

## DS2 (version A) - Barème

### Exercice 1 (Inspiré Oral ESCP 2018)

#### Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$ .

On suppose :  $u_0 > 0$ .

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

- **3 pts** :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

- × **1 pt** : initialisation

- × **2 pts** : hérédité

- **1 pt** :  $(v_n)$  bien définie

2. Écrire une fonction **Python** `suiteV(n,a)` qui, prenant en argument un entier naturel  $n$  et un réel  $a$  jouant le rôle de  $u_0$ , renvoie le nombre  $v_n$ .

- **4 pts**

- × **1 pt** : initialisation `u`

- × **1 pt** : taille boucle `for`

- × **1 pt** : `u = u**2 / (k+1)` (pas de point si c'est incohérent avec le choix de la boucle `for`)

- × **1 pt** : renvoi de `np.log(u) / 2**n`

```
1 def suiteV(n, a):
2     u = a
3     for k in range(n):
4         u = u**2 / (k+1)
5     return np.log(u) / 2**n
```

3. a) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$  converge. Dans la suite, on note :  $\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$ .

- **4 pts** : critère de négligeabilité

- × **1 pt** :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{2^n} \geq 0$  et  $\frac{1}{n^2} \geq 0$

- × **2 pts** :  $\frac{\ln(n)}{2^n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$

- × **1 pt** : La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann d'exposant 2 ( $2 > 1$ ). Elle est donc convergente.

b) (i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $v_n - v_{n-1}$  en fonction de  $n$ .

Puis déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} (v_n - v_{n-1})$ .

- **2 pt** :  $v_n - v_{n-1} = -\frac{\ln(n)}{2^n}$
- **1 pt** : d'après la question précédente,  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$  convergente, donc  $\sum_{n \geq 1} (v_n - v_{n-1})$  convergente.

(ii) En déduire que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  qui vérifie :

$$\ell = \sigma + v_0$$

- **1 pt** :  $\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$
- **1 pt** :  $(v_n)$  converge d'après la question précédente
- **1 pt** : par passage à la limite  $\ell = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0$

4. On suppose dans cette question que  $u_0 \neq e^{-\sigma}$ .

a) Déterminer le signe de  $\ell$ .

On pourra distinguer les cas  $u_0 > e^{-\sigma}$  et  $u_0 < e^{-\sigma}$ .

- **2 pts** :  $\ell > 0 \Leftrightarrow u_0 > e^{-\sigma}$  (**1 pt pour la stricte croissance de exp ou de ln sur  $\mathbb{R}$** )
- **0 pt** :  $\ell < 0 \Leftrightarrow u_0 < e^{-\sigma}$

b) En déduire la limite de  $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , puis étudier le comportement en  $+\infty$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- **1 pt** : si  $u_0 > e^{-\sigma}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- **1 pt** : si  $u_0 < e^{-\sigma}$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

5. On suppose dans cette question :  $u_0 = e^{-\sigma}$ .

a) (i) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$ .

- **1 pt** :  $v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt** :  $v_n = -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite  $\ell$  de la suite  $(v_n)$ .

- **1 pt** : comme  $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$  convergente d'après 2.a) :  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

b) (i) Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$ .

- **1 pt** :  $\ln(u_n) = 2^n v_n = 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt** :  $\frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$  car  $\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0$  (en tant que somme de réels positifs)

(ii) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

- **1 pt** : par croissance de exp sur  $\mathbb{R}$  :  $u_n \geq \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right)$
- **1 pt** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  (par théorème de comparaison)

**Partie II : Approximation de  $\sigma$**

6. a) Montrer :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$ .

• **3 pts :**

× **1 pt : la fonction  $g : x \mapsto \ln(x)$  est concave sur  $]0, +\infty[$**

× **1 pt : sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1**

× **1 pt : équation de la tangente :  $y = g(1) + g'(1)(x - 1) = x - 1$**

b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$ .

• **1 pt :  $\frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{k-1}{2^k}$  d'après la question précédente et car  $2^k > 0$**

• **1 pt :  $\sum_{k=n+1}^m \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{k-1}{2^k}$**

• **1 pt :  $\sum_{k=n+1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$**

• **1 pt :  $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$  et  $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$  série géométrique dérivée première et série géométrique de raison  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$ . Elles sont donc convergentes.**

• **1 pt :  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$**

7. Montrer alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left( -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$ .

