

## DS2 (version B) - Correction - ESSEC I 2013

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

### Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ . On suppose que les variables  $U_k$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de  $N$  ;
- On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = \sum_{k=1}^n U_k$  et  $X_0$  est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire  $X$  définie par :

$$X = \sum_{k=1}^N U_k$$

et l'on précise que  $X = X_0 = 0$  si  $N$  prend la valeur 0. **On dit que  $X$  suit une loi composée.**

- Pour tout entier naturel  $j$ , on pose  $p_j = \mathbb{P}([N = j])$ ,  $q_j = \mathbb{P}([U_1 = j])$  et  $r_j = \mathbb{P}([X = j])$ .

### Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables  $U_k$  suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , où  $p$  est un réel de l'intervalle  $]0, 1[$ .

1. On suppose que l'on dispose d'une fonction **Python** `simulN()` (resp. `simulU()`) qui simule la variable aléatoire  $N$  (resp. la variable aléatoire  $U_1$ ). Écrire une fonction **Python** `simulX()` qui simule la variable aléatoire  $X$ .

*Démonstration.*

Les variables aléatoires  $U_k$  sont identiquement distribuées donc la fonction **Python** `simulU()` permet de simuler chacune d'elles. Il s'agit alors de calculer une somme dont la taille est donnée par la valeur (aléatoire) de  $N$ .

```
1 def simulX():
2     N = simulN()
3     S = 0
4     for k in range(N):
5         S = S + simulU()
6     return S
```

□

2. Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , quelle est la loi de  $X_n$  ?

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La v.a.r.  $X_n$  est une somme de  $n$  v.a.r. **indépendantes** de loi  $\mathcal{B}(p)$ , c'est-à-dire de loi  $\mathcal{B}(1, p)$ .

Par stabilité de la loi binomiale :  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

**Commentaire**

On rappelle la propriété de stabilité de la loi binomiale :  
Soit  $X_1, \dots, X_k$  des v.a.r. **indépendantes** telles que  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p), \dots, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$ .  
Alors :

$$\sum_{i=1}^k X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right)$$

□

3. Pour tout entier naturel  $j$ , établir :  $r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) p_n$ .

*Démonstration.*

La famille  $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$  forme un système complet d'événements.  
Ainsi, par la formule des probabilités totales, pour tout  $j \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} r_j = \mathbb{P}([X = j]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X = j]) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([N = n] \cap \left[\sum_{k=1}^N U_k = j\right]\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([N = n] \cap \left[\sum_{k=1}^n U_k = j\right]\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [X_n = j]) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n]) \times \mathbb{P}([X_n = j]) \quad (\text{car les v.a.r. } N \text{ et } X_n \text{ sont} \\ &\quad \text{indépendantes par lemme des coalitions}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \times \mathbb{P}([X_n = j]) \end{aligned}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) p_n$$

**Commentaire**

- Détaillons l'utilisation du lemme des coalitions.
  - × D'après l'énoncé, toutes les v.a.r. de la suite  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  sont indépendantes de  $N$ .  
En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les v.a.r.  $U_1, \dots, U_n$  sont indépendantes de  $N$ .
  - × Donc, par le lemme des coalitions, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la v.a.r.  $\sum_{k=1}^n U_k$  est indépendante de  $N$ .
- D'après l'énoncé, la variable aléatoire  $N$  est « à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ». Cela signifie exactement :  $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$  (et non  $N(\Omega) = \mathbb{N}$ ).
- On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille  $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$ . On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide.

□

4. Dans cette question 4., on suppose que  $N$  suit la loi binomiale de paramètres  $m$ , entier naturel, et  $\pi$ , réel dans  $]0, 1[$ . Soit  $j$  un entier naturel.

a) Justifier que  $r_j = 0$  si  $j > m$ .

*Démonstration.*

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ . Donc  $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$ .
- De plus,  $N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)$ . Donc  $N(\Omega) = \llbracket 0, m \rrbracket$ .

- Or :  $X = \sum_{k=1}^N U_k$ .

On en déduit :

- × au minimum, la v.a.r.  $X$  prend la valeur 0,
- × au maximum, la v.a.r.  $X$  prend la valeur  $m \times 1 = m$ .

Ainsi :  $X(\Omega) \subset \llbracket 0, m \rrbracket$ .

- Donc, si  $j > m$ , alors :  $[X = j] = \emptyset$ . D'où :

$$r_j = \mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Pour tout  $j > m : r_j = 0$ .

□

- b) Établir que pour tout  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket : r_j = \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$ .

*Démonstration.*

Soit  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$ .

La famille  $([N = n])_{n \in \llbracket 0, m \rrbracket}$  forme un système complet d'événements.

En procédant de la même manière qu'en question 3., on obtient :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=0}^m \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ j \in X_n(\Omega)}}^m \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) \\ &\quad + \sum_{\substack{n=0 \\ j \notin X_n(\Omega)}}^m \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) \quad (\text{car si } j \notin X_n(\Omega) \\ &\quad \text{alors } [X_n = j] = \emptyset) \\ &= \sum_{n=j}^m \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{ \begin{array}{l} n \in \llbracket 0, m \rrbracket \\ j \in X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 0, m \rrbracket \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq n \leq m \\ 0 \leq j \leq n \\ j \in \llbracket 0, m \rrbracket \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq n \leq m \\ j \leq n \\ j \in \llbracket 0, m \rrbracket \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} j \leq n \leq m \\ j \in \llbracket 0, m \rrbracket \end{array} \right\}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} r_j &= \sum_{n=j}^m \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) \\ &= \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \quad (\text{car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \\ &\quad \text{et } N \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \pi)) \end{aligned}$$

$$\forall j \in \llbracket 0, m \rrbracket, r_j = \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$$

**Commentaire**

- En question 3., on savait seulement :  $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ . Le meilleur système complet d'événements que nous pouvions considérer était donc  $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$  (contenant potentiellement plusieurs fois l'ensemble vide).
- Ici, d'après la question précédente, nous pouvons considérer le système complet d'événements plus précis  $([N = n])_{n \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ .

□

c) Vérifier que pour tous entiers  $j, n, m$  tels que  $0 \leq j \leq n \leq m$  :  $\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$ .

*Démonstration.*

Soit  $(j, n, m) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $0 \leq j \leq n \leq m$ .

- D'une part :

$$\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \frac{\cancel{n!}}{j! (n-j)!} \frac{m!}{\cancel{n!} (m-n)!} = \frac{m!}{j! (n-j)! (m-n)!}$$

- D'autre part :

$$\binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j} = \frac{m!}{j! \cancel{(m-j)!}} \frac{\cancel{(m-j)!}}{(n-j)! ((m-j) - (n-j))!} = \frac{m!}{j! (n-j)! (m-n)!}$$

Ainsi, pour tout  $(j, n, m) \in \mathbb{N}^3$  tel que  $0 \leq j \leq n \leq m$  :  $\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$ .

**Commentaire**

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.

Pour ce faire, on considère un ensemble  $E$  à  $m$  éléments.

*(on peut penser à une pièce qui contient  $m$  individus)*

On souhaite alors construire une partie  $P$  à  $n$  éléments de cet ensemble contenant  $j$  éléments distingués *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de  $n$  individus dans lequel figurent  $j$  représentants de ces individus)*.

Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à  $n$  éléments de  $E$  :  $\binom{m}{n}$  possibilités.

