DS2 (version B) - Barème - ESSEC I 2013

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

1. On suppose que l'on dispose d'une fonction **Python** `simulN()` (resp. `simulU()`) qui simule la variable aléatoire N (resp. la variable aléatoire U_1). Écrire une fonction **Python** `simulX()` qui simule la variable aléatoire X.

- **1 pt : initialisation `N` et `S`**
- **1 pt : taille boucle `for`**
- **1 pt : mise à jour de `S`**
- **1 pt : point bonus si tout est correct**

```python
def simulX():
    N = simulN()
    S = 0
    for k in range(N):
        S = S + simulU()
    return S
```

2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?

- **1 pt : les variables aléatoires U_k sont indépendantes**
- **1 pt :** $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

3. Pour tout entier naturel j, établir : $r_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_n$.

- **1 pt :** $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$ **SCE**
- **1 pt : FPT**
- **1 pt :** $[N = n] \cap [X = j] = [N = n] \cap [X_n = j]$
- **1 pt :** N **et** X_n **indépendantes par lemme des coalitions**

4. Dans cette question ***3.***, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m, entier naturel, et π, réel dans $]0,1[$. Soit j un entier naturel.

a) Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.

- **1 pt :** $X(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$
- **1 pt : si** $j > m$**,** $[X = j] = \varnothing$

b) Établir que pour tout $j \in [\![0, m]\!]$: $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.

- **1 pt : utilisation qst *2.* avec** $([N = n])_{n\in[\![0,m]\!]}$ **SCE**
- **1 pt : découpage somme**
- **1 pt :** $r_j = \sum\limits_{n=j}^{m} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}([N = n])$

- 1 pt : $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m,\pi)$

c) Vérifier que pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leqslant j \leqslant n \leqslant m$: $\binom{n}{j}\binom{m}{n} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$.

- 2 pts

d) En déduire, pour tout $j \in [\![0,m]\!]$: $r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$.

- 1 pt : utilisation *3.b)* et *3.c)* ($r_j = \binom{m}{j} p_j \sum\limits_{n=j}^{m} \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j}\pi^n(1-\pi)^{m-n}$)

- 1 pt : décalage d'indice ($r_j = \binom{m}{j} p_j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell \pi^{\ell+j}(1-\pi)^{m-(\ell+j)}$)

- 1 pt : $r_j = \binom{m}{j}(p\pi)^j \sum\limits_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} \big((1-p)\pi\big)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$

e) Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m, p et π.

- 2 pts (1 pt pour formule du binôme de Newton, 1 pt pour reste du calcul)

5. On suppose dans cette question ***4.*** que N suit la loi de Poisson de paramètre λ, réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel j, on a :

$$r_j = \mathrm{e}^{-j}\,\frac{(\lambda\,p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$$

- 1 pt : $r_j = \sum\limits_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\,\mathbb{P}([N=n])$

- 2 pts : $r_j = \mathrm{e}^{-j}\,\frac{(\lambda\,p)^j}{j!} \sum\limits_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} \big(\lambda(1-p)\big)^{n-j}$

b) En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ.

- 3 pts (1 pt pour décalage d'indice, 1 pt pour la série exponentielle de paramètre $\lambda(1-p)$, 1 pt pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\,p)$)

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!}\prod\limits_{i=0}^{k-1}(y-i)$, et $\binom{y}{0} = 1$.

6. Écrire une fonction **Python** `coeffBin(y, k)` qui, prenant en arguments un réel y et un entier naturel non nul k, renvoie $\binom{y}{k}$.

- 1 pt : initialisation de `c`

- 1 pt : boucle `for` de bonne taille

- 2 pt : mise à jour de `c`

```
def coeffBin(y, k):
    c = 1
    for i in range(k):
        c = c * (y-i)/(i+1)
    return c
```

7. *La formule du binôme négatif.*
Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0,1[$.
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}}\,dt$.
On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{c+k-1}{k} x^k + c\binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$: $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.
En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x \;\Leftrightarrow\; x \geqslant t \geqslant xt$
- **1 pt :** $xt \leqslant t$ **car** $x \in [0,1[$
- **1 pt :** $0^n \leqslant \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leqslant x^n$ **par croissance de la fonction** $t \mapsto t^n$ **sur** $[0,+\infty[$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \dfrac{x^n}{(1-t)^{c+1}}$ **car** $\dfrac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leqslant \dfrac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$ **par croissance de la fonction** $t \mapsto t^{c+1}$ **sur** $[0,+\infty[$ **(car** $c > 0$**)**
- **1 pt : croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant x)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}\,dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$

b) (i) Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\dbinom{c+n}{n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{c}{k}\right)$.

