a recours à la formule des probabilités composées.

2 Espaces probabilisables - cas général

2.1 Notion de tribu

Definition 1. On appelle *espace probabilisable* la donnée d'un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où :

1. Ω est un ensemble appelé *univers* (ou univers des possibles). C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
2. $\mathscr{A}$ est une *tribu* (on parle aussi de σ*-algèbre*) sur Ω. Une tribu $\mathscr{A}$ est un ensemble vérifiant :
   (a) $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (les éléments de $\mathscr{A}$ sont des parties de Ω)
   (b) $\Omega \in \mathscr{A}$
   (c) $\forall A \in \mathscr{A},\ \bar{A} \in \mathscr{A}$ (stabilité par passage au complémentaire)
   En particulier, $\varnothing \in \mathscr{A}$.
   (d) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ on a : $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \ \in\ \mathscr{A}$. (stabilité par union dénombrable)

   On peut remplacer *(d)* par : Pour tout $I \subset \mathbb{N}$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements de $\mathscr{A}$ on a :
   $$\bigcup_{i\in I} A_i \ \in\ \mathscr{A}$$
   (stabilité par union au plus dénombrable)

Definition 2.

1. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés des *événements*.
2. L'événement $\varnothing$ (*c'est un élément de* $\mathscr{A}$) est l'*événement impossible*.
3. L'événement Ω est l'*événement certain*.
4. L'événement $\bar{A}$ est appelé *événement contraire* de A.
5. Soit A un événement et soit ω l'issue de l'expérience. On dit que l'événement A est *réalisé* si $\omega \in A$.

Exemple 1 (Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce).
Univers : $\Omega = \{P, F\}$. $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$.
Exemple d'événement A : « la pièce tombe sur Pile ». Alors $\bar{A}$: « la pièce tombe sur Face ».

Exemple 2 (Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé à 6 faces).
Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tribu : $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Exemple d'événement A : « le résultat est pair ». Formellement : $A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2. Le lancer $\omega = 4$ réalise l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.

Exemple 3 (Expérience : on effectue 4 lancers d'un dé à 6 faces).
Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$. Tribu : $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Exemple d'événement A : « le plus grand des résultats est supérieur ou égal à 5 ».
   Ici $A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \Omega \mid \exists k \in [\![1, 4]\!], \omega_k \geqslant 5\}$.
2. Le lancer $\omega = (1, 4, 3, 6)$ réalise l'événement A.

2.2 Lois de Morgan

Proposition 1. *Soient A et B deux événements. Alors :*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements, alors :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$
$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

2.3 Propriétés des tribus

Proposition 2. *Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.*

1. $\varnothing \in \mathscr{A}$.
2. *Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on a :*

$$\boxed{A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \text{ sont des éléments de } \mathscr{A}.}$$

3. *Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{A}$, on a :*

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i \quad \text{sont des éléments de } \mathscr{A}.}$$

2.4 Système complet d'événements

Definition 3. Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Soit $(A, B) \in \mathscr{A}^2$ un couple d'événements. Les événements A et B sont dits *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque 1. Il ne faut pas confondre la notion d'incompatibilité de deux événements avec la notion d'indépendance de deux événements (que l'on verra plus tard).

Definition 4. Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$. La famille $(A_i)_{i\in I}$ est un *système complet d'événements* (sce) si :

1. Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$. *(les événements sont deux à deux incompatibles)*
2. $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Exemple 4. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et soit A un événement. La famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

1. Pour l'expérience d'un lancé d'une pièce (Univers : $\Omega = \{P, F\}$. $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$), les événements A : « le résultat est Pile » et $\bar{A}$: « le résultat est Face » forment un système complet d'évènements.
2. Pour l'expérience d'un lancé de dé à 6 faces ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$), les évènements A : « le résultat est pair » et $\bar{A}$: « le résultat est impair » forment un système complet d'évènements.

Remarque 2. De manière informelle, on retiendra que toute disjonction de cas donne un système complet d'événements.

3 Espace probabilisé

3.1 Probabilité

Definition 5. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

1. Une *probabilité* est une application $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0, 1]$ telle que :
   (a) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$
   (b) $\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$ *(la probabilité de l'événement certain est 1)*
   (c) Pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles ($\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$), on a :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)}$$

   (cette propriété est appelée σ-additivité)
2. Lorsqu'une telle application existe, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé *espace probabilisé*.