On distingue ensuite  $j$  éléments de cet ensemble  $P$  :  $\binom{n}{j}$  possibilités.

*(on choisit d'abord les  $n$  individus et on élit ensuite  $j$  représentants de ces individus)*

Ainsi, il y a  $\binom{n}{j} \binom{m}{n}$  manières de construire  $P$ .

2) On choisit d'abord, dans  $E$ , les  $j$  éléments à distinguer :  $\binom{m}{j}$  possibilités.

On choisit ensuite  $n-j$  éléments dans  $E$ , pour former  $P$ , en y ajoutant les  $j$  éléments précédents :  $\binom{m-j}{n-j}$  possibilités.

*(on choisit d'abord les  $j$  représentants puis on leur adjoint un groupe de  $n-j$  individus)*

Ainsi, il y a  $\binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$  manières de construire  $P$ .

On retrouve ainsi le résultat.

□

d) En déduire, pour tout  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$  :  $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} ((1-p)\pi)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$ .

*Démonstration.*

Soit  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$ .

$$\begin{aligned}
 r_j &= \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n} && \text{(d'après 4.b)} \\
 &= \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} \binom{m}{n} p^j (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \\
 &= \sum_{n=j}^m \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j} p^j (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n} && \text{(d'après 4.c)} \\
 &= \binom{m}{j} p^j \sum_{n=j}^m \binom{m-j}{n-j} (1-p)^{n-j} \pi^n (1-\pi)^{m-n} \\
 &= \binom{m}{j} p^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell \pi^{\ell+j} (1-\pi)^{m-(\ell+j)} && \text{(avec le décalage} \\
 & && \text{d'indice } \ell = n - j) \\
 &= \binom{m}{j} p^j \pi^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} (1-p)^\ell \pi^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}
 \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$  :

$$r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} ((1-p)\pi)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}.$$

□

e) Montrer finalement que  $X$  suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de  $m$ ,  $p$  et  $\pi$ .

*Démonstration.*

- D'après la question 4.a) :  $X(\Omega) \subset \llbracket 0, m \rrbracket$ .
- Soit  $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$ . D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 r_j &= \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} ((1-p)\pi)^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell} \\
 &= \binom{m}{j} (p\pi)^j ((1-p)\pi + (1-\pi))^{m-j} && \text{(par la formule du} \\
 & && \text{binôme de Newton)} \\
 &= \binom{m}{j} (p\pi)^j (\pi - p\pi + 1 - \pi)^{m-j} \\
 &= \binom{m}{j} (p\pi)^j (1-p\pi)^{m-j}
 \end{aligned}$$

On en déduit :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\pi)$ .

□

5. On suppose dans cette question 5. que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , réel strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel  $j$ , on a :

$$r_j = e^{-j} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (\lambda(1-p))^{n-j}$$

*Démonstration.*

Soit  $j \in \mathbb{N}$ . D'après la question 3. :

$$\begin{aligned}
 r_j &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) p_n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) \\
 &= \sum_{\substack{n=0 \\ j \in X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) + \sum_{\substack{n=0 \\ j \notin X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) \quad (\text{car } [X_n = j] = \emptyset) \\
 &= \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n])
 \end{aligned}$$

Comme  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  d'après la question 2., alors  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Donc la dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\begin{cases} n \in \llbracket 0, +\infty \llbracket \\ j \in X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\ j \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ j \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq n \\ j \leq n \\ j \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j \leq n \\ j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 r_j &= \sum_{n=j}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \mathbb{P}([N = n]) \\
 &= \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (\text{car } X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)) \\
 &= e^{-\lambda} p^j \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} \frac{1}{n!} (1-p)^{n-j} \lambda^n
 \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \binom{n}{j} \frac{1}{n!} = \frac{\cancel{n!}}{j! (n-j)! \cancel{n!}} \frac{1}{n!} = \frac{1}{j! (n-j)!}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 r_j &= e^{-\lambda} p^j \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{j! (n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^n \\
 &= e^{-\lambda} \frac{p^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^{(n-j)+j} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (1-p)^{n-j} \lambda^{n-j}
 \end{aligned}$$

Finalement, pour tout  $j \in \mathbb{N}$  :  $r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (\lambda(1-p))^{n-j}$ .

□

b) En déduire que  $X$  suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de  $p$  et  $\lambda$ .

*Démonstration.*

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ . Donc :  $U_k(\Omega) = \{0, 1\}$ .  
De plus, comme  $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  :  $N(\Omega) = \mathbb{N}$ .

Ainsi, par définition de  $X$  :  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ .

- Soit  $j \in \mathbb{N}$ . D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 r_j &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} (\lambda(1-p))^{n-j} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} (\lambda(1-p))^\ell && \text{(avec le décalage d'indice } \ell = n - j) \\
 &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{\lambda(1-p)} && \text{(car on reconnaît la série exponentielle} \\
 &&& \text{de paramètre } \lambda(1-p)) \\
 &= \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{-\lambda + \lambda(1-p)} \\
 &= \frac{(\lambda p)^j}{j!} e^{-\lambda p}
 \end{aligned}$$

On en déduit :  $X(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$

□

## Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout  $y$  réel et tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y - i)$ , et  $\binom{y}{0} = 1$ .

6. Écrire une fonction **Python** `coeffBin(y, k)` qui, prenant en arguments un réel  $y$  et un entier naturel non nul  $k$ , renvoie  $\binom{y}{k}$ .

*Démonstration.*

On remarque tout d'abord que, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y - i) = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (y - i)}{\prod_{i=0}^{k-1} (i + 1)} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{y - i}{i + 1}$$

On en déduit la fonction suivante :

```

1 def coeffBin(y, k):
2     c = 1
3     for i in range(k):
4         c = c * (y-i)/(i+1)
5     return c
    
```

### Commentaire

Notons que le choix d'initialiser  $c$  à 1 n'est pas anodin. La variable  $c$  étant un produit, on choisit le réel 1 car il s'agit de l'élément neutre pour le produit.

De même, pour initialiser une variable contenant une somme, on choisira plutôt l'élément neutre pour la somme, c'est-à-dire le réel 0.

□

7. La formule du binôme négatif.

Soit  $c$  un réel strictement positif, et  $x$  un réel de  $[0, 1[$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt$ .

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n$$

a) Vérifier que pour tout  $t \in [0, x] : 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ .

En déduire l'encadrement :  $0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$ .

*Démonstration.*

- Soit  $t \in [0, x]$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x &\Leftrightarrow 0 \leq x-t \leq x(1-t) && \text{(car, comme } t \leq x < 1, \\ &&& \text{alors : } 1-t > 0) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x-t \leq x-xt \\ &\Leftrightarrow -x \leq -t \leq -xt \\ &\Leftrightarrow x \geq t \geq xt \end{aligned}$$

Or on sait déjà :  $t \leq x$ .

De plus, comme  $x \in [0, 1[$ , on a :  $xt \leq t$ .

Le dernier encadrement est donc vérifié.

Par équivalence :  $\forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $t \in [0, x]$ .

$$0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x \quad \text{donc} \quad 0^n \leq \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n \quad \text{(car la fonction } t \mapsto t^n \text{ est croissante sur } [0, +\infty[)$$

$$\text{donc} \quad 0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \leq x^n$$

$$\text{donc} \quad 0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leq \frac{x^n}{(1-t)^{c+1}} \quad \text{(car } \frac{1}{(1-t)^{c+1}} > 0)$$

Or :  $t \leq x$ . Donc :  $1-t \geq 1-x$ .

