

DS2 (version A) - Barème

Exercice 1 (Inspiré Oral ESCP 2018)

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$.

On suppose : $u_0 > 0$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

- **3 pts** : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

- × **1 pt** : initialisation

- × **2 pts** : hérédité

- **1 pt** : (v_n) bien définie

2. Écrire une fonction **Python** `suiteV(n, a)` qui, prenant en argument un entier naturel n et un réel a jouant le rôle de u_0 , renvoie le nombre v_n .

- **4 pts**

- × **1 pt** : initialisation u

- × **1 pt** : taille boucle for

- × **1 pt** : `u = u**2 / (k+1)` (pas de point si c'est incohérent avec le choix de la boucle for)

- × **1 pt** : renvoi de `np.log(u) / 2**n`

```
1 def suiteV(n, a):  
2     u = a  
3     for k in range(n):  
4         u = u**2 / (k+1)  
5     return np.log(u) / 2**n
```

3. a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

- **4 pts** : critère de négligeabilité

- × **1 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n)}{2^n} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

- × **2 pts** : $\frac{\ln(n)}{2^n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

- × **1 pt** : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

b) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n .

Puis déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (v_n - v_{n-1})$.

- **2 pt** : $v_n - v_{n-1} = -\frac{\ln(n)}{2^n}$
- **1 pt** : d'après la question précédente, $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n}$ convergente, donc $\sum_{n \geq 1} (v_n - v_{n-1})$ convergente.

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell = \sigma + v_0$$

- **1 pt** : $\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$
- **1 pt** : (v_n) converge d'après la question précédente
- **1 pt** : par passage à la limite $\ell = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0$

4. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ .

On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

- **2 pts** : $\ell > 0 \Leftrightarrow u_0 > e^{-\sigma}$ (**1 pt pour la stricte croissance de exp ou de ln sur \mathbb{R}**)
- **0 pt** : $\ell < 0 \Leftrightarrow u_0 < e^{-\sigma}$

b) En déduire la limite de $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- **1 pt** : si $u_0 > e^{-\sigma}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- **1 pt** : si $u_0 < e^{-\sigma}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

5. On suppose dans cette question : $u_0 = e^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$.

- **1 pt** : $v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt** : $v_n = -\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n) .

- **1 pt** : comme $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ convergente d'après 2.a) : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

b) (i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$.

- **1 pt** : $\ln(u_n) = 2^n v_n = 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} = \frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt** : $\frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq \frac{\ln(n+1)}{2}$ car $\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geq 0$ (en tant que somme de réels positifs)

(ii) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- **1 pt** : par croissance de exp sur \mathbb{R} : $u_n \geq \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right)$
- **1 pt** : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (par théorème de comparaison)

Partie II : Approximation de σ

6. a) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$.

• 3 pts :

× 1 pt : la fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$

× 1 pt : sa courbe représentative \mathcal{C}_f se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1

× 1 pt : équation de la tangente : $y = g(1) + g'(1)(x - 1) = x - 1$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{n+1}{2^n}$.

• 1 pt : $\frac{\ln(k)}{2^k} \leq \frac{k-1}{2^k}$ d'après la question précédente et car $2^k > 0$

• 1 pt : $\sum_{k=n+1}^m \frac{\ln(k)}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{k-1}{2^k}$

• 1 pt : $\sum_{k=n+1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

• 1 pt : $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ série géométrique dérivée première et série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. Elles sont donc convergentes.

• 1 pt : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^m (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$

7. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$.

• 1 pt : $\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$

• 1 pt : $\left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$ d'après la question précédente

8. Écrire une fonction **Python** `approx(eps)` qui, prenant en argument un réel `eps` strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à `eps` près.

• 5 pts

× 1 pt : initialisation `N` et `S`

× 1 pt : condition boucle `while`

× 1 pt : mise à jour `N`

× 1 pt : mise à jour `S`

× 1 pt : renvoi de `-S`

```
1 def approx(eps):
2     S = 0
3     N = 1
4     while (N+1) / 2**N > eps:
5         N = N + 1
6         S = S + np.log(N) / 2**N
7     return -S
```

Exercice 2 (Inspiré EML 2013)

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. a) Calculer $(A - 2I)(A + 2I)(A - I)$.