- **2 pts (1 pt pour changement d'indice** $k = n-i$**, 1 pt pour reste)**

(ii) Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leqslant t$.

- **2 pts (1 pt pour concavité de** $t \mapsto \ln(1+t)$ **sur** $[0,+\infty[$**, 1 pt pour équation de tangente en** 0**)**

(iii) Établir, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.

- **2 pts : (1 pt pour** $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$**, 1 pt pour** $k \geqslant 2 \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{k} \in\,]-1,+\infty[$**)** `OU` **(comparaison série-intégrale)** `OU` **(IAF)**
- **2 pts :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$ **(1 pt pour sommation de** 2 **à** n**, 1 pt pour ajouter** 1**)**

(iv) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) \leqslant c\,(1+\ln(n))$.

En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

- 1 pt : $\ln\left(\binom{c+n}{n}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{c}{k}\right)$ ***(6.b)(i))***

- 1 pt : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{c}{k}\right) \leqslant c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ***(6.b)(ii))***

- 1 pt : $c \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant c(1+\ln(n))$ ***(6.b)(iii))***

- 1 pt : $\binom{c+n}{n} \leqslant \exp\big(c(1+\ln(n))\big)$ **(croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**)**

- 1 pt : $\exp(c+c\,\ln(n))\,x^{n+1} = \exp\left(n\,\ln(x)\left(\dfrac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \dfrac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right)$

- 1 pt : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\,\ln(x)\left(\frac{c+\ln(x)}{n\,\ln(x)} + \frac{c\,\ln(n)}{n\,\ln(x)} + 1\right)\right) = 0$

- 1 pt : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ **par théorème d'encadrement**

c) En conclure que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

- 1 pt : $0 \leqslant c\binom{c+n}{n} I_n \leqslant \dfrac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$ ***(6.a))***

- 1 pt : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c\binom{c+n}{n} I_n = 0$ **par théorème d'encadrement (*6.b*))**

- 1 pt : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ **converge et :** $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$ **(avec égalité de l'énoncé)**

8. Soit p un réel de $]0,1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k\,p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p.

- 1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}$**,** $p_k \geqslant 0$

- 2 pts : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ **(1 pt pour application de la question précédente à** $c = r$ **et** $x = 1-p$**, 1 pt pour le reste)**

9. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p, reconnaître la loi de $Y+1$.

- 1 pt : $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Y+1=k]) = p_{k-1} = (1-p)^{k-1}\,p$

- 1 pt : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)$

10. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in \,]0,1[$.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$: $k \dbinom{r+k-1}{k} = r \dbinom{r+k-1}{k-1}$.

- 2 pts

b) Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p}$.

- 1 pt : Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\, \mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([Z=k]) = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1}$

- 2 pts : $r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dbinom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k\, p^{r+1} = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W=k])$ **(où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)**

- 1 pt : $([W=k])_{k\in\mathbb{N}}$ **SCE, donc** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}([W=n])$ **converge et sa somme vaut** 1

- 1 pt : Z admet une espérance et $\mathbb{E}(Z) \ = \ r\ \dfrac{1-p}{p}$

c) Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.
On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(n-1)\, \mathbb{P}([Z=n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- 3 pts : $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\, \mathbb{P}([Z=k]) = r\ \dfrac{1-p}{p} \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, \mathbb{P}([W=k])$ **(où W suit la loi binomiale négative de paramètres $r+1$ et p)**

- 1 pt : W admet une espérance et $\mathbb{E}(W) = (r+1)\ \dfrac{1-p}{p}$

- 1 pt : $Z(Z-1)$ admet une espérance et $\mathbb{E}\big(Z(Z-1)\big) \ = \ (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2$

- 1 pt : $Z^2 \ = \ Z(Z-1) + Z$ **donc Z^2 admet une espérance**

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z^2) = (r+1)r\ \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 + r\ \dfrac{1-p}{p}$