Definition 6. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Un événement A est dit *négligeable* ou *quasi-impossible* si : $\mathbb{P}(A) = 0$.

2. Un événement A est dit *quasi certain* si : $\mathbb{P}(A) = 1$.
3. Soit $\mathcal{P}$ une propriété et soit $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ vérifie la propriété $\mathcal{P}\}$. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors on dit que la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée *presque sûrement*.

Remarque 3. Avec cette définition, les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. L'événement impossible $\varnothing$ est négligeable (quasi-impossible).
2. L'événément certain Ω est quasi-certain.
3. Attention ! A quasi certain ($\mathbb{P}(A) = 1$) n'implique pas $A = \Omega$.
4. Attention ! A quasi-impossible ($\mathbb{P}(A) = 0$) n'implique pas $A = \varnothing$.

Exemple 5. On considère l'expérience aléatoire consistant en 1 lancer d'un dé à 6 faces. L'univers associé est $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On munit l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{2}$ (attention, $\mathbb{P}$ n'est pas la probabilité uniforme habituelle).

1. Obtenir un résultat inférieur à 4 est un événement A quasi-impossible. $A = \{1, 2, 3, 4\} \neq \varnothing$ et $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. Obtenir un résultat supérieur ou égal à 5 est un événement B quasi-certain. $B = \{5, 6\} \neq \Omega$ et $\mathbb{P}(B) = 1$.

On retiendra donc que la notion d'événement quasi-certain (resp. quasi-impossible) est dépendante de la probabilité $\mathbb{P}$ choisie.

3.2 Propriétés des probabilités

Proposition 3. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A, B, C des événements ($(A, B, C) \in \mathscr{A}^3$).*

1. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *donc* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
2. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ *(l'application $\mathbb{P}$ est croissante)*
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. *Formule du crible :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) & = & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - & \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{array}}$$

3.3 Le cas de l'équiprobabilité (rappels sur le cas Ω fini)

Lorsque l'on travaille sur un univers fini, il est fréquent de considérer l'application probabilité pour laquelle toutes les issues ont la même probabilité de se produire. Rappelons la définition de cette application.

Théoreme 4. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. Ainsi $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.*

1. *Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires* i.e. *telle que :*

$$\boxed{\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}}$$

2. *Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :*

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0, 1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\textit{nombre d'issues réalisant } A}{\textit{nombre d'issues de l'expérience}} \end{array}}$$

Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à des calculs de dénombrement.

Exemple 6. Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On considère l'expérience consistant à tirer une boule dans cette urne. On fait l'hypothèse de l'équiprobabilité des résultats.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ? Notons A : « tirer une boule rouge ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{10}$$

2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ? Notons B : « tirer une boule noire ». Alors :
$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$$

Exemple 7. On effectue 6 lancers d'un dé cubique équilibré. L'univers est ici $\Omega = [\![1,6]\!]^6$. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = 6^6$. Il est muni de la probabilité uniforme (dé non truqué). On considère les événements : A : « On n'obtient aucun 6 lors des lancers » ; B : « On obtient les 6 chiffres (dans un ordre quelconque) lors des lancers » Calculons la probabilité de ces deux événements.

On a :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5^6}{6^6} = \frac{15625}{46656} \simeq 0,33$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{3\times 3\times 6^2} = \frac{5}{324} \simeq 0,015$$

Exemple 8. On considère un jeu de 32 cartes. L'expérience consiste à effectuer un tirage (simultané) de 5 cartes. L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Autrement dit, Ω contient toutes les mains possibles. Ainsi, $\text{Card}\,\Omega = \binom{32}{5}$. Les tirages étant considérés comme équiprobables, l'univers Ω est muni de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage contenant un carré ?