Par croissance de la fonction  $t \mapsto t^{c+1}$  sur  $[0, +\infty[$  (car  $c > 0$ ) :  $(1-t)^{c+1} \geq (1-x)^{c+1}$ . Ainsi :

$$0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+c+1}} \leq \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}}$$

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $0 \leq x$ ) :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} dt$$

Donc :

$$\begin{aligned} 0 \leq I_n &\leq \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} \int_0^x dt \\ &= \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} [t]_0^x = \frac{x^n}{(1-x)^{c+1}} x \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}.$$

□

b) (i) Montrer, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  :  $\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{k}\right)$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par définition du coefficient binomial :

$$\begin{aligned} \binom{c+n}{n} &= \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} ((c+n) - i) \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (c+k) && \text{(avec le changement d'indice } k = n - i) \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n (c+k)}{\prod_{k=1}^n k} = \prod_{k=1}^n \frac{c+k}{k} \\ &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{c}{k} + 1\right) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{k}\right)$$

□

(ii) Montrer que pour tout réel  $t$  positif,  $\ln(1+t) \leq t$ .

*Démonstration.*

La fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  est concave sur  $] -1, +\infty[$ . Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0, droite d'équation :

$$y = x$$

$$\text{On en déduit : } \forall t \in ] -1, +\infty[, \ln(1+t) \leq t.$$

### Commentaire

L'énoncé demande seulement de montrer que cette inégalité est vraie pour tout  $t \in [0, +\infty[$ . Bien évidemment, celle-ci étant vraie sur  $] -1, +\infty[$ , elle l'est en particulier sur  $[0, +\infty[$ .

□

(iii) Établir, pour tout entier naturel  $k \geq 2$  :  $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ .

En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$ .

*Démonstration.*

- Soit  $k \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1) &\Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{k} \geq \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Or, comme  $k \geq 2$  :  $-\frac{1}{k} \in ]-1, +\infty[$ . On peut donc appliquer la question précédente et ainsi la dernière inégalité est vraie.

Par équivalence :  $\forall k \geq 2, \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ .

### Commentaire

- La démonstration présentée nécessite d'avoir démontré l'inégalité de la question précédente pour tout  $t \in ]-1, +\infty[$ .
- On pouvait également utiliser l'inégalité des accroissements finis.

On note  $g : t \mapsto \ln(t)$ . On sait :

- ×  $g$  est dérivable sur  $[k-1, k]$ ,
- ×  $\forall t \in [k-1, k], \frac{1}{k} \leq g'(t)$ .

On en déduit, par inégalités des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [k-1, k]^2, \frac{1}{k}(y-x) \leq g(y) - g(x)$$

En appliquant cette inégalité à  $y = k$  et  $x = k-1$ , on obtient :

$$\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

- On pouvait également procéder par intégration.

Tout d'abord :  $\forall t \in [k-1, k], \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$ .

Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $k-1 \leq k$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &\leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt \\ &\quad \parallel \\ &= [\ln(t)]_{k-1}^k = \ln(k) - \ln(k-1) \end{aligned}$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On somme l'inégalité précédente pour  $k$  variant de 2 à  $n$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} &\leq \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) \\ &\quad \parallel \\ &= \ln(n) - \ln(1) \end{aligned}$$

On ajoute 1 de chaque côté de l'inégalité :

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)}$$

□

(iv) Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  :  $\ln \left( \binom{c+n}{n} \right) \leq c(1 + \ln(n))$ .

En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ .

*Démonstration.*

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \ln \left( \binom{c+n}{n} \right) &= \ln \left( \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{c}{k} \right) \right) && \text{(d'après 7.b)(i)} \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{c}{k} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{c}{k} && \text{(d'après 7.b)(ii)} \\ &\leq c \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &\leq c(1 + \ln(n)) && \text{(d'après 7.b)(iii)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln \left( \binom{c+n}{n} \right) \leq c(1 + \ln(n))}$$

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Par croissance de la fonction  $\exp$  sur  $\mathbb{R}$ , on déduit de l'inégalité précédente :

$$\binom{c+n}{n} \leq \exp(c(1 + \ln(n)))$$

$$\boxed{\text{De plus } x^{n+1} \geq 0, \text{ donc : } 0 \leq \binom{c+n}{n} x^{n+1} \leq \exp(c + c \ln(n)) x^{n+1}.$$

• Or :

$$\begin{aligned} \exp(c + c \ln(n)) x^{n+1} &= \exp(c + c \ln(n)) \exp((n+1) \ln(x)) \\ &= \exp(c + c \ln(n) + (n+1) \ln(x)) \\ &= \exp(c + \ln(x) + c \ln(n) + n \ln(x)) \\ &= \exp \left( n \ln(x) \left( \frac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} + \frac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) \right) \end{aligned}$$

De plus :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} = 0$  et, par croissances comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{n \ln(x)} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ .

Ainsi :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} + \frac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 = 1$ .

Comme  $x \in [0, 1[$ , alors  $\ln(x) < 0$ . D'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(x) = -\infty$ .

On a donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(x) \left( \frac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} + \frac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) = -\infty$ .

Par composition par la fonction exp, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left( n \ln(x) \left( \frac{c + \ln(x)}{n \ln(x)} + \frac{c \ln(n)}{n \ln(x)} + 1 \right) \right) = 0$$

• Finalement :

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(c + c \ln(n)) x^{n+1} = 0$$

Par théorème d'encadrement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ .

□

c) En conclure que la série  $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$  est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

*Démonstration.*

• D'après l'énoncé, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c} - c \binom{c+n}{n} I_n$$

Pour démontrer que la série  $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$  est convergente et que sa somme vaut  $\frac{1}{(1-x)^c}$ , on va donc démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0$$

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 7.a) :

$$0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$$

On en déduit :

$$0 \leq c \binom{c+n}{n} I_n \leq \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1}$$

Or, d'après la question précédente :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$ .

Ainsi :

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{(1-x)^{c+1}} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$$

Par théorème d'encadrement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c \binom{c+n}{n} I_n = 0$ .

On en conclut que la série  $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$  converge et :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$ . □

8. Soit  $p$  un réel de  $]0, 1[$  et  $r$  un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par  $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r$  définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres  $r$  et  $p$ .

*Démonstration.*

• Comme  $p \in ]0, 1[$ , alors :

$$p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r \geq 0$$

• Montrons que la série  $\sum_{k \geq 0} p_k$  converge et que sa somme vaut 1.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r = p^r \sum_{k=0}^n \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k$$

On applique la question précédente à  $c = r$  et  $x = 1-p$  (on a bien  $c > 0$  et  $x \in [0, 1[$ ). On obtient que la série  $\sum_{k \geq 0} \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k$  converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r}$$

On en déduit que la série  $\sum_{k \geq 0} p_k$  converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p^r \frac{1}{p^r} = 1$$

On en conclut que la suite  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définit une loi de probabilité. □

9. Si  $Y$  est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et  $p$ , reconnaître la loi de  $Y + 1$ .

*Démonstration.*

On note  $V = Y + 1$ .

