DS1 (barème)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1 (librement inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A-2I)(A-I)^2$.

- 1 pt : $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $(A-2I)(A-I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

- 1 pt : $(A-2I)(A-I)^2 \ = \ A^3 - 4A^2 + 5A - 2I$

- 1 pt : $A^{-1} \ = \ \dfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = U\}$.

a) Résoudre le système : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$

- 1 pt : résolution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

b) Déterminer $E_1(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

- 1 pt : $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ **donc** $E_1(A)$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- 1 pt : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ **engendre** $E_1(A)$

- 1 pt : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ **est libre**

3. On note $E_2(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = 2U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & 2\,z & = & 0 \\ -3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$.

- 1 pt : résolution du système $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array}\right.$

b) Déterminer $E_2(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

- 1 pt : $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ **donc** $E_2(A)$ **est un sous-espace vectoriel de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- 1 pt : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ **engendre** $E_2(A)$

- 1 pt : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ **est libre**

4. On note $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- 3 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\-1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

- 1 pt : pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix}4 & -4 & -2\\-4 & 5 & 4\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **ou pour** $AP = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}$

- 1 pt : pour $P^{-1}AP = T$**.**

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- 1 pt : $N = T - D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- **1 pt :** $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt : récurrence immédiate**

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- **1 pt :** D **et** N **commutent**
- **1 pt : formule du binôme correcte**
- **1 pt : découpage valable car** $n \geqslant 1$
- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $T^n \ = \ D^n + n\, D^{n-1}\, N$
- **1 pt : cas** $n = 0$

Exercice 2 (EML 2017)

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0, +\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

- **1 pt : la fonction** f **est deux fois dérivables sur** $]0, +\infty[$ **en tant que somme de fonctions deux fois dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \mathbf{e}^x - \frac{\mathbf{e}}{x}$
- **1 pt :** $\forall x \in]0, +\infty[,\ f''(x) = \mathbf{e}^x + \frac{\mathbf{e}}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$
- **1 pt :** $f'(1) = 0$
- **1 pt : tableau complet**

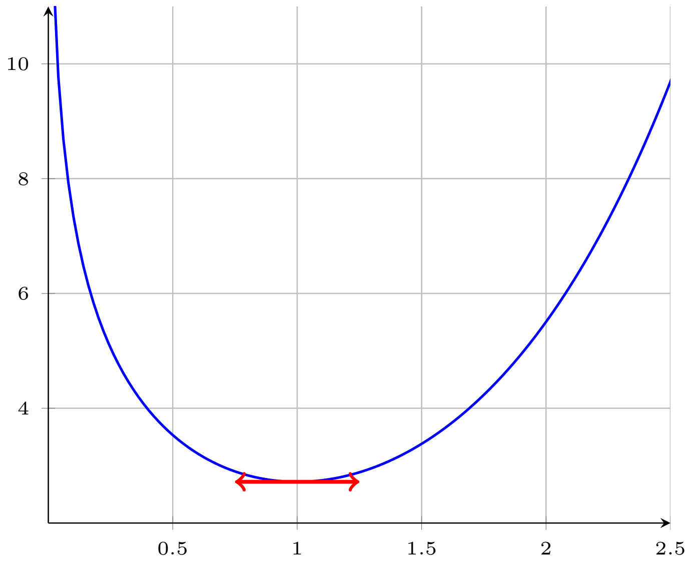
x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de f'	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **par croissances comparées**
- **1 pt :** $f(1) = \mathbf{e}$
- **1 pt : tableau complet**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\parallel$ $+\infty$	$\searrow$	$\mathbf{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.



- **1 pt : point remarquable** $(1, e)$
- **1 pt : tangente horizontale en** 1
- **1 pt : respect variations et limites**
- **1 pt : respect de la convexité**

4. ***a)*** Étudier les variations de la fonction $u : \begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array}$.

- **1 pt :** u **est dérivable sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $\forall x \in]0, +\infty[$**,** $u'(x) = \mathbf{e}^x - 1 + \frac{\mathbf{e}}{x^2}$
- **1 pt :** u **est strictement croissante sur** $]0, +\infty[$

b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

- **1 pt :** $f'(x) = x \;\Leftrightarrow\; u(x) = 0$
- **3 pts : théorème de la bijection**
  - $\times$ **1 pt : hypothèses**
  - $\times$ **1 pt :** $u(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$
  - $\times$ **1 pt :** $0 \in]-\infty, +\infty[$

- **1 pt :** $u(2) = \mathrm{e}^2 - \frac{\mathrm{e}}{2} - 2 > 0$
- **1 pt :** $u(1) < u(\alpha) < u(2)$
- **1 pt : Or, d'après le théorème de la bijection,** $u^{-1} :]-\infty, +\infty[\; \to \;]0, +\infty[$ **est strictement croissante sur** $]-\infty, +\infty[$**. En appliquant** u^{-1}**, on obtient alors :** $1 < \alpha < 2$

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

6. a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$.