- 1 pt : formule de Koenig-Huygens

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z) \ = \ r\ \dfrac{1-p}{p^2}$

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = \mathbb{P}([N = k])$ pour $k \in \mathbb{N}$.
On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b, avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

11. *Détermination des lois de Panjer.*

a) Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod\limits_{i=1}^{k} \left(a + \dfrac{b}{i}\right)$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

- 1 pt : $p_k \;=\; p_0 \, \dfrac{b^k}{k!}$

- 1 pt : FPT : $1 = p_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k$

- 1 pt : série exponentielle $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = p_0\,(\mathrm{e}^b - 1)$

- 1 pt : $p_0 = \mathrm{e}^{-b}$ **et** $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$

c) Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel r, tel que : $\forall k > r$, $p_k = 0$ et $\forall k \leqslant r$, $p_k \neq 0$.
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.

- 2 pts : le choix de $k_0 = \left\lceil -\dfrac{b}{a} - 1 \right\rceil$ **permet d'obtenir** $p_{k_0} < 0$

- 2 pts : $r = s - 1$ **où** $s = \min\ (\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\})$

Noter généreusement et valoriser toute prise d'initiative.

(ii) Montrer : $b = -a(r + 1)$.

- 1 pt : $p_{r+1} \;=\; \left(a + \dfrac{b}{r+1}\right) p_r = 0$

- 1 pt : conclusion $b = -a(r + 1)$

(iii) Établir que pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $p_k = (-a)^k \dbinom{r}{k} p_0$.
En déduire que $p_0 = \dfrac{1}{(1 - a)^r}$.

- 1 pt : pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $p_k = p_0\ (-a)^k\ \binom{r}{k}$ **par calcul**

- 1 pt : cas $k = 0$

- 1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = 1$

- 1 pt : reste du calcul et conclusion $p_0 = \dfrac{1}{(1 - a)^r}$

(iv) En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b.

- 1 pt : pour tout $k \in [\![0, r]\!]$**,** $\mathbb{P}([N=k]) = \binom{r}{k} \left(-\dfrac{a}{1-a}\right)^k \left(\dfrac{1}{1-a}\right)^{r-k}$

- 1 pt : si $k \geqslant r+1$**,** $\mathbb{P}([N=k]) = 0$

- 1 pt : finalement : $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$

d) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k\, p_0$.

- 2 pts : calcul

(ii) En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b.

- 1 pt : $1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N=k]) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k$

- 1 pt : $p_0 = (1-a)^{\frac{b}{a}+1}$

- 1 pt : N **suit la loi binomiale négative de paramètres** $\dfrac{b}{a}+1$ **et** $1-a$ **(car** $p_k = \binom{(\frac{b}{a}+1)+k-1}{k} a^k$**)**

12. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

- 1 pt : cas $a=0$ **:** $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ **et** $\mathbb{E}(N) = b = \dfrac{0+b}{1-0}$ **et** $\mathbb{V}(N) = b = \dfrac{0+b}{(1-0)^2}$

- 1 pt : cas $a<0$ **:** $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(-\dfrac{b}{a} - 1, -\dfrac{a}{1-a}\right)$ **donc la v.a.r.** N **admet donc une espérance et une variance**

- 1 pt : cas $a<0$ **:** $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ **et** $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$

- 1 pt : cas $a>0$ **:** N **suit une loi binomiale négative de paramètres** $\dfrac{b}{a}+1$ **et** $1-a$ **donc admet une espérance et une variance**

- 1 pt : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{a+b}{1-a}$ **et** $\mathbb{V}(N) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$

Partie IV – L'algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l'introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un évènement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $\mathbb{E}_A(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_0^n\, p_n$.

- 1 pt : justification $\mathbb{P}\left(\left[\sum\limits_{k=1}^{n} U_k = 0\right]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} [U_k = 0]\right)$

- 1 pt : indépendance et même loi cités

- 1 pt : $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = q_0^n$

- 1 pt : lemme des coalitions cité pour indépendance de X_n et N

14. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n)$? En déduire : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1) = \dfrac{j}{n}$.

- 1 pt : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n)$ **existe**

- 1 pt : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_n = k]) = j$

- 1 pt : $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_k)$ **existe**

- 1 pt : linéarité de l'espérance

b) Établir : $r_j = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) \left(a + \dfrac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \dfrac{b}{j}U_1\right) \mathbb{P}\big([X_n = j]\big)p_{n-1}$.

