On considère une urne qui contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages d'une boule avec remise en suivant le protocole suivant : à chaque tirage, on note la couleur de la boule obtenue et on rajoute dans l'urne une boule supplémentaire de la même couleur.

- On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$B_k : \text{« on obtient une boule blanche au } k^{\text{e}} \text{ tirage »}$$
$$N_k : \text{« on obtient une boule noire au } k^{\text{e}} \text{ tirage »}$$

- On note T la variable aléatoire égale au rang du premier tirage où l'on obtient une boule blanche.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n (resp. Y_n) la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches (resp. noires) dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage. Par convention, on pose $X_0 = 1$ et $Y_0 = 1$.

Exemple : si l'issue est $\omega = (N, B, B, N, B, \dots)$, alors

- $T(\omega) = 2$
- $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 2$, $X_3(\omega) = 3$, $X_4(\omega) = 3$, $X_5(\omega) = 4$
- $Y_1(\omega) = 2$, $Y_2(\omega) = 2$, $Y_3(\omega) = 2$, $Y_4(\omega) = 3$, $Y_5(\omega) = 3$

Partie A : Etude de la variable aléatoire T

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} N_k\right) = \frac{1}{n+1}$$

On rappelle que $\bigcap_{k=1}^{0} N_k = \Omega$. La formule précédente est-elle encore valable pour $n = 0$?

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées, sous réserve d'existence :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} N_k\right) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\dots\mathbb{P}_{N_1\cap\dots\cap N_{n-1}}(N_n)$$

- L'urne contient initialement 1 boule blanche et 1 boule noire. Par équiprobabilité : $\mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}$
- Soit $j \in [\![2, n]\!]$. Si l'événement $N_1 \cap \dots \cap N_{j-1}$ est réalisé, alors c'est que l'on a tiré une boule noire à chacun des $j-1$ premiers tirages. Dans ce cas, le j^{e} tirage s'effectue dans une urne contenant 1 boule blanche et $1 + j - 1 = j$ boules noires. Par équiprobabilité : $\mathbb{P}_{N_1\cap\dots\cap N_{j-1}}(N_j) = \frac{j}{j+1}$.

Ainsi, tous les termes du produit sont bien définis et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} N_k\right) &= \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{n}\frac{j}{j+1} \\
&= \prod_{j=1}^{n}\frac{j}{j+1} \\
&= \frac{1}{n+1} && \text{par télescopage}
\end{aligned}$$

De plus, on a :

- $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{0} N_k\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\frac{1}{0+1} = 1$

donc la formule reste valable pour $n = 0$. □

2. Expliciter $T(\Omega)$.

Démonstration. On doit faire au moins un tirage pour obtenir une boule blanche, donc $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Réciproquement, si $k \in \mathbb{N}^*$, il est possible d'obtenir, dans cet ordre : $k-1$ boules noires puis une boule blanche. Dans ce cas, T prendra la valeur k et donc $k \in T(\Omega)$. Finalement : $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$. ☐

3. Soit $n \in T(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}([T = n])$. *(On pourra utiliser la question 1)*

Démonstration. Soit $n \in T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
[T = n] \text{ est réalisé} &\iff \text{On obtient une boule blanche, pour la première fois, au } n^{\text{e}} \text{ tirage} \\
&\iff \begin{array}{l}\text{On obtient des boules noires aux tirages numéros } 1, 2, \ldots, n-1 \text{ et} \\ \text{une boule blanche au } n^{\text{e}} \text{ tirage}\end{array} \\
&\iff N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap B_n \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T = n]) &= \mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap B_n) \\
&= \mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}) \mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}}(B_n) \qquad \text{car } \mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}) \neq 0
\end{aligned}$$

En effet, d'après la question 1, on a $\mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}) = \frac{1}{n}$.
Si l'événement $N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}$ est réalisé, alors c'est que l'on a tiré une boule noire à chacun des $n-1$ premiers tirages. Dans ce cas, le n^{e} tirage s'effectue dans une urne contenant 1 boule blanche et $1 + n - 1 = n$ boules noires. Par équiprobabilité : $\mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{n+1}$.
Ainsi : $\boxed{\mathbb{P}([T = n]) = \frac{1}{n(n+1)}}$. ☐

4. Si l'on appelle succès l'événement « on obtient une boule blanche » (défini pour un tirage singulier), alors la variable T est égale au rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli. Expliquer brièvement pourquoi T ne suit pas une loi géométrique.