- **1 pt :** g **est dérivable sur** $[2, +\infty[$ **comme somme de fonctions dérivables sur** $[2, +\infty[$ **et** $\forall x \in [2, +\infty[$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} - 1$
- **1 pt : D'après la question *1.b)*, la fonction** f' **est croissante sur** $[2, +\infty[\; \subset \;]0, +\infty[$**. Ainsi :** $f'(x) \;\geqslant\; f'(2)$
- **1 pt :** $f'(2) > 1$**, et donc** $g'(x) > 0$
- **1 pt :** $g(2) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2 > 0$
- **1 pt : comme** g **croissante sur** $[2, +\infty[$**, pour tout** $x \geqslant 2$ **:** $g(x) \geqslant g(2) > 0$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt : d'après la question précédente :** $\forall x \in [2, +\infty[, \; f(x) > x$
- **1 pt : en appliquant cette inégalité à** $x = u_n \geqslant 2$ **(d'après *5.*), alors** $u_{n+1} \geqslant u_n$

7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.

- **1 pt :** (u_n) **est croissante donc soit** (u_n) **est majorée et converge, soit** (u_n) **n'est pas majorée et diverge vers** $+\infty$**. On doit donc démontrer que** (u_n) **n'est pas majorée.**
- **1 pt : structure raisonnement par l'absurde (Supposons que** (u_n) **n'est pas majorée)**
- **1 pt : comme** (u_n) **est croissante et majorée, alors elle converge vers** ℓ
- **1 pt : d'après *5.* :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$**. Donc, par passage à la limite :** $\ell \geqslant 2$
- **1 pt : par unicité de la limite et par continuité de** f **en** ℓ, $\ell = f(\ell)$ **et donc** $g(\ell) = 0$
- **1 pt :** $\ell \geqslant 2$ **donc** $g(\ell) > 0$**. Absurde**

8. Écrire un programme en **Python** qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

- **1 pt : initialisation de** u **et** N
- **1 pt :** `while u < A:`
- **1 pt : intérieur de la boucle while**
- **1 pt :** `return N`

```python
def premEntier(A):
    N = 0
    u = 2
    while u < A:
        N += 1
        u = np.exp(u) - np.exp(1) * np.log(u)
    return N
```

9. a) Démontrer : $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$.

- 2 pts : $\forall x \in [2, +\infty[,\ 2\ln(x) \leqslant x$ (concavité ou étude de fonction)

- 2 pts : $\forall x \in [2, +\infty[,\ x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$ (étude de fonction)

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-e}{2}\, u_n$.

- 1 pt : $u_n \geqslant 2$ donc $2\ln(u_n) \leqslant u_n \leqslant \frac{e^{u_n}}{3}$

- 2 pts : preuve correcte de l'inégalité

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

- 3 pts : on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-e}{2}\right)^n$

× **1 pt : initialisation**

× **2 pts : hérédité**

- 1 pt : $0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \left(\frac{2}{6-e}\right)^n$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : les séries sont à termes positifs

- 1 pt : la série $\sum \left(\dfrac{2}{6-e}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{2}{6-e} \in\ ]-1, 1[$ donc converge

10. a) Écrire une fonction **Python** `premTermesU(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie un tableau `numpy` contenant les n premiers termes de la suite (u_n).

- 1 pt : initialisation de T (avec la bonne taille)

- 1 pt : bonne taille de la boucle `for`

- 1 pt : cohérence entre la formule de transformation de T et l'indice de la boucle for

- 1 pt : bonus si tout est correct

```python
def premTermesU(n):
    T = np.zeros(n)
    T[0] = 2
    for k in range(n-1):
        T[k+1] = np.exp(T[k]) - np.exp(1) * np.log(T[k])
    return T
```

b) Écrire un script utilisant la fonction précédente et permettant de tracer les 10 premiers termes de la suite (u_n). On pourra utiliser l'option graphique `'x'`.