- 1 pt : $[X = j] \cap [N = 0] = \varnothing$ **car** $j \neq 0$

- 1 pt : $r_j = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) \left(a + \dfrac{b}{n}\right) p_{n-1}$

- 1 pt : $\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \dfrac{b}{j}U_1\right)$ **existe par transformation affine**

- 1 pt : linéarité de l'espérance et $\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \dfrac{b}{j}U_1\right) = a + \dfrac{b}{n}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j}U_1\right) \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \sum_{i=0}^{j} \left(a + \frac{b\,i}{j}\right) \mathbb{P}\big([U_1 = i]\big)\mathbb{P}\big([X_{n-1} = j - i]\big)$$

- 1 pt : formule correcte du thm de transfert

- 1 pt : $[U_1 = i] \cap [X_n = j] = [U_1 = i] \cap \left[\sum\limits_{k=2}^{n} U_k = j - i\right]$

- 1 pt : indépendance des U_k

- 1 pt : $\sum\limits_{k=2}^{n} U_k$ **et** $\sum\limits_{k=1}^{n-1} U_k$ **suivent la même loi**

d) En conclure : $r_j = \sum\limits_{i=0}^{j} \left(a + \dfrac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$, puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0} \left(\sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{b\,i}{j}\right) q_i r_{j-i}\right)$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombre r_j et ainsi de déterminer la loi de X.

- 1 pt : interversion des deux sommes

- 1 pt : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = j - i]\big)p_n = \mathbb{P}([X = j - i]) = r_{j-i}$

- 1 pt : $r_j = \sum\limits_{i=0}^{j} \left(a + \dfrac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$

- 1 pt : justification $1 - aq_0 \neq 0$

- 1 pt : $r_j = \dfrac{1}{1 - aq_0} \left(\sum\limits_{i=1}^{j} \left(a + \dfrac{b\,i}{j}\right) q_i r_{j-i}\right)$

15. *Des exemples d'application.*

a) Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p.

(i) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $r_j = \dfrac{p}{1-a+ap}\left(a + \dfrac{b}{j}\right) r_{j-1}$.
En déduire que X suit une loi de Panjer.

- 1 pt : $U_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ donc

$$\begin{cases} q_0 = 1-p \\ q_1 = p \\ \forall i \geqslant 2, q_i = 0 \end{cases}$$

- 2 pt : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a', b')$ où $a' = \dfrac{ap}{1-a+ap}$ et $b' = \dfrac{bp}{1-a+ap}$

(ii) Retrouver les résultats des questions ***4.*** et ***5.*** de la partie I.

- 3 pt : si $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\pi)$ (selon la qualité de la rédaction)

- 1 pt : si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$

b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b.
Soit p un réel de l'intervalle $]0;1[$.

(i) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que la famille de nombre $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (*loi logarithme discrète*). On pose $q_0 = 0$.
On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

- 1 pt : la série $\sum \dfrac{p^i}{i}$ converge

- 1 pt : unicité

- 1 pt : existence

(ii) Montrer que pour tout entier $j \geqslant 1$, on a : $r_j = \dfrac{b\,\alpha}{j} \sum\limits_{i=1}^{j} p^i r_{j-i}$.

- 1 pt : utilisation de $a = 0$

- 1 pt : utilisation de l'hypothèse faite sur les U_k

(iii) En utilisant un changement d'indice, établir pour tout $j \geqslant 2$: $r_j = \left(p + \dfrac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1}$, puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

- 1 pt : relation de Chasles justifiée par $j \geqslant 2$

- 1 pt : décalage d'indice

- 1 pt : $\sum\limits_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i} = \dfrac{j-1}{b\alpha} r_{j-1}$ justifiée par $\alpha \neq 0$ et $b \neq 0$

- 1 pt : fin du calcul

- 1 pt : vérification pour $j = 1$

(iv) Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b, α et p.

- 1 pt : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a', b')$ où $a' = p$ et $b' = p(b\alpha - 1)$

- 1 pt : $p > 0$ donc X suit une loi binomiale négative

- 1 pt : les paramètres sont $\dfrac{b'}{a'} + 1 = b\alpha$ et $1 - a' = 1 - p$