

DS2 (version B) - Barème - ESSEC I 2013

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p , où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1. On suppose que l'on dispose d'une fonction **Python** `simulN()` (resp. `simulU()`) qui simule la variable aléatoire N (resp. la variable aléatoire U_1). Écrire une fonction **Python** `simulX()` qui simule la variable aléatoire X .

- 1 pt : initialisation N et S
- 1 pt : taille boucle for
- 1 pt : mise à jour de S
- 1 pt : point bonus si tout est correct

```
1 def simulX():
2     N = simulN()
3     S = 0
4     for k in range(N):
5         S = S + simulU()
6     return S
```

2. Pour n dans \mathbb{N}^* , quelle est la loi de X_n ?

- 1 pt : les variables aléatoires U_k sont indépendantes
- 1 pt : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

3. Pour tout entier naturel j , établir : $r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) p_n$.

- 1 pt : $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$ SCE
- 1 pt : FPT
- 1 pt : $[N = n] \cap [X = j] = [N = n] \cap [X_n = j]$
- 1 pt : N et X_n indépendantes par lemme des coalitions

4. Dans cette question 4., on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m , entier naturel, et π , réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

- 1 pt : $X(\Omega) \subset \llbracket 0, m \rrbracket$
- 1 pt : si $j > m$, $[X = j] = \emptyset$

b) Établir que pour tout $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$: $r_j = \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.

- 1 pt : utilisation qst 3. avec $([N = n])_{n \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ SCE
- 1 pt : découpage somme
- 1 pt : $r_j = \sum_{n=j}^m \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n])$

- 1 pt : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)$

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leq j \leq n \leq m$: $\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$.

- 2 pts

d) En déduire, pour tout $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$: $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} ((1-p)\pi)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

- 1 pt : utilisation 4.b) et 4.c) ($r_j = \binom{m}{j} p^j \sum_{n=j}^m \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$)

(pas de point si la justification $0 \leq j \leq n \leq m$ n'est pas donnée)

- 1 pt : décalage d'indice ($r_j = \binom{m}{j} p^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell \pi^{\ell+j} (1-\pi)^{m-(\ell+j)}$)

- 1 pt : $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} ((1-p)\pi)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π .

- 2 pts (1 pt pour formule du binôme de Newton, 1 pt pour reste du calcul et conclusion $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\pi)$)

5. On suppose dans cette question 5. que N suit la loi de Poisson de paramètre λ , réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j , on a :

$$r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (\lambda(1-p))^{n-j}$$

- 1 pt : $r_j = \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n])$

- 2 pts : $r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (\lambda(1-p))^{n-j}$

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ .

- 3 pts (1 pt pour décalage d'indice, 1 pt pour la série exponentielle de paramètre $\lambda(1-p)$, 1 pt pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$)

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\binom{y}{0} = 1$.

6. Écrire une fonction **Python** `coeffBin(y, k)` qui, prenant en arguments un réel y et un entier naturel non nul k , renvoie $\binom{y}{k}$.

- 1 pt : initialisation de `c`

- 1 pt : boucle `for` de bonne taille

- 2 pt : mise à jour de `c`

```

1 def coeffBin(y, k):
2     c = 1
3     for i in range(k):
4         c = c * (y-i)/(i+1)
5     return c

```

7. La formule du binôme négatif.

Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0, 1[$.

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt$.

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0, x] : 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

- 1 pt : $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x \Leftrightarrow x \geq t \geq xt$

- 1 pt : $xt \leq t$ car $x \in [0, 1[$

- 1 pt : $0^n \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0, +\infty[$

- 1 pt : $0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leq \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}}$ car $\frac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0$

- 1 pt : $0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leq \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^{c+1}$ sur $[0, +\infty[$ (car $c > 0$)

- 1 pt : croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq x$)

- 1 pt : $\int_0^x \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}} dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^* : \binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

- 2 pts (1 pt pour changement d'indice $k = n - i$, 1 pt pour reste)

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leq t$.

- 2 pts (1 pt pour concavité de $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0, +\infty[$, 1 pt pour équation de tangente en 0)

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geq 2 : \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

- 2 pts : (1 pt pour $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$, 1 pt pour $k \geq 2 \Rightarrow -\frac{1}{k} \in]-1, +\infty[$) OU (comparaison série-intégrale) OU (IAF)

- 2 pts : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$ (1 pt pour sommation de 2 à n , 1 pt pour ajouter 1)

(iv) Montrer que pour tout n dans \mathbb{N}^* : $\ln \left(\binom{c+n}{n} \right) \leq c(1 + \ln(n))$.