Démonstration. Les tirages n'étant pas indépendants, le raisonnement proposé ne permet pas de conclure que T suit une loi géométrique. ☐

5. La variable T admet-elle une espérance ?

Démonstration. La variable T est discrète infinie, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc T admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\mathbb{P}([T = n])$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence ici car il s'agit d'une série à termes positifs.
On a :

- $n\mathbb{P}([T = n]) = n\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$
- pour tout $n \geqslant 1$, $n\mathbb{P}([T = n]) \geqslant 0$ et $\frac{1}{n} \geqslant 0$
- la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann

Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum n\mathbb{P}([T = n])$ diverge. Donc T n'admet pas d'espérance. ☐

6. Simulation informatique :
   (a) On rappelle que `rd.random()` simule une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Rappeler une commande **Python** qui permette de simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

   Démonstration. On peut simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre p en appelant la commande

   ```
   rd.random() < p
   ```

   ☐

(b) Soit $n \in T(\Omega)$. Montrer que si T prend la valeur n, alors l'urne contient exactement n boules noires à l'issue du n^{e} tirage.

Démonstration. Supposons que T prend la valeur n. Alors c'est que l'on a tiré des boules noires lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n^{e} tirage. On a donc rajouté $n-1$ boules noires et 1 boule blanche dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage. L'urne contenant initialement 1 boule noire et 1 boule blanche, on peut conclure que l'urne contient $1+n-1=n$ boules noires à l'issue du n^{e} tirage. □

(c) Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire T :

```
import numpy.random as rd
def simulT():
    u = 1 # nombre de boules blanches
    v = 1 # nombre de boules noires
    while  rd.random() < v/(u+v)  :
        v = v+1
    return  v
```

Démonstration. Tirer une boule noire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \mathtt{v}/(\mathtt{u}+\mathtt{v})$. On doit continuer l'expérience tant qu'on tire une boule noire. On s'arrête quand on tire une boule blanche. On doit alors renvoyer la valeur prise par T, qui n'est autre que le nombre de boules noires d'après la question précédente, on renvoie alors v. □

(d) Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} N_k\right) = 0$. En déduire que le programme précédent ne peut pas faire de boucle infinie.

Démonstration. D'après le théorème de la limite monotone :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} N_k\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} N_k\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} && \text{(cf question 1)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité de ne tirer que des boules noires (pendant une éternité) au cours de l'expérience est nulle. On va donc nécessairement tomber sur une boule blanche au bout d'un moment, ce qui correspond à l'arrêt de la boucle while. Le programme précédent ne peut donc pas faire de boucle infinie. □

Partie B : Etude des variables aléatoires X_n

7. Reconnaître la loi de X_1.

Démonstration. L'urne contient initialement 1 boule noire et 1 boule blanche. Lors du premier tirage, on peut :
- soit tirer une boule noire, auquel cas on rajoute une boule noire dans l'urne et X_1 prend la valeur 1
- soit tirer une boule blanche, auquel cas on rajoute une boule blanche dans l'urne et X_1 prend la valeur 2

Ainsi : $\boxed{X_1(\Omega) = \{1,2\}}$.
De plus, par équiprobabilité : $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([X_1 = 2]) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$.
On reconnaît alors que $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])}$. □

8. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ »
Initialisation : d'après la question précédente, $X_1(\Omega) = \{1,2\} = [\![1,2]\!]$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. On suppose que X_n prend la valeur k. Au $(n+1)^{\text{e}}$ tirage,

- soit on tire une boule noire, auquel cas on rajoute une boule noire dans l'urne et X_{n+1} prend la valeur k
- soit on tire une boule blanche, auquel cas on rajoute une boule blanche dans l'urne et X_{n+1} prend la valeur $k+1$

On en déduit que

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\Omega) &= [\![1, n+1]\!] \cup [\![2, n+2]\!] \\ &= [\![1, n+2]\!] \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a montré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$. □

9. Simulation informatique :

(a) Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X_n :