- Tout d'abord, comme  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ , on a :  $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .
- Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$[V = k] = [Y + 1 = k] = [Y = k - 1]$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([V = k]) &= \mathbb{P}([Y = k - 1]) = p_{k-1} \\ &= \binom{1+(k-1)-1}{k-1} (1-p)^{k-1} p^1 \quad (\text{car } Y \text{ suit la loi binomiale} \\ &= (1-p)^{k-1} p \quad \text{négative de paramètres 1 et } p) \end{aligned}$$

On reconnaît la loi géométrique de paramètre  $p : V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

□

10. *Espérance et variance.*

Soit  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres  $r$  réel strictement positif et  $p \in ]0, 1[$ .

a) Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$  :  $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \geq 1$ .

• D'une part :

$$k \binom{r+k-1}{k} = k \frac{(r+k-1)!}{k! (r+k-1-k)!} = \cancel{k} \frac{(r+k-1)!}{\cancel{k} (k-1)! (r-1)!} = \frac{(r+k-1)!}{(k-1)! (r-1)!}$$

• D'autre part :

$$r \binom{r+k-1}{k-1} = r \frac{(r+k-1)!}{(k-1)! (r+k-1-(k-1))!} = \cancel{r} \frac{(r+k-1)!}{(k-1)! \cancel{r} (r-1)!} = \frac{(r+k-1)!}{(k-1)! (r-1)!}$$

On en déduit :  $\forall k \geq 1, k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$ .

**Commentaire**

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.

Pour ce faire, on considère un ensemble  $E$  à  $r+k-1$  éléments.

*(on peut penser à une pièce qui contient  $r+k-1$  individus)*

On souhaite alors construire une partie  $P$  à  $k$  éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de  $k$  individus dans lequel figure 1 représentant de ces individus)*.

Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à  $k$  éléments de  $E$  :  $\binom{r+k-1}{k}$  possibilités.

On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble  $P$  :  $\binom{k}{1} = k$  possibilités.

*(on choisit d'abord les  $k$  individus et on élit ensuite 1 représentant de ces individus)*

Ainsi, il y a  $k \binom{r+k-1}{k}$  manières de construire  $P$ .

2) On choisit d'abord, dans  $E$ , une partie à  $(k-1)$  éléments :  $\binom{r+k-1}{k-1}$  possibilités.

On forme alors  $P$  en ajoutant à ces  $k-1$  éléments, l'élément à distinguer. Cet élément est choisi parmi les  $r+k-1-(k-1) = r$  éléments restants dans  $E$  :  $\binom{r}{1} = r$  possibilités.

*(on choisit d'abord  $k-1$  individus puis on leur adjoint 1 individu parmi les  $r$  restants dans  $E$ )*

Ainsi, il y a  $r \binom{r+k-1}{k-1}$  manières de construire  $P$ .

On retrouve ainsi le résultat. □

b) Montrer que  $Z$  admet une espérance et que l'on a :  $\mathbb{E}(Z) = \frac{r(1-p)}{p}$ .

*Démonstration.*

• La v.a.r.  $Z$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}([Z = n])$  est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([Z = k]) \\
 = & \sum_{k=0}^n k \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r \\
 = & p^r \sum_{k=1}^n k \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k \\
 = & p^r \sum_{k=1}^n r \binom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k && \text{(d'après la question précédente)} \\
 = & r p^r \sum_{k=0}^{n-1} \binom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} && \text{(par décalage d'indice)} \\
 = & r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} \\
 = & r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([W = k]) && \text{(où } W \text{ suit la loi binomiale négative} \\
 & && \text{de paramètres } r+1 \text{ et } p)
 \end{aligned}$$

Or la famille  $([W = k])_{k \in \mathbb{N}}$  forme un système complet d'événements. Donc la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}([W = n])$  converge et sa somme vaut 1.

On en déduit que  $Z$  admet une espérance.

De plus :

$$\mathbb{E}(Z) = r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([W = k]) = r \frac{1-p}{p} 1$$

$$\mathbb{E}(Z) = r \frac{1-p}{p}$$

□

- c) Montrer que  $Z$  admet une variance et que l'on a :  $\mathbb{V}(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ .

On pourra commencer par calculer l'espérance de  $Z(Z-1)$ .

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $Z(Z-1)$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 0} n(n-1) \mathbb{P}([Z = n])$  est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^n k(k-1) \mathbb{P}([Z = k]) \\
 = & \sum_{k=2}^n k(k-1) \mathbb{P}([Z = k]) \\
 = & \sum_{k=2}^n (k-1)k \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r \\
 = & p^r \sum_{k=2}^n (k-1)r \binom{r+k-1}{k-1} (1-p)^k && \text{(d'après la question 10.a)} \\
 = & r p^r \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{r+k}{k} (1-p)^{k+1} && \text{(par décalage d'indice)} \\
 = & r \frac{1-p}{p} \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} \\
 = & r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{(r+1)+k-1}{k} (1-p)^k p^{r+1} \\
 = & r \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{n-1} k \mathbb{P}([W = k]) && \text{(où } W \text{ suit la loi binomiale négative de paramètres } r+1 \text{ et } p)
 \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, la v.a.r.  $W$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(W) = (r+1) \frac{1-p}{p}$ .

On en déduit que la v.a.r.  $Z(Z-1)$  admet une espérance.

De plus :

$$\mathbb{E}(Z(Z-1)) = r \frac{1-p}{p} \mathbb{E}(W) = r \frac{1-p}{p} (r+1) \frac{1-p}{p}$$

$$\mathbb{E}(Z(Z-1)) = (r+1)r \left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$

- D'autre part :

$$Z^2 = Z(Z-1) + Z$$

Ainsi,  $Z^2$  admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.

On en conclut que la v.a.r.  $Z$  admet une variance.

- De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z(Z-1)) + \mathbb{E}(Z) = (r+1)r \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r \frac{1-p}{p}$$

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(Z) &= \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 \\
 &= (r+1)r \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r \frac{1-p}{p} - r^2 \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \\
 &= r \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 (r+1-r) + r \frac{1-p}{p} \\
 &= r \left(\frac{1-p}{p}\right) \left(\frac{1-p}{p} + 1\right) = r \left(\frac{1-p}{p}\right) \left(\frac{1-p+r}{p}\right) \\
 &= r \frac{1-p}{p^2}
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(Z) = r \frac{1-p}{p^2}$$

□

### Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  a sa loi donnée par  $p_k = \mathbb{P}([N = k])$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de  $N$  vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels  $a$  et  $b$ , avec  $a < 1$  et  $a + b > 0$ , tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On dira alors que  $N$  suit la loi  $\mathcal{P}(a, b)$ .

#### 11. Détermination des lois de Panjer.

a) Montrer que pour tout entier  $k$  strictement positif, on a :  $p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$ .

*Démonstration.* Démontrons par récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$  où  $\mathcal{P}(k) : p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$ .

► **Initialisation** :

$$p_0 \prod_{i=1}^1 \left(a + \frac{b}{i}\right) = p_0 \left(a + \frac{b}{1}\right) = \left(a + \frac{b}{1}\right) p_{1-1} = p_1$$

D'où  $\mathcal{P}(1)$ .

► **Hérédité** : soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Supposons  $\mathcal{P}(k)$  et démontrons  $\mathcal{P}(k+1)$  (i.e.  $p_{k+1} = p_0 \prod_{i=1}^{k+1} \left(a + \frac{b}{i}\right)$ ).