En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

- 1 pt : $\ln \left(\binom{c+n}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{c}{k} \right)$ (7.b)(i)

- 1 pt : $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{c}{k} \right) \leq c \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (7.b)(ii)

- 1 pt : $c \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq c(1 + \ln(n))$ (7.b)(iii)

- 1 pt : $\binom{c+n}{n} \leq \exp(c(1 + \ln(n)))$ (croissance de exp sur \mathbb{R})

- 1 pt : $\exp(c + c \ln(n)) x^{n+1} = \exp \left(n \ln(x) \left(\frac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} + \frac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) \right)$

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(n \ln(x) \left(\frac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} + \frac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) \right) = 0$

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ par théorème d'encadrement

c) En conclure que la série $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

- 1 pt : $0 \leq c \binom{c+n}{n} I_n \leq \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$ (7.a)

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0$ par théorème d'encadrement (7.b)

- 1 pt : $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$ (avec égalité de l'énoncé)

8. Soit p un réel de $]0, 1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p .

- 1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}, p_k \geq 0$

- 2 pts : $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ (1 pt pour application de la question précédente à $c = r$ et $x = 1 - p$, 1 pt pour le reste)

9. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p , reconnaître la loi de $Y + 1$.

- 1 pt : $(Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y + 1 = k]) = p_{k-1} = (1-p)^{k-1} p$

- 1 pt : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

10. *Espérance et variance.*

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0, 1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$.

- 2 pts

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \frac{r(1-p)}{p}$.

- 1 pt : Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([Z = k]) = r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1}$

- 2 pts : $r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} = r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W = k])$ (où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)

- 1 pt : $([W = k])_{k \in \mathbb{N}}$ SCE, donc $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}([W = n])$ converge et sa somme vaut 1

- 1 pt : Z admet une espérance et $\mathbb{E}(Z) = r \frac{1-p}{p}$

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} n(n-1) \mathbb{P}([Z = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- 3 pts : $\sum_{k=0}^n k(k-1) \mathbb{P}([Z = k]) = r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} k \mathbb{P}([W = k])$ (où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)

- 1 pt : W admet une espérance et $\mathbb{E}(W) = (r+1) \frac{1-p}{p}$

- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance et $\mathbb{E}(Z(Z-1)) = (r+1)r \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$

- 1 pt : $Z^2 = Z(Z-1) + Z$ donc Z^2 admet une espérance

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z^2) = (r+1)r \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r \frac{1-p}{p}$

- 1 pt : formule de Koenig-Huygens

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z) = r \frac{1-p}{p^2}$

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N = k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b , avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

11. Détermination des lois de Panjer.

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.

Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b .

- 1 pt : $p_k = p_0 \frac{b^k}{k!}$

- 1 pt : SCE : $1 = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$

- 1 pt : série exponentielle $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p_0 (e^b - 1)$

- 1 pt : $p_0 = e^{-b}$ et $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r , tel que : $\forall k > r, p_k = 0$ et $\forall k \leq r, p_k \neq 0$.
 On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

- 2 pts : le choix de $k_0 = \left\lceil -\frac{b}{a} - 1 \right\rceil$ permet d'obtenir $p_{k_0} < 0$

- 2 pts : $r = s - 1$ où $s = \min(\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\})$

Noter généreusement et valoriser toute prise d'initiative.

(ii) Montrer : $b = -a(r + 1)$.

- 1 pt : $p_{r+1} = \left(a + \frac{b}{r+1}\right) p_r = 0$

- 1 pt : conclusion $b = -a(r + 1)$

(iii) Établir que pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.

En déduire que $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$.

- 1 pt : pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p_k = p_0 (-a)^k \binom{r}{k}$ par calcul

- 1 pt : cas $k = 0$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = 1$

- 1 pt : reste du calcul et conclusion $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b .

- 1 pt : pour tout $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $\mathbb{P}([N = k]) = \binom{r}{k} \left(-\frac{a}{1-a}\right)^k \left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k}$
- 1 pt : si $k \geq r + 1$, $\mathbb{P}([N = k]) = 0$
- 1 pt : finalement : $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\frac{b}{a} - 1, -\frac{a}{1-a}\right)$

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k , on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$.

- 2 pts : calcul

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b .

- 1 pt : $1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k$

- 1 pt : $p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}$

- 1 pt : N suit la loi binomiale négative de paramètres $\frac{b}{a} + 1$ et $1-a$ (car $p_k = \binom{(\frac{b}{a} + 1) + k - 1}{k} a^k$)

12. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$.