• **1 pt :  $\left| \sigma - \left( -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$**

• **1 pt :  $\left| \sigma - \left( -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$  d'après la question précédente**

8. Écrire une fonction **Python** `approx(eps)` qui, prenant en argument un réel `eps` strictement positif, renvoie une valeur approchée de  $\sigma$  à `eps` près.

• **5 pts**

× **1 pt : initialisation N et S**

× **1 pt : condition boucle while**

× **1 pt : mise à jour N**

× **1 pt : mise à jour S**

× **1 pt : renvoi de -S**

```

1 def approx(eps):
2     S = 0
3     N = 1
4     while (N+1) / 2**N > eps:
5         N = N + 1
6         S = S + np.log(N) / 2**N
7     return -S

```

**Exercice 2 (Inspiré EML 2013)**

On note  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. a) Calculer  $(A - 2I)(A + 2I)(A - I)$ .

• 1 pt :  $(A - 2I)(A + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ou  $(A + 2I)(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• 1 pt :  $(A - 2I)(A + 2I)(A - I) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

• 1 pt :  $(A - 2I)(A + 2I)(A - I) = A^3 - A^2 - 4A + 4I$

• 1 pt :  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^2 - A - 4I)$

2. On note  $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$ .

a) Résoudre le système suivant :  $(S_1) \begin{cases} -2x & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & & = & 0 \\ 2x & & - & 2z & = & 0 \end{cases}$ .

• 2 pts :  $\begin{cases} x & = & z \\ & y & = & 0 \end{cases}$

b) Déterminer  $E_2(A)$ .

• 1 pt : écriture système

• 1 pt :  $E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) En déduire que  $E_2(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et déterminer une base de  $E_2(A)$ .

• 1 pt :  $E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ , c'est donc un sev de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

• 2 pts :  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  base de  $E_2(A)$

× 1 pt : caractère générateur

× 1 pt : liberté

3. Déterminer de même une base de  $E_1(A)$  et  $E_{-2}(A)$ , espaces vectoriels définis par :

$$E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2 \cdot X\}$$

• 4 pts :  $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  base de  $E_1(A)$

× 1 pt : écriture système  $\begin{cases} -x & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & z & = & 0 \end{cases}$

× 1 pt : résolution  $\{x = z = 0\}$

× 1 pt :  $E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

× 1 pt :  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  libre et génératrice de  $E_1(A)$

• 1 pt :  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  base de  $E_{-2}(A)$

4. Montrer que la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .

• 3 pts :  $P$  inversible et  $P^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Déterminer la matrice  $D = P^{-1}AP$ .

• 1 pt :  $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  ou  $P^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• 1 pt :  $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

On appelle commutant de  $A$ , et on note  $C_A$ , l'ensemble des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de  $D$ , et on note  $C_D$ , l'ensemble des matrices  $N$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que :

$$DN = ND$$

6. Montrer que  $C_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- 1 pt :  $C_A \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in C_A$
- 2 pts : stabilité par combinaison linéaire

7. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On note  $N = P^{-1}MP$ . Montrer :

$$M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$$

- 1 pt :  $M \in C_A \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow APNP^{-1} = PNP^{-1}A$
- 1 pt : en multipliant à gauche par  $P^{-1}$  et à droite par  $P$  :  $APNP^{-1} = PNP^{-1}A \Leftrightarrow P^{-1}APN = NP^{-1}AP$
- 1 pt :  $P^{-1}APN = NP^{-1}AP \Leftrightarrow DN = ND \Leftrightarrow N \in C_D$

8. Déterminer  $C_D$ , en utilisant les coefficients des matrices.

• 1 pt :  $DN = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ -2g & -2h & -2i \end{pmatrix}$  et  $ND = \begin{pmatrix} 2a & b & -2c \\ 2d & e & -2f \\ 2g & h & -2i \end{pmatrix}$

- **1 pt : résolution système**  $\{b = c = f = g = h = 0\}$

- **1 pt**  $C_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, e, i) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

