1 Exercices

1.1 Inversion de matrices 2×2

Exercice 1 : Pour chacune des matrices P suivantes, calculer P^{-1}.

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.2 Inversion de matrices 3×3

Exercice 2 : Pour chacune des matrices P suivantes, calculer P^{-1}.

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
6. $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Réponses de l'exercice 2 :

1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

5. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -1 & 6 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

6. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

3 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

1. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \end{array}$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2}$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction détaillée de l'exercice 2 :

1. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \\ \\ L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{2} \end{array}$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2} \end{array}$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\-2&0&-2&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&4&2&2&1&0\\0&-3&-3&-2&0&1\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&4&2&2&1&0\\0&0&-6&-2&3&4\end{array}\right)\quad L_3\leftarrow 4L_3+3L_2$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&6&0&1&3&4\\0&12&0&4&6&4\\0&0&-6&-2&3&4\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_1\leftarrow 3L_1+L_3\\L_2\leftarrow 3L_2+L_3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&0&-2&0&4\\0&12&0&4&6&4\\0&0&-6&-2&3&4\end{array}\right)\quad L_1\leftarrow 2L_1-L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_1\leftarrow\frac{L_1}{6}\\L_2\leftarrow\frac{L_2}{12}\\L_3\leftarrow-\frac{L_3}{6}\end{array}$$

Ainsi $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&0&4\\2&3&2\\2&-3&-4\end{pmatrix}$.

5. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&2&1&0&0\\-1&2&1&0&1&0\\-2&2&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&2&1&0&0\\0&3&4&1&2&0\\0&1&3&1&0&1\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&2&1&0&0\\0&3&4&1&2&0\\0&0&5&2&-2&3\end{array}\right)\quad L_3\leftarrow 3L_3-L_2$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}10&-5&0&1&4&-6\\0&15&0&-3&18&-12\\0&0&5&2&-2&3\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_1\leftarrow 5L_1-2L_3\\L_2\leftarrow 5L_2-4L_3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}30&0&0&0&30&-30\\0&15&0&-3&18&-12\\0&0&5&2&-2&3\end{array}\right)\quad L_1\leftarrow 3L_1+L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&1&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_1\leftarrow\frac{L_1}{30}\\L_2\leftarrow\frac{L_2}{15}\\L_3\leftarrow\frac{L_3}{5}\end{array}$$

Ainsi $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5&-5\\-1&6&-4\\2&-2&3\end{pmatrix}$.

6. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan pour inverser la matrice P :

$$(P|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$$

Les coefficients diagonaux sont tous non nuls donc la matrice P est inversible. Continuons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{4} \end{array}$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.