DS2 (version A)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.random as rd`

Exercice 1

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \;=\; \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Écrire une fonction **Python** `suiteV(n,a)` qui, prenant en argument un entier naturel n et un réel a jouant le rôle de u_0, renvoie le nombre v_n.

3. ***a)*** Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

b) ***(i)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$.

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell \;=\; \sigma + v_0$$

4. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) ***(i)*** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n).

b) ***(i)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

(ii) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie II : Approximation de σ

6. ***a)*** Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

7. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

8. Écrire une fonction **Python** `approx(eps)` qui, prenant en argument un réel `eps` strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à `eps` près.

Exercice 2

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. ***a)*** Calculer $(A - 2\,I)\ (A + 2\,I)\ (A - I)$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

b) Déterminer $E_2(A)$.

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

3. Déterminer de même une base de $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$, espaces vectoriels définis par :

$$E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\} \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = -2X\}$$

4. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.

5. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

6. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

7. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \ \Leftrightarrow\ N \in C_D$$

8. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

9. En déduire :

$$C_A = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$$

10. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

b) Démontrer : $\mathbb{P}\big([Z=0]\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Pour tout k de $Z(\Omega) \setminus \{0\}$, démontrer : $\mathbb{P}\big([Z=k]\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

d) Vérifier : $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) = 1$.

e) On rappelle que l'instruction `rd.binomial(1,0.5)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
n = int(input(' Entrez un entier n : '))
Z = 0
k = 1
lancer = rd.binomial(1,0.5)
while lancer == 0 and k <= n:
    k = k+1
    lancer = rd.binomial(1,0.5)
if k != n+1:
    Z = ...
print(Z)
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages,
- si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. a) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i])$?
On distinguera les cas $i = 0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.

b) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=i])$?
On distinguera les cas $i = n$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

c) Démontrer, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. ***a)*** Montrer : $\mathbb{P}([X=0]) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k + \dfrac{1}{2^n}$.

b) Montrer : $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{2^n}$.

c) Démontrer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$: $\mathbb{P}([X=i]) \;=\; \sum\limits_{k=i}^{n-1} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = 1$.

Problème

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties.
Ses observations lui permettent d'affirmer que :

× s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

× s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

× s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

× s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. ***a)*** Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) \;=\; \frac{2}{3}\,\mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(F_n)$$

b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $\mathbb{P}(F_{n+1})$, $\mathbb{P}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}(H_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = M\,U_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2. ***a)*** Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2$, $U_n = M^{n-2}\,U_2$.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.

b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([S_n = n])$.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.