- 1 pt : `N = 10` (point donné seulement si la suite a un peu de sens)

- **2 pt :** `plt.plot(premTermesU(N), 'x')`

```
N = 10
plt.plot(premTermesU(N), 'x')
```

Exercice 3 (ECRICOME 2023)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < \mathrm{e} < 3$.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

- **1 pt : f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (preuve correctement détaillée)**
- **1 pt :** $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{x} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$ **(pas de point si le résultat est balancé)**

b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- **1 pt : tableau de variations**

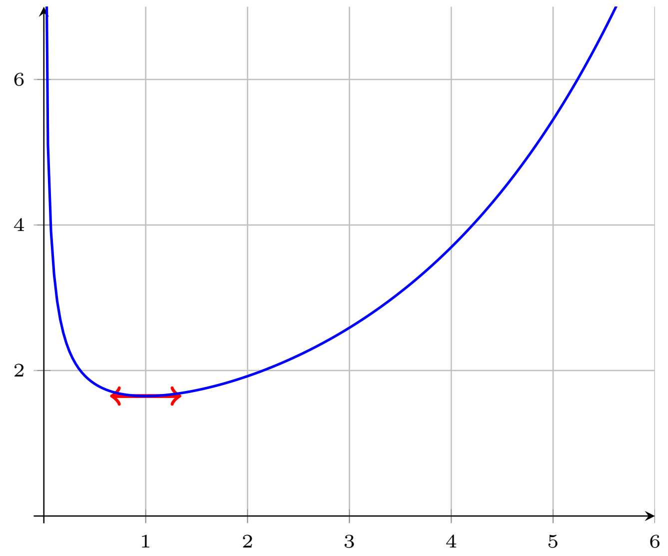
x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$ **et** $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^0 = 1$ **donc** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **par croissances comparées**

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

- **1 pt : tangente horizontale en 1**
- **1 pt : asymptote vecticale en 0**
- **1 pt : monotonie et limites respectées**

Démonstration.



□

d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0, +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

- **1 pt : La fonction f est :**
  - **continue sur $]0,1]$ (car dérivable)**
  - **strictement décroissante sur $]0,1]$**
- **1 pt : f réalise une bijection de $]0,1]$ sur $f(]0,1]) = [\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$**
- **1 pt : $n \in [\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$**
- **1 pt : preuve analogue pour la solution v_n**

2. a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

- **1 pt : $f(v_n) = n$ et $f(v_{n+1}) = n+1$ donc $f(v_n) < f(v_{n+1})$**
- **1 pt : par stricte croissance de f sur $]1, +\infty[$ (on a bien $v_n > 1$ et $v_{n+1} > 1$), on en déduit que $v_n < v_{n+1}$**

b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

- **1 pt : $v_n > 1$ donc par passage à la limite : $\ell \geqslant 1$**
- **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = f(\ell)$ par continuité de f sur $[1, +\infty[$**
- **1 pt : $f(v_n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ c'est absurde**

3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

- **1 pt : $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n+1$ donc $f(u_n) < f(u_{n+1})$**
- **1 pt : par stricte décroissance de f sur $]0,1[$ (on a bien $0 < u_n < 1$ et $0 < u_{n+1} < 1$), on en déduit que $u_n > u_{n+1}$**

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

- **1 pt : la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0**
- **1 pt : théorème de convergence monotone cité**

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

- 1 pt : $0 < u_n < 1$ **donc, par passage à la limite :** $0 \leqslant \ell \leqslant 1$

- 1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ **par continuité de** f **sur** $]0,1]$

- 1 pt : $f(u_n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- 1 pt : $\mathrm{e}^{u_n} = n^2 u_n$

- 1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{u_n} = 1$ **par continuité de** $\exp$ **en** 0

- 1 pt : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

e) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

- 1 pt : $0 < u_n$**,** $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ **et** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

- 1 pt : la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ **est convergente par critère de Riemann**

- 1 pt : par critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ **est convergente**

4. ***a)*** Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε. On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a,b]$. Par monotonie de f sur $]0,1]$, en distinguant les cas $f(c) \leqslant n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a,c]$ ou à l'intervalle $[c,b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while ..... :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            .....
        else:
            .....
    return (a+b)/2
```

- 1 pt par ligne (3 pt en tout)

```python
import numpy as np

def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while b - a > eps :
        c = (a+b)/2 # Milieu de l'intervalle.
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n: # Si f(c) < n.
            b = c # Alors on cherche à gauche.
        else:
            a = c # Alors on cherche à droite.
    return (a+b)/2
```

b) Écrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près.
On pourra faire appel à la fonction ***`approx_u`*** *définie à la question précédente.*

```python
def sp(N, eps):
    S = 0
    for k in range(2, N + 1):
        S = S + approx_u(k, eps / (N - 1))
    return S
```

- **1 pt : initialisation** `S = 0`
- **1 pt : boucle** `for` **de bonne taille**
- **2 pt :** `S = S + approx_u(k, eps / (N - 1))`
  (seulement 1 pt si `eps` **au lieu de** `eps / (N - 1)`**)**

Exercice 4 (ECRICOME 2018)

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

- **1 pt :** f **est dérivable sur** $\mathbb{R}_+^*$ **comme somme de fonctions dérivables sur** $\mathbb{R}_+^*$
- **1 pt :** $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$ **car** $x > 0$
- **1 pt : tableau complet**

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|\|$	$+$
Variations de f	$\|\|$	$-\infty \nearrow 0$

c) Écrire une fonction **Python** `f(x)` qui prend en argument un réel x strictement positif et qui renvoie la valeur de $f(x)$.

- 1 pt : si tout est correct