   Démonstration. On note A l'événement : « le tirage obtenu contient un carré ». Un 5-tirage (une main de 5 cartes) réalisant A est entièrement déterminé par :

   - le choix de la hauteur du carré : $\binom{8}{1} = 8$ possibilités.
   - le choix de la carte restante : $\binom{28}{1} = 28$ possibilités. *(la carte restante n'est pas une des* 4 *cartes du carré)*

   On a donc :
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{8\times 28}{\frac{32!}{5!\ 27!}} = \frac{1}{31\times 29}$$

   Ainsi, la probabilité de A est de $\frac{1}{899} = 0,0011 = 0,11\%$. ☐

2. Et celle d'obtenir un tirage contenant exactement un pique ?

   Démonstration. On note B : « le tirage obtenu contient exactement un pique ». Un 5-tirage (une main de 5 cartes) réalisant B est entièrement déterminé par :

   - le choix de la hauteur du pique : $\binom{8}{1} = 8$ possibilités.
   - le choix des 4 cartes restantes : $\binom{24}{4}$ possibilités. *(les* 4 *cartes restantes ne sont pas des piques)*

   Ainsi :
$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{8\times\frac{24!}{4!\ 20!}}{\frac{32!}{5!\ 27!}} = \frac{23\times 11\times 3}{31\times 29\times 2}$$

   La probabilité de B est donc de $\frac{23\times 11\times 3}{31\times 29\times 2} \simeq 0,42 = 42\%$. ☐

4 Probabilité conditionnelle

4.1 Définition

Théoreme 5. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* A *un événement tel que* $\mathbb{P}(A) \neq 0$. *On considère l'application* $\mathbb{P}_A$ *suivante :*
$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_A & : & \mathscr{A} & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & \boxed{\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}} \end{array}$$

1. *$\mathbb{P}_A$ est une probabilité, appelée* probabilité conditionnelle *relative à A.*
2. *Pour tout événement B, $\mathbb{P}_A(B)$ désigne la* probabilité de B sachant A.

Exemple 9. On considère le résultat d'un dé 6 équilibré. L'univers est donc $[\![1,6]\!]$ et est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$. On considère les événements suivants. A : « on obtient un nombre inférieur ou égal à 3 » ; B : « on obtient 5 » et C : « on obtient 2 » Calculons $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_A(C)$.

$\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé. Sachant que le résultat du tirage est inférieur à 3, il n'y a aucune chance pour que le résultat soit égal à 5. On retrouve ce résultat par calcul :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = 0$$

Concernant $\mathbb{P}_A(C)$, deux manières de voir les choses.

1. On peut tout d'abord réaliser le calcul :

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

2. On peut aussi voir ce résultat comme suit. Si A est réalisé, c'est que le résultat du lancer est un élément de $\{1,2,3\}$. Les résultats étant équiprobables, la probabilité de tirer 2 avec cet univers des possibles est $\frac{1}{3}$.

Proposition 6. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Pour tout événement B et tout événement C, on a :*

1. $\mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ *donc* $\mathbb{P}_A(\varnothing) = 0$
2. $\mathbb{P}_A(B \setminus C) = \mathbb{P}_A(B \setminus (B \cap C)) = \mathbb{P}_A(B) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$
3. $B \subset C \implies \mathbb{P}_A(B) \leqslant \mathbb{P}_A(C)$
4. $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$
5. *Si (B_n) suite d'événements , on a :*

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_A\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$$

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_A\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$$

4.2 Formules liées à la probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle étant posée, on s'intéresse maintenant à comment l'utiliser pour nous aider à réaliser des calculs de probabilité.

4.2.1 Formule des probabilités composées

Ce premier résultat stipule que la donnée de $\mathbb{P}_A(B)$ nous enseigne la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Théoreme 7. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements.*

1. *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on peut écrire :* $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$
2. *Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on peut écrire :* $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A)}$
3. *On a alors, si $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \neq 0$:* $\boxed{\mathbb{P}(B)\ \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}$

On peut généraliser le résultat précédent.

Théoreme 8 (Formule des probabilités composées)**.** *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $m \geqslant 2$ *un entier. Soit* $(A_1, \ldots, A_m)$ *une famille finie d'événements de* $\mathscr{A}$*. On suppose :* $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \neq 0$*. On a alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}}(A_m)}$$

En particulier :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)$$
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)$$

Exercice 1 : Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules (sans remise).

1. Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient blanches ?