9. En déduire :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- **1 pt** :  $M \in C_A \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$

- **2 pts : calcul de**  $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$

- × **1 pt** :  $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$  **ou**  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$

- × **1 pt** :  $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & 0 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}$

- **1 pt** :  $C_A \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

- **1 pt** :  $C_A \supset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

10. Déterminer une base de  $C_A$  et la dimension de  $C_A$ .

- **2 pts** :  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$  **base**

- × **1 pt** : **caractère générateur**

- × **1 pt** : **liberté**

- **1 pt** :  $\dim(C_A) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 3$

### Exercice 3 (EDHEC 2004)

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance  $n$  fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et face également avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ ), les lancers étant supposés indépendants.

On note  $Z$  la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces  $n$  lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble  $Z(\Omega)$ .

- **3 pts** :  $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  (**1 pt si la réponse est donnée sans argumentation**)

b) Démontrer :  $\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

- **1 pt** : **introduction des  $P_i$  et  $F_i$**

- 1 pt :  $[Z = 0] = \bigcap_{i=1}^n F_i$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  (indépendance des lancers à citer)

c) Pour tout  $k$  de  $Z(\Omega) \setminus \{0\}$ , démontrer :  $\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ .

- 1 pt :  $[Z = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$  (indépendance des lancers à citer)

d) Vérifier :  $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$ .

• 2 pts

× 1 pt : utilisation de la question précédente

× 1 pt :  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$  est la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2} \neq 1$

e) On rappelle que l'instruction `rd.binomial(1,0.5)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier  $n$  étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```