• 1 pt : $(A - 2I)(A + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $(A + 2I)(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $(A - 2I)(A + 2I)(A - I) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

• 1 pt : $(A - 2I)(A + 2I)(A - I) = A^3 - A^2 - 4A + 4I$

• 1 pt : A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^2 - A - 4I)$

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \begin{cases} -2x & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & & = & 0 \\ 2x & & - & 2z & = & 0 \end{cases}$.

• 2 pts : $\begin{cases} x & = & z \\ & y & = & 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_2(A)$.

• 1 pt : écriture système

• 1 pt : $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

• 1 pt : $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, c'est donc un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

• 2 pts : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base de $E_2(A)$

× 1 pt : caractère générateur

× 1 pt : liberté

3. Déterminer de même une base de $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$, espaces vectoriels définis par :

$$E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2 \cdot X\}$$

• 4 pts : $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ base de $E_1(A)$

× 1 pt : écriture système $\begin{cases} -x & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & z & = & 0 \end{cases}$

× 1 pt : résolution $\{x = z = 0\}$

× 1 pt : $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

× 1 pt : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ libre et génératrice de $E_1(A)$

• 1 pt : $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base de $E_{-2}(A)$

4. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1} .

• 3 pts : P inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

• 1 pt : $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $P^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

On appelle commutant de A , et on note C_A , l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D , et on note C_D , l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

6. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- 1 pt : $C_A \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in C_A$
- 2 pts : stabilité par combinaison linéaire

7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$$

- 1 pt : $M \in C_A \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow APNP^{-1} = PNP^{-1}A$
- 1 pt : en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P : $APNP^{-1} = PNP^{-1}A \Leftrightarrow P^{-1}APN = NP^{-1}AP$
- 1 pt : $P^{-1}APN = NP^{-1}AP \Leftrightarrow DN = ND \Leftrightarrow N \in C_D$

8. Déterminer C_D , en utilisant les coefficients des matrices.

• 1 pt : $DN = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ -2g & -2h & -2i \end{pmatrix}$ et $ND = \begin{pmatrix} 2a & b & -2c \\ 2d & e & -2f \\ 2g & h & -2i \end{pmatrix}$

- **1 pt : résolution système** $\{b = c = f = g = h = 0\}$

- **1 pt** $C_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, e, i) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

9. En déduire :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- **1 pt** : $M \in C_A \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$

- **2 pts : calcul de** $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\times \text{ 1 pt : } P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \text{ 1 pt : } P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & 0 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 & 0 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- **1 pt** : $C_A \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

- **1 pt** : $C_A \supset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

10. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A .

- **2 pts** : $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ base

× **1 pt** : caractère générateur

× **1 pt** : liberté

- **1 pt** : $\dim(C_A) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 3$

Exercice 3 (EDHEC 2004)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

- **3 pts** : $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ (**1 pt si la réponse est donnée sans argumentation**)

b) Démontrer : $\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- **1 pt** : introduction des P_i et F_i

- 1 pt : $[Z = 0] = \bigcap_{i=1}^n F_i$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (indépendance des lancers à citer)

c) Pour tout k de $Z(\Omega) \setminus \{0\}$, démontrer : $\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

- 1 pt : $[Z = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$
- 1 pt : $\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (indépendance des lancers à citer)

d) Vérifier : $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.

- 2 pts
 - × 1 pt : utilisation de la question précédente
 - × 1 pt : $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$

e) On rappelle que l'instruction `rd.binomial(1,0.5)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```