   Démonstration. On note B_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche ».
   Sous réserve que l'on puisse écrire chacun des éléments, la formule des probabilités composées donne :

   $$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$$

   On a : $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{5}{13}$ $(\neq 0)$.

   Le terme $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$ représente la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{4}{12}$.
   On a alors :

   $$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{5 \times 4}{13 \times 12} \neq 0$$

   et on peut calculer $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$, la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant 3 blanches et 8 noires. D'où $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \dfrac{3}{11}$.
   On a donc :

   $$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5 \times 4 \times 3}{13 \times 12 \times 11} = \frac{5}{11 \times 13} \simeq 0,035$$

   □

2. Quelle est la probabilité qu'une boule noire apparaisse pour la première fois au deuxième tirage ?

   Démonstration. On note N_i l'événement : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ». Avec les mêmes notations, et sous réserve que l'on puisse écrire chacun des termes, on a :

   $$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(N_2)$$

   Le terme $\mathbb{P}_{B_1}(N_2)$ représente la probabilité de tirer une boule noire dans une urne contenant 4 blanches et 8 noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \dfrac{8}{12}$.
   On a donc :

   $$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{5 \times 8}{13 \times 12} = \frac{5 \times 2}{13 \times 3} = \frac{10}{39} \simeq 0,256$$

   □

4.2.2 Formule des probabilités totales

Théoreme 9 (Formule des probabilités totales)**.** *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un système complet d'événements de* $\mathscr{A}$*. Pour tout événement* B*, on a :*

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}$$

(on teste B par rapport à chaque A_i). Si on suppose de plus : $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$, *alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

(Cela fait penser à une disjonction de cas)

Cas particulier du système complet $(A, \bar{A})$. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A est un événement ($A \in \mathscr{A}$). La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements. Pour tout $B \in \mathscr{A}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}$$

Si de plus $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\ \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}$$

Exemple 10. On considère de nouveau l'urne contenant 5 boules blanches et 8 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules (sans remise).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage ? La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements ($\bar{B_1} = N_1$). Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)\ \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{5}{13}\ \frac{8}{12} + \frac{8}{13}\ \frac{7}{12} \\ &= \frac{5 \times 2 + 2 \times 7}{3 \times 13} = \frac{24}{3 \times 13} = \frac{8}{13} \end{aligned}$$

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?
Il suffit de remarquer : $B_2 = \bar{N_2}$. On a donc directement :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\bar{N_2}) = 1 - \mathbb{P}(B_2) = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13}$$

(évidemment, on pouvait de nouveau appliquer la FPT mais ce n'est pas la solution adaptée)

Exercice 2 : On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
2. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.
3. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Remarque 4. La difficulté de cet exercice réside dans le fait que la modélisation mathématique est absente. On insiste ici sur le raisonnement à mener qui est assez naturel et très fréquent dans les exercices.

La probabilité de tirer 2 boules blanches dépend de l'urne dans laquelle s'effectue le tirage :

- soit on tire dans l'urne 1 et dans ce cas ...
- soit on tire dans l'urne 2 et dans ce cas ...
- ...
- soit on tire dans l'urne n et dans ce cas ...

On voit clairement apparaître un raisonnement par disjonction de cas, ce qui signifie qu'il y a un système complet d'événements sous-jacent. L'idée ici est de tester l'événement « obtenir 2 boules » suivant chacun des cas listés précédemment. Cela correspond à utiliser la formule des probabilités totales. Il n'y a plus qu'à formaliser ces idées.

Démonstration. On note A_k : « le tirage s'effectue dans l'urne k » (pour $k \in [\![1,n]\!]$).
On note B : « on tire deux boules blanches ».