1  n = int(input(' Entrez un entier n : '))
2  Z = 0
3  k = 1
4  lancer = rd.binomial(1,0.5)
5  while lancer == 0 and k <= n:
6      k = k+1
7      lancer = rd.binomial(1,0.5)
8  if k != n+1:
9      Z = ...
10 print(Z)

```

• 2 pts :

$\underline{9}$ $Z = k$
-------------------------

• 2 pts supplémentaires si argumentation

On dispose de  $n + 1$  urnes  $U_0, U_1, \dots, U_n$  telles que pour tout  $k$  de  $\{0, 1, \dots, n\}$  l'urne  $U_k$  contient  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- × si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable  $Z$  prend la valeur  $k$  (avec  $k \geq 1$ ), alors on tire une par une et avec remise,  $k$  boules dans l'urne  $U_k$  et l'on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages,
- × si la variable  $Z$  a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et  $X$  prend la valeur 0.

2. Déterminer  $X(\Omega)$ .

- 2 pts :  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

• 1 pt supplémentaire si argumentation

3. a) Quelle est la valeur de la probabilité  $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i])$  ?

On distinguera les cas  $i = 0$  et  $1 \leq i \leq n$ .

• 1 pt :  $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) = 1$

• 1 pt :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) = 0$

b) Quelle est la valeur de la probabilité  $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i])$  ?

On distinguera les cas  $i = n$  et  $0 \leq i \leq n - 1$ .

• 2 pts :  $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n]) = 1$

× 1 pt : résultat

× 1 pt : explication

• 1 pt :  $\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) = 0$

c) Démontrer, pour tout  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  et tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• 3 pts : si  $0 \leq i \leq k$  alors  $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}$

× 1 pt : si l'événement  $[Z = k]$  est réalisé, c'est que...

× 1 pt : description de l'expérience

× 1 pt : description de la v.a.r.  $X$

• 1 pt : si  $k < i \leq n$  alors  $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = 0$

4. a) Montrer :  $\mathbb{P}([X = 0]) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$ .

• 1 pt :  $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  SCE

• 1 pt : formule des proba totales  $\mathbb{P}([X = 0]) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = 0])$

• 1 pt :  $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = 0]) = \mathbb{P}([Z = 0]) \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = 0]) + \mathbb{P}([Z = n]) \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = 0])$

• 1 pt : calcul  $\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n-k}{n}\right)^k$

b) Montrer :  $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2^n}$ .

• 1 pt :  $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  SCE et formule des proba totales  $\mathbb{P}([X = n]) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = n])$

• 1 pt :  $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = n]) = \mathbb{P}([Z = 0]) \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = n]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = n]) + \mathbb{P}([Z = n]) \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n])$

• 1 pt : calcul  $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2^n}$

c) Démontrer, pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  :  $\mathbb{P}([X = i]) = \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$ .

• **1 pt** :  $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  **SCE et formule des proba totales**  $\mathbb{P}([X = i]) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = i])$

• **1 pt** :  $\sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = 0$

• **1 pt** : **calcul**  $\mathbb{P}([X = i]) = \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que  $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) = 1$ .

• **1 pt** :  $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) = \left(\frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} + \frac{1}{2^n}$

• **1 pt** :  $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k$

• **1 pt** :  $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} - \binom{k}{0} \left(\frac{k}{2n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-0}\right)$

• **1 pt** :  $= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{k}{2n} + \frac{n-k}{2n}\right)^k - \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\right)$  (**par binôme de Newton**)

• **1 pt** :  $= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$

• **1 pt** :  $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

• **1 pt** : **fin du calcul pour**  $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) = 1$

### Problème (EDHEC 2003)

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties.

Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- × s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ .
- × s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- × s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- × s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $A_n$  l'événement : « le joueur gagne la  $n^{\text{ème}}$  partie ».

De plus, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n)$$

- **2 pts** :  $(E_n, F_n, G_n, H_n)$  SCE (1 pt pour l'affirmer, 1 pt explication)
  - **1 pt** : formule des proba totales  $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap E_{n+1})$
  - **1 pt** :  $E_n \cap E_{n+1} = E_n \cap A_{n+1}$  et  $F_n \cap E_{n+1} = F_n \cap A_{n+1}$
  - **1 pt** :  $G_n \cap E_{n+1} = \emptyset$  et  $H_n \cap E_{n+1} = \emptyset$
  - **1 pt** : fin calcul  $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n)$
- b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités  $\mathbb{P}(F_{n+1})$ ,  $\mathbb{P}(G_{n+1})$  et  $\mathbb{P}(H_{n+1})$  en fonction de  $\mathbb{P}(E_n)$ ,  $\mathbb{P}(F_n)$ ,  $\mathbb{P}(G_n)$  et  $\mathbb{P}(H_n)$ .