```
def f(x):
    return 1/(x+1) + np.log(x) - np.log(x+1)
```

d) Écrire un script **Python** permettant de tracer le graphe de f sur le segment $[a, b]$ où $a = 0,1$ et $b = 3$.

- 1 pt : choix de a et b corrects

- 1 pt : discrétisation de l'axe des abscisses avec `np.linspace` ou `np.arange`

- 1 pt : `Yord` correct

- 1 pt : syntaxe correcte pour `plt.plot`

```
a = 0.1
b = 3
Xabs = np.linspace(a,b,1000)
Yord = [f(x) for x in Xabs]
plt.plot(Xabs, Yord)
```

e) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.

- 1 pt : calcul correct

f) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- 1 pt : D'après l'étude en question *1.b)*, la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. On en déduit : $\forall x \in\,]0, +\infty[, f(x) \leqslant 0$

- 1 pt : on applique l'inégalité à $n \in\,]0, +\infty[$

g) Écrire une fonction **Python** `suiteU(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

- 1 pt : taille de la boucle `for`

- 1 pt : calcul correct de la somme

- 1 pt : bonne gestion du terme `np.log(n)`

```
def suiteU(n):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S += 1/k
    return S - np.log(n)
```

2. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

- **1 pt : calcul correct**

b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- **2 pts : argument de concavité ou étude de fonction**
- **1 pt : application de l'inégalité en** $x = \dfrac{1}{n}$ **justifiée (on peut le faire car** $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$**)**
- **1 pt :** $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

c) On **admet** que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ (développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0).
En déduire :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

- **2 pt :** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}-v_n}{\frac{1}{2n^2}} = 1$

d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

- **1 pt :** $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$
- **1 pt : les séries sont à termes positifs**
- **1 pt : la série** $\sum \frac{1}{n^2}$ **est une série de Riemann d'exposant** $\alpha = 2 > 1$ **donc converge**
- **1 pt : par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série** $\sum (v_{n+1} - v_n)$ **converge**

e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers γ.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n$ $(v_1 = 0)$
- **1 pt : la série** $\sum\ v_{n+1} - v_n$ **est convergente de somme** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \gamma$ **donc la suite** (v_n) **converge vers** γ

3. a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

- **1 pt :** $u_n = v_n + \frac{1}{n}$ **donc** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \gamma$

b) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \gamma\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

- **2 pts : la suite** (v_n) **est croissante et** $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \gamma$ **donc pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $v_n \leqslant \gamma$ **en raisonnant par l'absurde**
  - $\times$ **1 pt : structure de raisonnement (y compris négation de :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $v_n \leqslant \gamma$**)**
  - $\times$ **1 pt : reste de la démonstration**
- **1 pt : la suite** (u_n) **est décroissante et** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \gamma$ **donc pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $u_n \geqslant \gamma$
- **1 pt :** $|u_n - \gamma| = u_n - \gamma$ **car** $u_n - \gamma \geqslant 0$

- 1 pt : $u_n - \gamma = v_n + \dfrac{1}{n} - \gamma \leqslant \dfrac{1}{n}$ **car** $v_n - \gamma \leqslant 0$

c) On rappelle que l'instruction `np.floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `suiteU` de la question ***1.g)*** a été correctement programmée.
Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = int(input('Entrer un réel strictement positif : '))
n = np.floor(1/eps) + 1
print(suiteU(n))
```

- 1 pt : intérêt : le programme renvoie une valeur approchée de γ à ϵ près

- 2 pts : fonctionnement

× **1 pt : on cherche n tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ car alors, par transitivité :** $|u_n - \gamma| \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$

× **1 pt : résolution $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ et obtention de** $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

- 1 pt : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$

- 1 pt : les séries sont à termes positifs

- 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ donc converge

- 1 pt : par critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ converge

5. ***a)*** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

- 1 pt : découpage en termes pairs et impairs de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ bien écrit

- 1 pt : changement d'indices corrects

b) Déterminer deux réels α et β tels : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

- 2 pts : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

- 2 pts : calcul correct

6. ***a)*** Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

- 2 pts : calcul correct

b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2(u_{2n} - u_n + \ln(2))$

- 1 pt : passage à la limite $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2)$

7. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

- 1 pt : calcul correct

b) Retrouver alors le résultat de la question ***6.b)***.

- 1 pt : la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ **est continue sur** $[0,1]$

- 1 pt : somme de Riemann : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \ln(2)$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = 2 \times \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln(2)$