- 1 pt : cas $a = 0$: $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ et $\mathbb{E}(N) = b = \frac{0+b}{1-0}$ et $\mathbb{V}(N) = b = \frac{0+b}{(1-0)^2}$

- 1 pt : cas $a < 0$: $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\frac{b}{a} - 1, -\frac{a}{1-a}\right)$ donc la v.a.r. N admet donc une espérance et une variance

- 1 pt : cas $a < 0$: $\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$

- 1 pt : cas $a > 0$: N suit une loi binomiale négative de paramètres $\frac{b}{a} + 1$ et $1-a$ donc admet une espérance et une variance

- 1 pt : $\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$

Partie IV – L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un évènement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $\mathbb{E}_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A .

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}([X_n = 0])$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n$.

- 1 pt : justification $\mathbb{P}\left(\left[\sum_{k=1}^n U_k = 0\right]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [U_k = 0]\right)$

- 1 pt : indépendance et même loi cités

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = q_0^n$

- 1 pt : lemme des coalitions cité pour indépendance de X_n et N

14. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n)$? En déduire : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1) = \frac{j}{n}$.

- 1 pt : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n)$ existe

- 1 pt : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_n = k]) = j$

- 1 pt : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_k)$ existe

- 1 pt : linéarité de l'espérance

b) Établir : $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) \mathbb{P}([X_n = j]) p_{n-1}$.

- 1 pt : $[X = j] \cap [N = 0] = \emptyset$ car $j \neq 0$

- 1 pt : $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}$

- 1 pt : $\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right)$ existe par transformation affine

- 1 pt : linéarité de l'espérance et $\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) = a + \frac{b}{n}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) \mathbb{P}([X_n = j]) = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b i}{j}\right) \mathbb{P}([U_1 = i]) \mathbb{P}([X_{n-1} = j - i])$$

- 1 pt : formule correcte du thm de transfert

- 1 pt : $[U_1 = i] \cap [X_n = j] = [U_1 = i] \cap \left[\sum_{k=2}^n U_k = j - i\right]$

- 1 pt : indépendance des U_k

- 1 pt : $\sum_{k=2}^n U_k$ et $\sum_{k=1}^{n-1} U_k$ suivent la même loi

d) En conclure : $r_j = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b i}{j}\right) q_i r_{j-i}$, puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - a q_0} \left(\sum_{i=1}^j \left(a + \frac{b i}{j}\right) q_i r_{j-i} \right)$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombre r_j et ainsi de déterminer la loi de X .

- 1 pt : interversion des deux sommes

- 1 pt : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j - i]) p_n = \mathbb{P}([X = j - i]) = r_{j-i}$

- 1 pt : $r_j = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b i}{j}\right) q_i r_{j-i}$

- 1 pt : justification $1 - a q_0 \neq 0$

- 1 pt : $r_j = \frac{1}{1 - a q_0} \left(\sum_{i=1}^j \left(a + \frac{b i}{j}\right) q_i r_{j-i} \right)$

15. Des exemples d'application.

a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p .

(i) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $r_j = \frac{p}{1-a+ap} \left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}$.

En déduire que X suit une loi de Panjer.

- 1 pt : $U_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ donc

$$\begin{cases} q_0 = 1 - p \\ q_1 = p \\ \forall i \geq 2, q_i = 0 \end{cases}$$

- 2 pt : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a', b')$ où $a' = \frac{ap}{1-a+ap}$ et $b' = \frac{bp}{1-a+ap}$

(ii) Retrouver les résultats des questions 4. et 5. de la partie I.

- 3 pt : si $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\pi)$ (selon la qualité de la rédaction)

- 1 pt : si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b .

Soit p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

(i) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombre $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* (loi logarithme discrète). On pose $q_0 = 0$.

On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

- 1 pt : la série $\sum \frac{p^i}{i}$ converge

- 1 pt : unicité

- 1 pt : existence

(ii) Montrer que pour tout entier $j \geq 1$, on a : $r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^j p^i r_{j-i}$.

- 1 pt : utilisation de $a = 0$

- 1 pt : utilisation de l'hypothèse faite sur les U_k

(iii) En utilisant un changement d'indice, établir pour tout $j \geq 2$: $r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1}$, puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

- 1 pt : relation de Chasles justifiée par $j \geq 2$

- 1 pt : décalage d'indice

- 1 pt : $\sum_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i} = \frac{j-1}{b\alpha} r_{j-1}$ justifiée par $\alpha \neq 0$ et $b \neq 0$

- 1 pt : fin du calcul

- 1 pt : vérification pour $j = 1$

(iv) Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b , α et p .

- 1 pt : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a', b')$ où $a' = p$ et $b' = p(b\alpha - 1)$

- 1 pt : $p > 0$ donc X suit une loi binomiale négative

- 1 pt : les paramètres sont $\frac{b'}{a'} + 1 = b\alpha$ et $1 - a' = 1 - p$