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_k && \text{(d'après l'énoncé)} \\
 &= \left(a + \frac{b}{k}\right) \times p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
 &= p_0 \prod_{i=1}^{k+1} \left(a + \frac{b}{i}\right)
 \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{P}(k+1)$ .

Ainsi, par principe de récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$ .

□

- b) Dans cette question, on suppose que  $a = 0$ .  
Montrer que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $b$ .

*Démonstration.*

- On a déjà :  $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$
- Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .  
Si  $a = 0$ , alors, d'après la question précédente :

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \frac{b}{i} = p_0 \frac{\prod_{i=1}^k b}{\prod_{i=1}^k i} = p_0 \frac{b^k}{k!}$$

- On sait de plus que la famille  $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements, donc :

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = \mathbb{P}([N = 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k$$

Or, en reconnaissant une série exponentielle de paramètre  $b$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} p_k &= \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \frac{b^k}{k!} = p_0 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \\ &= p_0 \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} - 1 \right) = p_0 (e^b - 1) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 + p_0(e^b - 1) \\ \text{donc} \quad 1 &= e^b p_0 \\ \text{d'où} \quad e^{-b} &= p_0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([N = k]) = e^{-b} \frac{b^k}{k!}$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre  $b$  :  $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ .

**Commentaire**

D'après l'énoncé, la variable aléatoire  $N$  est « à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ». Cela signifie exactement :  $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$  (et non  $N(\Omega) = \mathbb{N}$ ).

□

- c) Dans cette question, on suppose que  $a < 0$ .  
(i) Montrer qu'il existe un unique entier naturel  $r$ , tel que :  $\forall k > r, p_k = 0$  et  $\forall k \leq r, p_k \neq 0$ .  
On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les  $p_k$  tous strictement positifs.

*Démonstration.*

Raisonnons par l'absurde. Supposons :  $\forall k \in \mathbb{N}, p_k > 0$ .

- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On sait :

$$p_{k+1} = \left( a + \frac{b}{k+1} \right) p_k$$

On va donc chercher à démontrer qu'il existe un entier  $k_0$  tel que :

$$a + \frac{b}{k_0+1} < 0$$

En effet, si c'est le cas, on aura :

- × d'une part  $p_{k_0+1} > 0$  par hypothèse,
- × d'autre part, comme  $p_{k_0} > 0$  et  $a + \frac{b}{k_0+1} < 0$  :  $p_{k_0+1} = \left( a + \frac{b}{k_0+1} \right) p_{k_0} < 0$ .

Ce qui est absurde.

- On a les équivalences suivantes :

$$a + \frac{b}{k+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{k+1} < -a \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < -\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow k+1 > -\frac{b}{a}$$

(par stricte décroissance de la fonction inverse sur  $]0, +\infty[$ , avec  $-\frac{b}{a} > 0$ )

$$\Leftrightarrow k > -\frac{b}{a} - 1$$

On choisit alors :  $k_0 = \left\lceil -\frac{b}{a} - 1 \right\rceil$  pour obtenir la contradiction voulue.

On en déduit qu'il existe  $i_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $p_{i_0} = 0$ .

- On note alors :  $s = \min(i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0)$ .  
L'entier  $s$  existe car l'ensemble  $\{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  non vide (l'entier  $k_0$  appartient à cet ensemble).  
Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Deux cas se présentent.

- × si  $k \leq s$  (i.e.  $k \leq s - 1$ ), alors, par définition de  $s$  :  $p_k > 0$ .
- × si  $k \geq s$ , alors :  $p_k = 0$ .

En effet, on sait, par définition de  $s$  :  $p_s = 0$ .

De plus, d'après la question **11.a)** :

$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left( a + \frac{b}{i} \right) = p_0 \prod_{i=1}^s \left( a + \frac{b}{i} \right) \prod_{i=s+1}^k \left( a + \frac{b}{i} \right) = p_s \prod_{i=s+1}^k \left( a + \frac{b}{i} \right) = 0$$

En choisissant  $r = s - 1$ , on a bien :  $\forall k \leq r, p_k > 0$  et  $\forall k > r, p_k = 0$ . □

(ii) Montrer :  $b = -a(r+1)$ .

*Démonstration.*

Par définition de  $r$  :

- ×  $p_r > 0$ ,
- ×  $p_{r+1} = 0$ .

Or :  $p_{r+1} = \left(a + \frac{b}{r+1}\right) p_r$ . On en déduit :

$$a + \frac{b}{r+1} = 0$$

donc  $\frac{b}{r+1} = -a$

d'où  $b = -a(r+1)$

$$b = -a(r+1)$$

□

(iii) Établir que pour tout  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ ,  $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$ .

En déduire que  $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$ .

*Démonstration.*

• Soit  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . D'après les questions **11.a)** et **11.c)(ii)** :

$$\begin{aligned} p_k &= p_0 \prod_{i=1}^k \left(a - \frac{a(r+1)}{i}\right) = p_0 \prod_{i=1}^k \left(-a \left(-1 + \frac{r+1}{i}\right)\right) \\ &= p_0 (-a)^k \prod_{i=1}^k \frac{r+1-i}{i} = p_0 (-a)^k \frac{\prod_{i=1}^k (r+1-i)}{\prod_{i=1}^k i} \\ &= p_0 (-a)^k \frac{r(r-1)\cdots(r+1-k)}{k!} \\ &= p_0 (-a)^k \frac{\frac{r!}{(r-k)!}}{k!} = p_0 (-a)^k \frac{r!}{k!(r-k)!} \\ &= p_0 (-a)^k \binom{r}{k} \end{aligned}$$

• De plus :  $(-a)^0 \binom{r}{0} p_0 = p_0$ .

$$\text{Finalement : } \forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0.$$

• La famille  $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$  forme un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = \mathbb{P}([N = 0]) + \sum_{k=1}^r \mathbb{P}([N = k]) + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^r (-a)^k \binom{r}{k} p_0 + 0 \\ &= p_0 \left(1 + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (-a)^k\right) \end{aligned}$$

(d'après ce qui précède)

Or :

$$\begin{aligned}
 1 + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (-a)^k &= \binom{r}{0} (-a)^0 + \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (-a)^k \\
 &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-a)^k = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-a)^k 1^{r-k} \\
 &= (-a + 1)^r
 \end{aligned}$$

(d'après la formule du binôme de Newton)

On en déduit :  $p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}$ .

**Commentaire**

- Dans cette partie, on a seulement l'inclusion :  $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ . On ne peut donc pas considérer de plus petit système complet d'événements que la famille  $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$ .
- On rappelle que ceci est licite car on autorise un système complet d'événements à contenir l'ensemble vide. □

(iv) En conclure que  $N$  suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ .
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Deux cas se présentent :
  - × si  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$ , alors, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([N = k]) &= p_k = (-a)^k \binom{r}{k} \frac{1}{(1-a)^r} \\
 &= \binom{r}{k} (-a)^k \left( \frac{1}{1-a} \right)^r \\
 &= \binom{r}{k} \left( -\frac{a}{1-a} \right)^k \left( \frac{1}{1-a} \right)^{r-k}
 \end{aligned}$$

De plus, on a bien :  $1 - \frac{1}{1-a} = \frac{1-a-1}{1-a} = -\frac{a}{1-a}$ .