1  n = int(input(' Entrez un entier n : '))
2  Z = 0
3  k = 1
4  lancer = rd.binomial(1,0.5)
5  while lancer == 0 and k <= n:
6      k = k+1
7      lancer = rd.binomial(1,0.5)
8  if k != n+1:
9      Z = ...
10 print(Z)

```

- 2 pts :

9	Z = k
---	-------

- 2 pts supplémentaires si argumentation

On dispose de $n + 1$ urnes U_0, U_1, \dots, U_n telles que pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- × si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages,
- × si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

- 2 pts : $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

• 1 pt supplémentaire si argumentation

3. a) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i])$?
On distinguera les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$.

- 1 pt : $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) = 1$
- 1 pt : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i]) = 0$

b) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i])$?
On distinguera les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n - 1$.

- 2 pts : $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n]) = 1$
× 1 pt : résultat
× 1 pt : explication
- 1 pt : $\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i]) = 0$

c) Démontrer, pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 3 pts : si $0 \leq i \leq k$ alors $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-i}$
× 1 pt : si l'événement $[Z = k]$ est réalisé, c'est que...
× 1 pt : description de l'expérience
× 1 pt : description de la v.a.r. X
- 1 pt : si $k < i \leq n$ alors $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = 0$

4. a) Montrer : $\mathbb{P}([X = 0]) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.

- 1 pt : $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ SCE
- 1 pt : formule des proba totales $\mathbb{P}([X = 0]) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = 0])$
- 1 pt : $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = 0]) = \mathbb{P}([Z = 0]) \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = 0]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = 0]) + \mathbb{P}([Z = n]) \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = 0])$
- 1 pt : calcul $\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n-k}{n}\right)^k$

b) Montrer : $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2^n}$.

- 1 pt : $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ SCE et formule des proba totales $\mathbb{P}([X = n]) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = n])$
- 1 pt : $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = n]) = \mathbb{P}([Z = 0]) \mathbb{P}_{[Z=0]}([X = n]) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = n]) + \mathbb{P}([Z = n]) \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = n])$
- 1 pt : calcul $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{2^n}$

c) Démontrer, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$: $\mathbb{P}([X = i]) = \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$.

• **1 pt** : $([Z = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ **SCE et formule des proba totales** $\mathbb{P}([X = i]) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([Z = k] \cap [X = i])$

• **1 pt** : $\sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([Z = k]) \mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = 0$

• **1 pt** : **calcul** $\mathbb{P}([X = i]) = \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) = 1$.

• **1 pt** : $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) = \left(\frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} + \frac{1}{2^n}$

• **1 pt** : $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k$

• **1 pt** : $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{k}{2n}\right)^i \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-i} - \binom{k}{0} \left(\frac{k}{2n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k-0}\right)$

• **1 pt** : $= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(\frac{k}{2n} + \frac{n-k}{2n}\right)^k - \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\right)$ (**par binôme de Newton**)

• **1 pt** : $= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$

• **1 pt** : $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

• **1 pt** : **fin du calcul pour** $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = i]) = 1$

Problème (EDHEC 2003)

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties.

Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- × s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- × s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- × s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- × s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n)$$

- **2 pts** : (E_n, F_n, G_n, H_n) SCE (1 pt pour l'affirmer, 1 pt explication)
 - **1 pt** : formule des proba totales $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(F_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(G_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(H_n \cap E_{n+1})$
 - **1 pt** : $E_n \cap E_{n+1} = E_n \cap A_{n+1}$ et $F_n \cap E_{n+1} = F_n \cap A_{n+1}$
 - **1 pt** : $G_n \cap E_{n+1} = \emptyset$ et $H_n \cap E_{n+1} = \emptyset$
 - **1 pt** : fin calcul $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n)$