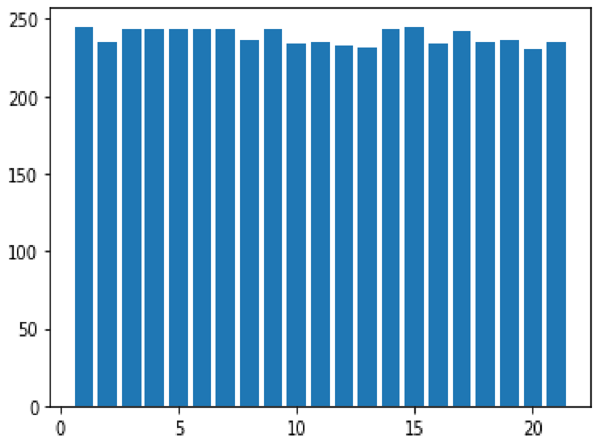
```
def simulX(n):
    u = 1 # nombre de boules blanches
    v = 1 # nombre de boules noires
    for i in range(n):
        if  rd.random() < v/(u+v)  :
            v = v+1
        else:
            u = u+1
    return u
```

Démonstration. Lors de la boucle `for`, on simule les `n` premiers tirages. Pour chaque tirage, si on obtient une boule noire alors il faut augmenter le nombre de boules noires de 1 et si on obtient une boule blanche alors il faut augmenter le nombre de boules blanches de 1. □

(b) On compile le programme suivant :

```
n = 20
N = 5000
E = np.zeros(n+1)
for i in range(N):
    E[SimulX(n)-1] = E[SimulX(n)-1] + 1
plt.bar(range(1,n+2),E)
```

On obtient alors le tracé :



Que peut-on conjecturer sur la loi de X_{20} ? Généraliser la conjecture pour la loi de X_n.

Démonstration. Le tracé obtenu est l'histogramme de la loi de X_{20}, obtenu en 5000 simulations. On remarque que chaque valeur est prise à peu près autant de fois que les autres. On conjecture alors que $X_{20} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 21]\!])$. Plus généralement, on conjecture que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$. □

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Combien de boules sont contenues dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage ?

Démonstration. L'urne contient initialement 2 boules. A chaque tirage, on rajoute une boule. Ainsi, l'urne contient $n+2$ boules à l'issue du n^{e} tirage. □

(b) En déduire une relation entre X_n et Y_n.

Démonstration. $X_n + Y_n$ est la somme du nombres de boules blanches et du nombres de boules noires contenues dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage. Il n'y a pas d'autres types de boules dans l'urne. Ainsi, $X_n + Y_n$ est égal au nombre de boules qui sont contenues dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage. On en déduit que $\boxed{X_n + Y_n = n+2}$. □

(c) Expliquer, sans faire de calculs, pourquoi X_n et Y_n suivent la même loi.

Démonstration. Il y a autant de boules blanches que de boules noires dans l'urne initialement et les couleurs jouent un rôle symétrique dans le protocole de l'expérience. On en déduit que X_n et Y_n suivent la même loi. □

(d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration. Tout d'abord, les v.a.r. X_n et Y_n sont finies dont admettent une espérance. On en déduit que $X_n + Y_n$ admet également une espérance.
D'une part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n + Y_n) &= \mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(Y_n) && \text{par linéarité} \\ &= 2\mathbb{E}(X_n) && \text{car } X_n \text{ et } Y_n \text{ suivent la même loi} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n + Y_n) &= \mathbb{E}(n+2) \\ &= n+2 \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+2}{2}}$. □

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soient $i \in X_n(\Omega)$ et $j \in X_{n+1}(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$ en distinguant trois cas.

Démonstration. Si l'événement $[X_n = i]$ est réalisé, alors c'est que l'urne contient i boules blanches et $n+2-i$ boules noires à l'issue du n^{e} tirage. Dans ce cas, à l'issue du $(n+1)^{\text{e}}$ tirage, l'urne contiendra soit i boules blanches (si on tire une boule noire) soit $i+1$ boules blanches (si on tire une boule blanche). On en déduit la disjonction de cas suivante :

- Si $i = j$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) &= \mathbb{P}_{[X_n=i]}(N_{n+1}) \\ &= \frac{n+2-i}{n+2} && \text{par équiprobabilité} \\ &= \frac{n+2-j}{n+2} \end{aligned}$$

- Si $i = j-1$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) &= \mathbb{P}_{[X_n=i]}(B_{n+1}) \\ &= \frac{i}{n+2} && \text{par équiprobabilité} \\ &= \frac{j-1}{n+2} \end{aligned}$$

- Si $i \notin \{j-1, j\}$, alors

$$\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = 0$$

□

(b) En déduire que, pour tout $j \in [\![2, n+1]\!]$,

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = j]) = \mathbb{P}([X_n = j-1])\frac{j-1}{n+2} + \mathbb{P}([X_n = j])\frac{n+2-j}{n+2}$$

et vérifier que cette formule reste valable pour $j = 1$ et $j = n+2$.