- × si  $k \geq r + 1$ , alors, par définition de  $r$  :

$$\mathbb{P}([N = k]) = p_k = 0$$

On reconnaît alors la loi binomiale de paramètres  $r$  et  $-\frac{a}{1-a}$ .

- On cherche enfin à exprimer  $r$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

D'après la question 11.c(ii) :

$$b = -a(r + 1) \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = r + 1 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} - 1 = r$$

Finalement :  $N \hookrightarrow \mathcal{B} \left( -\frac{b}{a} - 1, -\frac{a}{1-a} \right)$ .

**Commentaire**

Cette question amène une remarque sur la notation  $X(\Omega)$  lorsque  $X$  est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r.  $X$  est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Comme la notation le suggère,  $X(\Omega)$  est l'image de  $\Omega$  par l'application  $X$ .  
Ainsi,  $X(\Omega)$  n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r.  $X$  :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de  $X(\Omega)$ , aucune application probabilité  $\mathbb{P}$  n'apparaît. Même si cela ne correspond pas directement à la définition, il est d'usage courant de confondre, dans le cas des v.a.r. discrètes, l'ensemble de valeurs possibles de la v.a.r.  $X$  (*i.e.* l'ensemble  $X(\Omega)$ ) et l'ensemble des valeurs que  $X$  prend avec probabilité non nulle (dans le cas où  $X$  est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de  $X$  et est noté  $\text{Supp}(X)$ ).
- Ainsi, s'il est fréquent de considérer qu'une v.a.r.  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} \times X(\Omega) &= \llbracket 0, n \rrbracket, \\ \times \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

on trouvera aussi :

$$\begin{aligned} \times X(\Omega) &\subset \mathbb{N}, \\ \times \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ \times \forall k \in \llbracket n+1, +\infty \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) &= 0. \end{aligned}$$

La première définition est axée sur l'ensemble image et la seconde sur le support de  $X$ .  $\square$

d) Dans cette question, on suppose que  $a > 0$ .

(i) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , on a :  $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Par définition des coefficients binomiaux donnée en partie II :

$$\begin{aligned} \binom{\frac{b}{a} + k}{k} &= \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left( \frac{b}{a} + k - i \right) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k \left( \frac{b}{a} + j \right) && \text{(avec le changement} \\ &&& \text{d'indice } j = k - i) \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^k j} \prod_{j=1}^k \left( \frac{b}{a} + j \right) \\ &= \prod_{j=1}^k \frac{\frac{b}{a} + j}{j} = \prod_{j=1}^k \left( \frac{b}{aj} + 1 \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k = \left( \prod_{j=1}^k \left( \frac{b}{a j} + 1 \right) \right) \left( \prod_{j=1}^k a \right) = \prod_{j=1}^k \left( \left( \frac{b}{a j} + 1 \right) a \right) = \prod_{j=1}^k \left( \frac{b}{j} + a \right)$$

Ainsi :  $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left( a + \frac{b}{i} \right) = p_0 \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k.$

□

(ii) En déduire que  $N$  suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.*

- Commençons par déterminer  $p_0$ .

La famille  $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements. Donc :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = \mathbb{P}([N = 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) \\ &= p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_0 \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k = p_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k &= \binom{\frac{b}{a} + 0}{0} a^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1 - a)^{\frac{b}{a} + 1}}$$

*d'après 7.c) appliquée à*  
 $c = \frac{b}{a} + 1$  *et*  $x = a$

On en déduit :  $p_0 = (1 - a)^{\frac{b}{a} + 1}.$

- Ensuite :  $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ .
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . D'après la question précédente :

$$p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k (1 - a)^{\frac{b}{a} + 1} = \binom{\left(\frac{b}{a} + 1\right) + k - 1}{k} a^k (1 - a)^{\frac{b}{a} + 1}$$

On obtient que  $N$  suit la loi binomiale négative de paramètres  $\frac{b}{a} + 1$  et  $1 - a$ .

□

12. Montrer que, dans tous les cas,  $N$  admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par :  $\mathbb{E}(N) = \frac{a + b}{1 - a}$  et  $\mathbb{V}(N) = \frac{a + b}{(1 - a)^2}$ .

*Démonstration.*

Trois cas se présentent.

- si  $a = 0$  :  $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ .

La v.a.r.  $N$  admet donc une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(N) = b = \frac{0 + b}{1 - 0} \text{ et } \mathbb{V}(N) = b = \frac{0 + b}{(1 - 0)^2}.$$

- si  $a < 0$  :  $N \leftrightarrow \mathcal{B}\left(-\frac{b}{a} - 1, -\frac{a}{1-a}\right)$ .

La v.a.r.  $N$  admet donc une espérance et une variance.

De plus :

$$\mathbb{E}(N) = \left(-\frac{b}{a} - 1\right) \left(-\frac{a}{1-a}\right) = \frac{b+a}{1-a} \frac{a}{1-a} = \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) = \left(-\frac{b}{a} - 1\right) \left(-\frac{a}{1-a}\right) \left(1 + \frac{a}{1-a}\right) = \frac{b+a}{1-a} \frac{1}{1-a} = \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

- si  $a > 0$  :  $N$  suit une loi binomiale négative de paramètres  $\frac{b}{a} + 1$  et  $1 - a$ .

D'après les questions **10.b)** et **10.c)**, la v.a.r.  $N$  admet une espérance et une variance.

De plus :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{1-a} = \frac{b+a}{1-a}$$

Enfin :

$$\mathbb{V}(N) = \frac{\left(\frac{b}{a} + 1\right) a}{(1-a)^2} = \frac{b+a}{(1-a)^2}$$

$$\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a} \text{ et } \mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

□

## Partie IV – L’algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l’introduction du sujet et de la partie III.
- Si  $A$  est un évènement et  $Y$  une variable aléatoire, on note, si elle existe,  $\mathbb{E}_A(Y)$  l’espérance de la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $A$ .

**13.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $\mathbb{P}([X_n = 0])$  en fonction de  $q_0$  puis établir que  $r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = \mathbb{P}\left(\left[\sum_{k=1}^n U_k = 0\right]\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [U_k = 0]\right)$$

$$= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([U_k = 0])$$

$$= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([U_1 = 0])$$

$$= q_0^n$$

(car les variables aléatoires  $U_k$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et qu’une somme de nombres positifs est nulle ssi tous les nombres sont nuls)

(car les variables aléatoires  $U_k$  sont indépendantes)

(car les variables aléatoires  $U_k$  suivent la même loi)

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([X_n = 0]) = q_0^n.}$$

De plus, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements  $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\begin{aligned} r_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = 0] \cap [N = n]) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [N = n]) && \text{(raisonnement analogue à la question 3)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = 0])\mathbb{P}([N = n]) && \text{(les variables aléatoires } X_n \text{ et } N \text{ sont} \\ &&& \text{indépendantes par lemme des coalitions)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n && \text{(d'après le calcul précédent} \\ &&& \text{et la définition de } p_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n.}$$

□

14. Soit  $j \in \mathbb{N}^*$ .

a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , que vaut  $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n)$  ? En déduire :  $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1) = \frac{j}{n}$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

L'espérance conditionnelle  $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n)$  existe si et seulement si la série (sur  $k$ )  $\sum k\mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_n = k])$  converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence car il s'agit d'une série à termes positifs.