- **1 pt** :  $\mathbb{P}(F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{1}{3} \mathbb{P}(H_n)$
  - **1 pt** :  $\mathbb{P}(G_{n+1}) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n)$
  - **1 pt** :  $\mathbb{P}(H_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(H_n)$

c) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :  $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$ .

Vérifier que  $U_{n+1} = M U_n$ , où  $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

• **1 pt**

2. a) Soient  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $PQ$ . En déduire que  $P$  est inversible et donner son inverse.

• **1 pt** :  $PQ = 10I_4$

• **1 pt** :  $P^{-1} = \frac{1}{10} Q$

b) Déterminer la matrice  $D = P^{-1}MP$ .

• **1 pt** :  $QM = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $MP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

• **1 pt** :  $QMP = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

• **1 pt** :  $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^n P^{-1}$ .

• 1 pt : initialisation

• 2 pts : hérédité

b) Montrer, également par récurrence, que :  $\forall n \geq 2, U_n = M^{n-2} U_2$ .

• 1 pt : initialisation

• 2 pts : hérédité

c) Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de  $M^n$ , puis en déduire  $\mathbb{P}(E_n), \mathbb{P}(F_n), \mathbb{P}(G_n)$  et  $\mathbb{P}(H_n)$ .

• 1 pt : première colonne de  $M^n = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• 1 pt :  $D^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• 1 pt :  $\begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n \\ 2(\frac{1}{6})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n \\ 1 \end{pmatrix}$

• 1 pt :  $P \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n \\ 2(\frac{1}{6})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n + 2(\frac{1}{6})^n + 6(\frac{1}{2})^n + 3 \\ 2(-\frac{1}{3})^n - 2(\frac{1}{6})^n - 2(\frac{1}{2})^n + 2 \\ -2(-\frac{1}{3})^n - 2(\frac{1}{6})^n + 2(\frac{1}{2})^n + 2 \\ (-\frac{1}{3})^n + 2(\frac{1}{6})^n - 6(\frac{1}{2})^n + 3 \end{pmatrix}$

• 1 pt :  $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_2) \\ \mathbb{P}(F_2) \\ \mathbb{P}(G_2) \\ \mathbb{P}(H_2) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• 1 pt :  $\begin{cases} \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{10} \left( -(-\frac{1}{3})^{n-2} + 2(\frac{1}{6})^{n-2} + 6(\frac{1}{2})^{n-2} + 3 \right) \\ \mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{10} \left( 2(-\frac{1}{3})^{n-2} - 2(\frac{1}{6})^{n-2} - 2(\frac{1}{2})^{n-2} + 2 \right) \\ \mathbb{P}(G_n) = \frac{1}{10} \left( -2(-\frac{1}{3})^{n-2} - 2(\frac{1}{6})^{n-2} + 2(\frac{1}{2})^{n-2} + 2 \right) \\ \mathbb{P}(H_n) = \frac{1}{10} \left( (-\frac{1}{3})^{n-2} + 2(\frac{1}{6})^{n-2} - 6(\frac{1}{2})^{n-2} + 3 \right) \end{cases}$

d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

• 2 pts :  $-\frac{1}{3} \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{1}{6} \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{1}{2} \in ]-1, 1[$

4. Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $X_k$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la  $k^{\text{ème}}$  partie et qui vaut 0 sinon ( $X_1$  et  $X_2$  sont donc deux variables certaines).

a) Pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, exprimer  $A_k$  en fonction de  $E_k$  et  $F_k$ .

- **2 pts** :  $E_k \cup F_k = A_k$

b) En déduire, pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, la loi de  $X_k$ .

- **1 pt** :  $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$

- **1 pt** :  $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(E_k \cup F_k) = \mathbb{P}(E_k) + \mathbb{P}(F_k)$  **dont l'incompatibilité**

- **1 pt** : calcul

5. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on note  $S_n$  la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des  $n$  premières parties.

a) Calculer  $\mathbb{P}([S_n = 2])$  en distinguant les cas  $n = 2$ ,  $n = 3$  et  $n \geq 4$ .

- **1 pt** :  $\mathbb{P}([S_2 = 2]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

- **1 pt** :  $[S_3 = 2] = \overline{A_3}$

- **1 pt** : calcul  $\mathbb{P}(\overline{A_3}) = 1 - \mathbb{P}(A_3) = 1 - \frac{1}{10} \left( -\frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} + 5 \right) = \frac{1}{3}$

- **1 pt** :  $[S_n = 2] = \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} \cap \dots \cap \overline{A_n}$

- **1 pt** : formule des probas composées

- **1 pt** :  $\mathbb{P}_{\overline{A_3}}(\overline{A_4}) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{A_3}}(A_4) = 1 - \mathbb{P}_{A_2 \cap \overline{A_3}}(A_4) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- **1 pt** :  $\mathbb{P}_{\overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) = \mathbb{P}_{\overline{A_{k-1}} \cap \overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}})$  **et calcul**

b) Déterminer  $\mathbb{P}([S_n = n])$ .

- **1 pt** :  $[S_n = n] = A_3 \cap \dots \cap A_n$

- **1 pt** : **FPC**  $\mathbb{P}([S_n = n]) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(A_4) \times \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)$

- **1 pt** :  $\mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{3}$  **et**  $\mathbb{P}_{A_3}(A_4) = \frac{2}{3}$

- **1 pt** :  $\mathbb{P}_{A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) = \mathbb{P}_{A_{k-2} \cap A_{k-1}}(A_k)$  **et calcul**

c) Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3, écrire  $S_n$  en fonction des variables  $X_k$ , puis déterminer  $\mathbb{E}(S_n)$  en fonction de  $n$ .

- **1 pt** :  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

- **1 pt** : la v.a.r. admet une espérance

- **1 pt** : linéarité de l'espérance

- **1 pt** :  $X_1 = 1 = X_2$

- **1 pt** : sommes géométriques (formule connue)

- **2 pts** : calcul et résultat  $\mathbb{E}(S_n) = \frac{11}{8} + \frac{1}{40} \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-2} - \frac{2}{5} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-2}$