Démonstration. Soit $j \in [\![2, n+1]\!]$. La famille $([X_n = k])_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'événements car $X_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = j]) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}([X_{n+1} = j] \cap [X_n = i]) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}([X_n = i])\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) && \forall i \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = i]) \neq 0 \\
&= \mathbb{P}([X_n = j-1])\mathbb{P}_{[X_n=j-1]}([X_{n+1} = j]) && j-1 \in [\![1, n+1]\!] \textit{ et } j \in [\![1, n+1]\!] \\
&\quad + \mathbb{P}([X_n = j])\mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_{n+1} = j]) \\
&= \mathbb{P}([X_n = j-1])\tfrac{j-1}{n+2} + \mathbb{P}([X_n = j])\tfrac{n+2-j}{n+2} && \textit{cf question précédente}
\end{aligned}$$

Pour $j = 1$, on a

- D'une part, $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} N_k\right) = \dfrac{1}{n+2}$
- D'autre part, $\mathbb{P}([X_n = 0])\dfrac{0}{n+2} + \mathbb{P}([X_n = 1])\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$

et pour $j = n+2$, on a

- D'une part, $\mathbb{P}([X_{n+1} = n+2]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) = \dfrac{1}{n+2}$
- D'autre part, $\mathbb{P}([X_n = n+1])\dfrac{n+1}{n+2} + \mathbb{P}([X_n = n+2])\dfrac{0}{n+2} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$

donc la formule obtenue reste valable pour $j = 1$ et $j = n+2$. □

12. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$ »
Initialisation : d'après la question 7, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$ donc, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = i]) = \frac{1}{n+1}$.
On sait déjà que $X_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$. Soit $j \in [\![1, n+2]\!]$.

- Si $j \in [\![2, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = j]) &= \mathbb{P}([X_n = j-1])\frac{j-1}{n+2} + \mathbb{P}([X_n = j])\frac{n+2-j}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{j-1}{n+2} + \frac{1}{n+1}\frac{n+2-j}{n+2} && \text{car } j-1 \in [\![1, n+1]\!] \text{ et } j \in [\![1, n+1]\!] \\
&= \frac{j-1+n+2-j}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

- Si $j = 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = j]) &= \mathbb{P}([X_n = 0])\frac{0}{n+2} + \mathbb{P}([X_n = 1])\frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

- Si $j = n+2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_{n+1} = j]) &= \mathbb{P}([X_n = n+1])\frac{n+1}{n+2} + \mathbb{P}([X_n = n+2])\frac{0}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a montré par récurrence : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])}$. □

13. Montrer que : $\frac{X_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} U$ où $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Démonstration. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $Y_n = \frac{X_n}{n+1}$. On a

$$\begin{aligned}Y_n(\Omega) &= \left\{\frac{x}{n+1} \mid x \in X_n(\Omega)\right\} \\ &= \left\{\frac{k}{n+1} \mid k \in [\![1, n+1]\!]\right\}\end{aligned}$$

On remarque en particulier que $Y_n(\Omega) \subset]0,1]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leqslant 0$, alors
$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
- Si $x \geqslant 1$, alors
$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
- Si $0 < x < 1$, alors
$$\begin{aligned}F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X_n \leqslant x(n+1)]) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor x(n+1)\rfloor} \mathbb{P}([X_n = k]) && \text{car } X_n \text{ est à valeurs entières non nulles} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor x(n+1)\rfloor} \frac{1}{n+1} && \text{car } X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!]) \\ &= \frac{\lfloor x(n+1)\rfloor}{n+1}\end{aligned}$$
Or, $x(n+1) - 1 < \lfloor x(n+1)\rfloor \leqslant x(n+1)$ donc $x - \frac{1}{n+1} < \frac{\lfloor x(n+1)\rfloor}{n+1} \leqslant x$ et $x - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ donc, par théorème d'encadrement,
$$F_{Y_n}(x) = \frac{\lfloor x(n+1)\rfloor}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

Finalement, on a montré que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_U(x)$$

donc $\boxed{Y_n = \frac{X_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} U}$. □