- b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $\mathbb{P}(F_{n+1})$, $\mathbb{P}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}(H_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.
- **1 pt** : $\mathbb{P}(F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{1}{3} \mathbb{P}(H_n)$
 - **1 pt** : $\mathbb{P}(G_{n+1}) = \frac{1}{3} \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(F_n)$
 - **1 pt** : $\mathbb{P}(H_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_n) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(H_n)$

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = M U_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

• **1 pt**

2. a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

• **1 pt** : $PQ = 10I_4$

• **1 pt** : $P^{-1} = \frac{1}{10} Q$

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$.

• **1 pt** : $QM = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou $MP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

• **1 pt** : $QMP = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

• **1 pt** : $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^n P^{-1}$.

• 1 pt : initialisation

• 2 pts : hérédité

b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geq 2, U_n = M^{n-2} U_2$.

• 1 pt : initialisation

• 2 pts : hérédité

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n , puis en déduire $\mathbb{P}(E_n), \mathbb{P}(F_n), \mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

• 1 pt : première colonne de $M^n = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $D^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $\begin{pmatrix} (-\frac{1}{3})^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n \\ 2(\frac{1}{6})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n \\ 1 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $P \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n \\ 2(\frac{1}{6})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-\frac{1}{3})^n + 2(\frac{1}{6})^n + 6(\frac{1}{2})^n + 3 \\ 2(-\frac{1}{3})^n - 2(\frac{1}{6})^n - 2(\frac{1}{2})^n + 2 \\ -2(-\frac{1}{3})^n - 2(\frac{1}{6})^n + 2(\frac{1}{2})^n + 2 \\ (-\frac{1}{3})^n + 2(\frac{1}{6})^n - 6(\frac{1}{2})^n + 3 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_2) \\ \mathbb{P}(F_2) \\ \mathbb{P}(G_2) \\ \mathbb{P}(H_2) \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $\begin{cases} \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{10} \left(-(-\frac{1}{3})^{n-2} + 2(\frac{1}{6})^{n-2} + 6(\frac{1}{2})^{n-2} + 3 \right) \\ \mathbb{P}(F_n) = \frac{1}{10} \left(2(-\frac{1}{3})^{n-2} - 2(\frac{1}{6})^{n-2} - 2(\frac{1}{2})^{n-2} + 2 \right) \\ \mathbb{P}(G_n) = \frac{1}{10} \left(-2(-\frac{1}{3})^{n-2} - 2(\frac{1}{6})^{n-2} + 2(\frac{1}{2})^{n-2} + 2 \right) \\ \mathbb{P}(H_n) = \frac{1}{10} \left((-\frac{1}{3})^{n-2} + 2(\frac{1}{6})^{n-2} - 6(\frac{1}{2})^{n-2} + 3 \right) \end{cases}$

d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

• 2 pts : $-\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, $\frac{1}{6} \in]-1, 1[$, $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k .

- **2 pts** : $E_k \cup F_k = A_k$

b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k .

- **1 pt** : $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$

- **1 pt** : $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(E_k \cup F_k) = \mathbb{P}(E_k) + \mathbb{P}(F_k)$ **dont l'incompatibilité**

- **1 pt** : calcul

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.

- **1 pt** : $\mathbb{P}([S_2 = 2]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$

- **1 pt** : $[S_3 = 2] = \overline{A_3}$

- **1 pt** : calcul $\mathbb{P}(\overline{A_3}) = 1 - \mathbb{P}(A_3) = 1 - \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} + 5 \right) = \frac{1}{3}$

- **1 pt** : $[S_n = 2] = \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} \cap \dots \cap \overline{A_n}$

- **1 pt** : formule des probas composées

- **1 pt** : $\mathbb{P}_{\overline{A_3}}(\overline{A_4}) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{A_3}}(A_4) = 1 - \mathbb{P}_{A_2 \cap \overline{A_3}}(A_4) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- **1 pt** : $\mathbb{P}_{\overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) = \mathbb{P}_{\overline{A_{k-1}} \cap \overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}})$ **et calcul**

b) Déterminer $\mathbb{P}([S_n = n])$.

- **1 pt** : $[S_n = n] = A_3 \cap \dots \cap A_n$

- **1 pt** : **FPC** $\mathbb{P}([S_n = n]) = \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(A_4) \times \prod_{k=4}^{n-1} \mathbb{P}_{A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)$

- **1 pt** : $\mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{3}$ **et** $\mathbb{P}_{A_3}(A_4) = \frac{2}{3}$

- **1 pt** : $\mathbb{P}_{A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) = \mathbb{P}_{A_{k-2} \cap A_{k-1}}(A_k)$ **et calcul**

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k , puis déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n .

- **1 pt** : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

- **1 pt** : la v.a.r. admet une espérance

- **1 pt** : linéarité de l'espérance

- **1 pt** : $X_1 = 1 = X_2$

- **1 pt** : sommes géométriques (formule connue)

- **2 pts** : calcul et résultat $\mathbb{E}(S_n) = \frac{11}{8} + \frac{1}{40} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-2} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}$