On remarque que, pour tout entier  $m \geq j$  :

$$\sum_{k=0}^m k\mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_n = k]) = j$$

car

$$\mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_n = k]) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, la série  $\sum k\mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_n = k])$  converge et

$$\boxed{\mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_n = k]) = j.}$$

Soit  $k \in [1, n]$ . On sait que  $0 \leq U_k \leq X_n$ . On en déduit que si l'événement  $[X_n = j]$  est réalisé, alors les valeurs possibles de la variable aléatoire  $U_k$  sont comprises entre 0 et  $j$ . Autrement dit, la loi conditionnelle de  $U_k$  sachant  $[X_n = j]$  est finie. Ceci prouve que  $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_k)$  existe.

De plus,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{[X_n=j]}(X_n) &= \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left( \sum_{k=1}^n U_k \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_k) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1) && \text{(car les variables aléatoires } U_k \text{ suivent la même loi)} \\
 &= n\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1)
 \end{aligned}$$

D'où :  $j = n\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1)$ .

On a bien :  $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1) = \frac{j}{n}$ .

□

b) Établir :  $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \left( a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left( a + \frac{b}{j} U_1 \right) \mathbb{P}([X_n = j]) p_{n-1}$ .

*Démonstration.*

D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements  $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$\begin{aligned}
 r_j &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j] \cap [N = n]) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j] \cap [N = n]) && ([X = j] \cap [N = 0] = \emptyset \text{ car } j \neq 0 \text{ or, si } N \text{ prend la valeur } 0, \text{ alors } X \text{ prend la valeur } 0) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j] \cap [N = n]) && \text{(raisonnement analogue à la question 3)} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])\mathbb{P}([N = n]) && \text{(les variables aléatoires } X_n \text{ et } N \text{ sont indépendantes par lemme des coalitions)} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j])p_n \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \left( a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} && \text{(car } N \text{ vérifie la relation de Panjer)}
 \end{aligned}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On sait que  $\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1)$  existe d'après la question précédente. Or,  $a + \frac{b}{j}U_1$  est une transformée affine de  $U_1$  donc  $\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left( a + \frac{b}{j}U_1 \right)$  existe également.

De plus :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left( a + \frac{b}{j}U_1 \right) &= a + \frac{b}{j}\mathbb{E}_{[X_n=j]}(U_1) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
 &= a + \frac{b}{j} \frac{j}{n} && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= a + \frac{b}{n}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) \mathbb{P}([X_n = j]) p_{n-1}.$$

□

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) \mathbb{P}([X_n = j]) = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \mathbb{P}([U_1 = i]) \mathbb{P}([X_{n-1} = j - i])$$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après le théorème de transfert (la variable aléatoire  $U_1$  étant finie à valeurs dans  $[[0, j]]$  conditionnellement à  $[X_n = j]$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) &= \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \mathbb{P}_{[X_n=j]}([U_1 = i]) \\ &= \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \frac{\mathbb{P}([U_1 = i] \cap [X_n = j])}{\mathbb{P}([X_n = j])} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) \mathbb{P}([X_n = j]) \\ &= \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \mathbb{P}([U_1 = i] \cap [X_n = j]) \\ &= \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \mathbb{P} \left( [U_1 = i] \cap \left[ U_1 + \sum_{k=2}^n U_k = j \right] \right) \\ &= \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \mathbb{P} \left( [U_1 = i] \cap \left[ \sum_{k=2}^n U_k = j - i \right] \right) \\ &= \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \mathbb{P}([U_1 = i]) \mathbb{P} \left( \left[ \sum_{k=2}^n U_k = j - i \right] \right) \quad (\text{par indépendance des } U_k) \\ & \quad (\text{car les } U_k \text{ suivent la même loi et} \\ & \quad \text{sont indépendantes donc } \sum_{k=2}^n U_k \text{ et} \\ & \quad \sum_{k=1}^{n-1} U_k \text{ suivent la même loi}) \\ &= \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \mathbb{P}([U_1 = i]) \mathbb{P}([X_{n-1} = j - i]) \end{aligned}$$

$$\text{On a bien : } \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) \mathbb{P}([X_n = j]) = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) \mathbb{P}([U_1 = i]) \mathbb{P}([X_{n-1} = j - i]).$$

□

d) En conclure :  $r_j = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) q_i r_{j-i}$ , puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - a q_0} \left( \sum_{i=1}^j \left(a + \frac{b}{j} i\right) q_i r_{j-i} \right)$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombre  $r_j$  et ainsi de déterminer la loi de  $X$ .

*Démonstration.*

Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 r_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_{[X_n=j]} \left( a + \frac{b}{j} U_1 \right) \mathbb{P}([X_n = j]) p_{n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) \mathbb{P}([U_1 = i]) \mathbb{P}([X_{n-1} = j - i]) p_{n-1} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) q_i \mathbb{P}([X_{n-1} = j - i]) p_{n-1} \\
 &= \sum_{i=0}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) q_i \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_{n-1} = j - i]) p_{n-1} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) q_i \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j - i]) p_n \right)
 \end{aligned}$$

De plus, par un calcul analogue à celui effectué en question 3 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = j - i]) p_n = \mathbb{P}([X = j - i]) = r_{j-i}$$

$$\text{D'où : } r_j = \sum_{i=0}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) q_i r_{j-i}.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
 r_j &= \sum_{i=0}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) q_i r_{j-i} \\
 &= a q_0 r_j + \sum_{i=1}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) q_i r_{j-i} \quad (\text{en sortant le premier terme de la somme})
 \end{aligned}$$

d'où

$$r_j (1 - a q_0) = \sum_{i=1}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) q_i r_{j-i}$$

De plus,  $a < 1$  donc  $a q_0 < q_0$  (car  $q_0 \geq 0$ ) et donc  $a q_0 < 1$  (car  $q_0 \leq 1$ ), ce qui permet d'affirmer que  $1 - a q_0 \neq 0$ .

$$\text{On en déduit : } r_j = \frac{1}{1 - a q_0} \left( \sum_{i=1}^j \left( a + \frac{b i}{j} \right) q_i r_{j-i} \right).$$

□

### 15. Des exemples d'application.

a) Dans cette question, les variables  $U_i$  suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

(i) Montrer que pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $r_j = \frac{p}{1 - a + a p} \left( a + \frac{b}{j} \right) r_{j-1}$ .

En déduire que  $X$  suit une loi de Panjer.

*Démonstration.*

Soit  $j \in \mathbb{N}^*$ .

D'après la question précédente :

$$r_j = \frac{1}{1 - aq_0} \left( \sum_{i=1}^j \left( a + \frac{bi}{j} \right) q_i r_{j-i} \right)$$

Or,  $U_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  donc

$$\begin{cases} q_0 = 1 - p \\ q_1 = p \\ \forall i \geq 2, q_i = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$r_j = \frac{1}{1 - a(1 - p)} \left( a + \frac{b}{j} \right) p r_{j-1}$$

$$\text{D'où : } r_j = \frac{p}{1 - a + ap} \left( a + \frac{b}{j} \right) r_{j-1}.$$

Le résultat précédent se réécrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, r_k = \frac{p}{1 - a + ap} \left( a + \frac{b}{k} \right) r_{k-1} = \left( a' + \frac{b'}{k} \right) r_{k-1}$$

où

$$\begin{cases} a' = \frac{ap}{1 - a + ap} \\ b' = \frac{bp}{1 - a + ap} \end{cases}$$

Cette relation prouve que  $X$  suit une loi de Panjer. Plus précisément :  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a', b')$ .