1. La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
   On en déduit, par la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) & \text{car } \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n} \neq 0\end{aligned}$$

   Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) \;=\; \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} \;=\; \frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} \;=\; \frac{k!}{2!(k-2)!} \times \frac{2!(n-2)!}{n!} \;=\; \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

   En effet, si A_k est réalisé, le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. Un 2-tirage contenant 2 boules blanches est entièrement déterminé par : le choix des 2 boules blanches parmi les k présentes : $\binom{k}{2}$ possibilités. Il y a donc $\binom{k}{2}$ tels 2-tirages.
   Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k\,(k-1)}{n\,(n-1)} = \frac{1}{n^2\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k\,(k-1) \\ &= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\ &= \frac{1}{n^2\,(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)} \left((2n+1) - 3\right) = \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)} 2(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)}{6\,n^2\,(n-1)} 2(n-1) = \frac{1}{3} \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

2. Par le même raisonnement, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) & \text{car } \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n} \neq 0\end{aligned}$$

   Dans le cas d'un tirage successif avec remise, on a, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) \;=\; \frac{k \times k}{n \times n}$$

   En effet, si A_k est réalisé, le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
   Un 2-tirage contenant 2 boules blanches est entièrement déterminé par :
   - le choix de la première boule blanche tirée parmi les k présentes : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
   - le choix de la deuxième boule blanche tirée parmi les k présentes : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.

   Il y a donc k^2 tels 2-tirages.On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k \times k}{n \times n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} \frac{n+\frac{1}{2}}{n}\end{aligned}$$

3. $\dfrac{1}{3}\,\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{3}$

   $\dfrac{1}{3}\,\dfrac{n+1}{n}\,\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{n}{n}\,\dfrac{n}{n} = \dfrac{1}{3}$

   Dans les deux cas, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{3}$.

□

4.2.3 Formule de Bayes

Théoreme 10 (Formule de Bayes)**.** *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de $\mathscr{A}$. Pour tout $(A,B) \in \mathscr{A}^2$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$:*

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}}$$

(on peut notamment appliquer cette formule pour $A = A_j$ où $j \in [\![1,n]\!]$). Si on suppose de plus : $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\ \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\ \mathbb{P}_{A_i}(B)}}$$

Cas particulier du système complet $(A, \bar{A})$. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A est un événement ($A \in \mathscr{A}$). La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements. Pour tout $B \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Si de plus $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\ \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\ \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)}}$$

Exemple 11. On considère de nouveau l'urne contenant 5 boules blanches et 8 boules noires (tirage de 3 boules sans remise). Le second tirage ayant donné une boule blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements ($\bar{B_1} = N_1$). Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) \\
&= \mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(N_1)\ \mathbb{P}_{N_1}(B_2) && \text{car } \mathbb{P}(B_1) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(N_1) \neq 0 \\
&= \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{5}{12} \\
&= \frac{5}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{13} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{13 \times 3}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{B_2}(B_1) &= \frac{\mathbb{P}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} = \frac{\frac{5}{13} \times \frac{4}{12}}{\frac{15}{13\times 3}} \\
&= \frac{5 \times 4}{13 \times 12} \times \frac{13 \times 3}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

Exercice 4 : On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

1. si une personne est malade, le test est positif à 99%,
2. si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de $0,1\%$ (on parle de *faux positif*).

Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test s'est révélé négatif soit en réalité malade ?

5 Indépendance en probabilité

5.1 Indépendance de deux événements

Definition 7. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Deux événements A et B sont dits *indépendants* (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

Remarque 5. Il ne faut pas confondre cette propriété, **liée à une probabilité** $\mathbb{P}$ avec celle d'incompatibilité qui ne dépend que des événements ! Deux événements A et B incompatibles ne sont en général pas indépendants.

Théoreme 11. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements.*

1. *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors on a :*

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)}$$

(Savoir que A a été réalisé n'influe pas sur la probabilité que B soit réalisé)

2. *Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors on a :*

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)}$$

Remarque 6. La notion d'indépendance n'est pas une notion intrinsèque aux événements : elle dépend fortement de la probabilité choisie. Autrement dit, deux événements peuvent être indépendants pour une probabilité et dépendants pour une autre.

Exemple 12. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé 6 :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- On note A : « le résultat obtenu est inférieur à deux ».
- On note B : « le résultat obtenu est supérieur à quatre ».

On cherche à déterminer si A et B sont indépendants suivant deux probabilités différentes.

Cas 1 : dé équilibré. L'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est donc muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}^1$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) = \ldots = \mathbb{P}^1(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

On a $\mathbb{P}^1(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues totales}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \neq 0$.

- On peut donc calculer $\mathbb{P}^1_A(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2. On a donc $\mathbb{P}^1_A(B) = 0$.
- Or $\mathbb{P}^1(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \neq \mathbb{P}^1_A(B)$.

Ainsi, les événements A et B sont « dépendants » pour la probabilité $\mathbb{P}^1$ (bien qu'ils soient incompatibles !).

Cas 2 : dé pipé. Le dé considéré permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1. Autrement dit, l'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}^2$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^2(\{1\}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^2(\{2\}) = \ldots = \mathbb{P}^2(\{6\}) = 0$$

- On a $\mathbb{P}^2(A) = 1$, on peut donc calculer $\mathbb{P}^2_A(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2. On a donc encore $\mathbb{P}^2_A(B) = 0$.
- Or, étant donné le dé considéré, la probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 est $\mathbb{P}^2(B) = 0 = \mathbb{P}^2_A(B)$.

Ainsi, les événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^2$.

Proposition 12. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements indépendants.*

1. *Les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants.*
2. *Les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants.*
3. *Les événements $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.*

Exercice 5 : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Supposons $\mathbb{P}(A) = 0$. Démontrer que, pour tout $B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.
2. Supposons $\mathbb{P}(A) = 1$. Démontrer que, pour tout $B \in \mathscr{A}$, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

Démonstration. 1. On a $A \cap B \subset A$. On en déduit donc que : $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A) = 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, ce qui démontre que A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

2. Remarquons que $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$ donc $\overline{A}$ et B sont indépendants d'après la première question. D'après la proposition du cours, il vient que A (le complémentaire de $\overline{A}$) et B sont également indépendants.

□

5.2 Indépendance mutuelle d'une famille d'événements

Definition 8. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$. On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont *mutuellement indépendants* (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si pour tout ensemble fini $J \subset I$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_i\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Cas particulier. Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si :

- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2)$
- et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_3)$
- et $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}(A_3)$
- et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}(A_2)\ \mathbb{P}(A_3)$

Exemple 13. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé 6. On définit 3 événements :

- On note A : « le premier chiffre est pair ».
- On note B : « le second chiffre est impair ».
- On note C : « la somme des chiffres est paire ».

Démontrons que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

- On a $A \cap B \cap C = \varnothing$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Or $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Théoreme 13. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements. Notons $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (autrement dit $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$). Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.*

Exemple 14. Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ sont indépendants.

6 Complément hors-programme : théorème de la limite monotone

Théoreme 14 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements de* $\mathscr{A}$*.*

1. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante (*i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$*) alors :*
   (a) *la suite* $(\mathbb{P}(A_n))$ *converge.*
   (b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)}$
2. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante (*i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$*) alors :*
   (a) *la suite* $(\mathbb{P}(A_n))$ *converge.*
   (b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)}$

Théoreme 15. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements de* $\mathscr{A}$*. (on ne suppose pas ici que la suite* (A_n) *est monotone !)*

1. (a) *La suite* $\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\right)_n$ *converge.*
   (b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)}$
2. (a) *La suite* $\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)\right)_n$ *converge.*
   (b) $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)}$

Remarque 7.

1. Il faut bien noter que l'on ne suppose pas, dans ce dernier résultat, que la suite (A_n) est croissante. Pour pouvoir utiliser le théorème de la limite monotone on a donc construit la suite auxiliaire $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$ qui est une suite croissante d'événements.
2. L'intérêt de ces théorèmes est de ramener un calcul de probabilité d'une intersection (resp. union) infinie au calcul de probabilité d'une intersection (resp. union) finie.

Exemple 15. On considère l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un dé à 6 faces équilibré. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants (on reviendra là dessus dans la suite). Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 lors de la partie ?

Tous les raisonnements sur les exercices de probabilité commencent par :

1. une formalisation avec nommage des événements les plus basiques,
2. une décomposition de l'événement dont on cherche la probabilité en fonction des événements précédents.

Dans le cadre de cet exercice :

1. On note, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, F_i : « on obtient 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
2. Notons A : « on n'obtient que des 6 lors de la partie ». On a alors :

$$A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$$

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$$

Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\right)$. Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) && \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \left(\text{car } \frac{1}{6} \in\ ]-1,1[\right) \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(A) = 0$. En particulier, l'événement A est négligeable.