□

(ii) Retrouver les résultats des questions 4. et 5. de la partie I.

*Démonstration.*

Retrouvons le résultat de la question 4.

On suppose que  $N$  suit la loi binomiale de paramètres  $m \in \mathbb{N}$  et  $\pi \in ]0, 1[$ .

On sait que  $N \hookrightarrow \mathcal{P}(a, b)$ . D'après la question 11, si  $a \geq 0$ , alors  $N$  suit une loi de Poisson ou une loi binomiale négative et donc ne suit pas une loi binomiale. On en déduit que :

×  $a < 0$

×  $m = -\frac{b}{a} - 1$  est l'unique entier vérifiant : pour tout entier naturel  $k$ , si  $k > m$ , alors  $p_k = 0$  et si  $p_k \leq m$ , alors  $p_k \neq 0$  (d'après la question 11.c)(iv))

×  $\pi = -\frac{a}{1 - a}$  (d'après la question 11.c)(iv))

D'après la question précédente,  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a', b')$  où  $a' = \frac{ap}{1 - a + ap}$  et  $b' = \frac{bp}{1 - a + ap}$ .

On remarque que, puisque  $p \in ]0, 1[$  :

$$a' = \frac{ap}{1 - a(1 - p)} < 0$$

donc  $X$  suit elle-même une loi binomiale de paramètres  $(m', \pi')$  d'après la question 11.c)(iv).

De plus, les paramètres de cette loi sont :

$$m' = -\frac{\frac{bp}{1-a(1-p)}}{\frac{ap}{1-a(1-p)}} - 1 = -\frac{b}{a} - 1 = m$$

$$\pi' = -\frac{a'}{1-a'} = -\frac{\frac{ap}{1-a+ap}}{1-\frac{ap}{1-a+ap}} = -\frac{ap}{1-a+ap-ap} = -\frac{ap}{1-a} = p\pi$$

On obtient bien le même résultat qu'à la question 4 :  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p\pi)$ .

Retrouvons maintenant le résultat de la question 5.

On suppose que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

On sait que  $N \hookrightarrow \mathcal{P}(a, b)$ . D'après la question 11, si  $a \neq 0$ , alors  $N$  suit une loi binomiale ou une loi binomiale négative et donc ne suit pas une loi de Poisson. On en déduit que :

×  $a = 0$

×  $\lambda = b$  (d'après la question 11.b)

et donc  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(0, bp)$  ce qui prouve que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $bp$  (d'après la question 11.b).

On obtient bien le même résultat qu'à la question 5 :  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$ .

□

b) Dans cette question, on suppose que  $a = 0$ , rappelons que cela entraîne que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $b$ .

Soit  $p$  un réel de l'intervalle  $]0; 1[$ .

(i) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que la famille de nombre  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$  définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  (loi logarithme discrète). On pose  $q_0 = 0$ .

On suppose que les variables  $U_k$  suivent cette loi de probabilité.

*Démonstration.*

Tout d'abord, on remarque que :

×  $\forall i \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{p^i}{i} \leq p^i$ .

× la série  $\sum p^i$  est une série géométrique de raison  $p \in ]0, 1[$  donc converge

On en déduit, par critère de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, que la série  $\sum \frac{p^i}{i}$  converge. Ainsi, la somme infinie  $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p^i}{i}$  existe.

Analyse :

Si un tel  $\alpha$  existe, alors  $\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = 1$  et donc, par linéarité de la somme :

$$\alpha = \frac{1}{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p^i}{i}}$$

Ceci prouve l'unicité d'un réel  $\alpha$  tel que la famille  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  définisse une loi de probabilité.

Synthèse :

Posons  $\alpha = \frac{1}{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p^i}{i}}$ . On a alors  $\alpha > 0$  et donc :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, q_i \geq 0$$

De plus :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = 1$$

Ceci prouve l'existence d'un réel  $\alpha$  tel que la famille  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  définisse une loi de probabilité.  $\square$

(ii) Montrer que pour tout entier  $j \geq 1$ , on a :  $r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^j p^i r_{j-i}$ .

*Démonstration.*

Soit  $j \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} r_j &= \frac{1}{1 - aq_0} \left( \sum_{i=1}^j \left( a + \frac{bi}{j} \right) q_i r_{j-i} \right) && \text{(d'après la question 14.d)} \\ &= \sum_{i=1}^j \frac{bi}{j} q_i r_{j-i} && \text{(car } a = 0) \\ &= \sum_{i=1}^j \frac{bi}{j} \alpha \frac{p^i}{i} r_{j-i} && \text{(par hypothèse sur la loi des } U_k) \\ &= \sum_{i=1}^j \frac{b\alpha}{j} p^i r_{j-i} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^j p^i r_{j-i}.$$

$\square$

(iii) En utilisant un changement d'indice, établir pour tout  $j \geq 2$  :  $r_j = \left( p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j} \right) r_{j-1}$ , puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour  $j = 1$ .

*Démonstration.*

Soit  $j \geq 2$  un entier.

$$\begin{aligned} r_j &= \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^j p^i r_{j-i} && \text{(d'après la question 15.b)(ii)} \\ &= \frac{b\alpha}{j} p r_{j-1} + \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=2}^j p^i r_{j-i} && \text{(car } j \geq 2) \\ &= \frac{b\alpha}{j} p r_{j-1} + \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^{j-1} p^{i+1} r_{j-(i+1)} \\ &= \frac{pb\alpha}{j} r_{j-1} + \frac{pb\alpha}{j} \sum_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i} \end{aligned}$$

Or,

$$r_{j-1} = \frac{b\alpha}{j-1} \sum_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{j-1} p^i r_{(j-1)-i} = \frac{j-1}{b\alpha} r_{j-1}$$

(on a bien  $\alpha \neq 0$  et  $b \neq 0$  car  $a = 0$  et  $a + b > 0$ )

Ainsi :

$$\begin{aligned} r_j &= \frac{pb\alpha}{j} r_{j-1} + \frac{p\cancel{b\alpha} j - 1}{j \cancel{b\alpha}} r_{j-1} \\ &= \left( \frac{pb\alpha}{j} + p \left( 1 - \frac{1}{j} \right) \right) r_{j-1} \\ &= \left( p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j} \right) r_{j-1} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que cette formule reste valable pour  $j = 1$ .

× D'une part :  $r_1 = b\alpha p r_0$  (d'après la question **15.b(ii)**, valable pour  $j = 1$ ).

× D'autre part :  $\left( p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j} \right) r_{j-1} = (p + p(b\alpha - 1)) r_0 = pb\alpha r_0$ .

Pour tout entier  $j \geq 1$ ,  $r_j = \left( p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j} \right) r_{j-1}$ .

□

(iv) Conclure que  $X$  suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de  $b$ ,  $\alpha$  et  $p$ .

*Démonstration.*

D'après la question précédente,  $X \leftrightarrow \mathcal{P}(a', b')$  où

$$\begin{cases} a' = p \\ b' = p(b\alpha - 1) \end{cases}$$

On sait de plus que  $p > 0$  donc, d'après la question **11.d)**,

$X$  suit la loi binomiale négative de paramètres  $\frac{b'}{a'} + 1 = b\alpha$  et  $1 - a' = 1 - p$ .

□