

# 1 Cours

## Somme des termes d'une suite polynomiale

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\bullet \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \bullet \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \bullet \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

## Somme des termes d'une suite géométrique

Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  avec  $m \leq n$  et soit  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$$\bullet \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \bullet \sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

## Binôme de Newton

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\bullet (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \bullet (a-b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} b^{n-k}$$

On doit toujours penser à la formule du binôme de Newton si on voit apparaître une somme avec des coefficients binomiaux.

## Substitution dans une formule

Il n'y a qu'une règle à retenir :

Toute substitution dans une formule doit se faire à l'aide de parenthèses.

*Exemple 1.* Considérons la formule  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Pour calculer  $\sum_{k=0}^{n+1} k$  il faut remplacer  $n$  par  $n+1$  : c'est ce remplacement que l'on appelle *substitution*.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

devient

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Si l'on oublie les parenthèses, cela donnerait comme résultat

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n+1(n+1+1)}{2} = \frac{n+(n+2)}{2} = \frac{2n+2}{2} = n+1$$

ce qui est bien entendu complètement faux (car les règles de distributivité entre addition et multiplication ont été bafouées à cause de l'oubli des parenthèses).

## 2 Exercices

### 2.1 Entraînement à la manipulation des symboles de somme et de produit

**Exercice 1 :** Réécrire les sommes ou les produits à l'aide de pointillés en faisant apparaître les deux premiers termes ainsi que les deux derniers termes.

1.  $\sum_{k=5}^{100} k$

3.  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{5^{3k+1}}$

5.  $\prod_{k=0}^n 2^k$

2.  $\sum_{k=0}^n (2k+7)$

4.  $\prod_{k=2}^{15} k^2$

6.  $\prod_{k=2}^n (1-k^3)$

**Exercice 2 :** Réécrire les sommes ou les produits en pointillés à l'aide du symbole de somme ou de produit.

1.  $2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1)$

3.  $1 + 5 + \dots + 5^{n-1} + 5^n$

5.  $1 \times 4 \times \dots \times (n-1)^2 \times n^2$

2.  $2 + 4 + \dots + (2n-2) + (2n)$

4.  $3 \times 9 \times \dots \times 3^n \times 3^{n+1}$

6.  $1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)$

**Exercice 3 :** Calculer pour les valeurs  $n = 0$ ,  $n = 1$  et  $n = 2$ .

1.  $\sum_{k=0}^n (2k+1)$

2.  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}$

3.  $\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

### 2.2 Linéarité de la somme

**Exercice 4 :** Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

1.  $\sum_{k=0}^n (2k+1)$

3.  $\sum_{k=0}^n (2^k + k^2)$

5.  $\sum_{k=0}^n k(k+1)$

2.  $\sum_{k=0}^n (k+1)^2$

4.  $\sum_{k=0}^n (2^k + 3^k)$

6.  $\sum_{k=0}^n (k-2)(k+2)$

### 2.3 Pratique de la substitution

**Exercice 5 :** Développer en somme les expressions suivantes à l'aide d'une ou plusieurs substitutions.

1.  $(a-2b)^n$

2.  $(2a+1)^n$

3.  $(3a-1)^{2n}$

**Exercice 6 :** Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer les sommes suivantes à l'aide d'une ou plusieurs substitutions.

1.  $\sum_{k=0}^{2n} k$

6.  $\sum_{k=0}^{n+m} k^2$

11.  $\sum_{k=0}^{2n+1} (-q)^k$

2.  $\sum_{k=0}^{2n+1} k$

7.  $\sum_{k=0}^{3n+2} k^3$

12.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{2k}$

3.  $\sum_{k=0}^{n+m} k$

8.  $\sum_{k=0}^{n+1} q^k$

13.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx}$

4.  $\sum_{k=0}^{2n} k^2$

9.  $\sum_{k=0}^{2n} q^k$

14.  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$

5.  $\sum_{k=0}^{2n+1} k^2$

10.  $\sum_{k=0}^{2n} (-q)^k$

15.  $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^k (-1)^{n+1-k} x^{n+1-k}$

## 2.4 Pratique du changement d'indice

**Exercice 7 :** Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un changement d'indice.

1.  $\sum_{k=0}^n (k+2)$

3.  $\sum_{k=3}^n 5^{k-3}$

5.  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$

2.  $\sum_{k=0}^n (k+3)^2$

4.  $\sum_{k=3}^n \frac{1}{2^{k-2}}$

6.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k-2} x^k$

**Exercice 8 :**

1. Soit  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $k \leq n$ . Démontrer la formule du capitaine :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ .

3. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in ]0, 1[$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

## 2.5 Sommes télescopiques

**Exercice 9 :** Calculer les sommes suivantes par télescopage.

$$1. \sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2)$$

$$3. \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$5. \sum_{k=0}^n k \times k!$$

$$2. \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$4. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$6. \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

**Exercice 10 :** Calculer les produits suivants par télescopage.

$$1. \prod_{k=0}^n \frac{2k+3}{2k+5}$$

$$2. \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$3. \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right)$$

## 2.6 Plus de calculs de produits

**Exercice 11 :** Simplifier les produits suivants à l'aide de factorielles et/ou de puissances.

$$1. \prod_{k=0}^n k$$

$$5. \prod_{k=1}^{2n} k$$

$$9. \prod_{k=0}^n 4^k$$

$$2. \prod_{k=1}^n k$$

$$6. \prod_{k=0}^n (2k)$$

$$10. \prod_{k=1}^{n+1} 2^{\ln(k)}$$

$$3. \prod_{k=2}^n k$$

$$7. \prod_{k=0}^n (2k+1)$$

$$11. \prod_{k=2}^n e^{kx}$$

$$4. \prod_{k=0}^n \ln(2)$$

$$8. \prod_{k=1}^n \sqrt{k(k+1)}$$

$$12. \prod_{k=1}^n (4k^2 - 1)$$

## 2.7 Sommes doubles

**Exercice 12 :** Calculer les sommes doubles suivantes.

$$1. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j)$$

$$3. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{i+j}}$$

$$2. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ij$$

$$4. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{i} 2^{n-i} (3^{j+1} - 3^j)$$

### 3 Réponses courtes

#### Réponses de l'exercice 1 :

1.  $5 + 6 + \dots + 99 + 100$

4.  $2^2 \times 3^2 \times \dots \times 14^2 \times 15^2$

2.  $7 + 9 + \dots + (2n + 5) + (2n + 7)$

5.  $2^0 \times 2^1 \times \dots \times 2^{n-1} \times 2^n$

3.  $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{5^{3n-2}} + \frac{1}{5^{3n+1}}$

6.  $(1 - 2^3) \times (1 - 3^3) \times \dots \times (1 - (n-1)^3) \times (1 - n^3)$

#### Réponses de l'exercice 2 :

1.  $\sum_{k=2}^{n-1} k$

3.  $\sum_{k=0}^n 5^k$

5.  $\prod_{k=1}^n k^2$

2.  $\sum_{k=1}^n 2k$

4.  $\prod_{k=1}^{n+1} 3^k$

6.  $\prod_{k=0}^n (2k + 1)$

#### Réponses de l'exercice 3 :

1.  $\bullet n = 0 : 1$

2.  $\bullet n = 0 : 1$

3.  $\bullet n = 0 : 2$

$\bullet n = 1 : 4$

$\bullet n = 1 : \frac{4}{3}$

$\bullet n = 1 : 3$

$\bullet n = 2 : 9$

$\bullet n = 2 : \frac{13}{9}$

$\bullet n = 2 : \frac{15}{2}$

#### Réponses de l'exercice 4 :

1.  $(n + 1)^2$

3.  $2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5.  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2.  $\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

4.  $\frac{3^{n+1}+2^{n+2}-3}{2}$

6.  $\frac{(n+1)(2n^2+n-24)}{6}$

#### Réponses de l'exercice 5 :

1.  $n(2n + 1)$

6.  $\frac{(n+m)(n+m+1)(2n+2m+1)}{6}$

11.  $\frac{1-q^{2n+2}}{1+q}$

2.  $(n + 1)(2n + 1)$

7.  $\frac{9}{4}(n + 1)^2(3n + 2)^2$

12.  $(1 + x^2)^n$

3.  $\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$

8.  $\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

13.  $(1 + e^x)^n$

4.  $\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$

9.  $\frac{1-q^{2n+1}}{1-q}$

14.  $2^{n-1}$

5.  $\frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3}$

10.  $\frac{1+q^{2n+1}}{1+q}$

15.  $(2 - x)^{n+1}$

**Réponses de l'exercice 6 :**

1.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} 2^{n-k} b^{n-k}$

2.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k a^k$

3.  $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 3^k a^k (-1)^{2n-k}$

**Réponses de l'exercice 7 :**

1.  $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$

3.  $\frac{5^{n-2}-1}{4}$

5.  $2^n - 1$

2.  $\frac{(n+1)(2n^2+19n+54)}{6}$

4.  $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

6.  $x^2 \left( (1+x)^n - nx^{n-1} - x^n \right)$

**Réponses de l'exercice 8 :**

1. Utiliser la formule avec les factorielles.

2.  $n2^{n-1}$

3.  $np$

**Réponses de l'exercice 9 :**

1.  $(n+1)^2$

3.  $\ln(n+1)$

5.  $(n+1)! - 1$

2.  $\frac{1}{n+1} - 1$

4.  $1 - \frac{1}{n+1}$

6.  $1 - \frac{1}{(n+1)!}$

**Réponses de l'exercice 10 :**

1.  $\frac{3}{2n+5}$

2.  $n+1$

3.  $\frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}$

**Réponses de l'exercice 11 :**

1. 0

5.  $(2n)!$

9.  $4^{\frac{n(n+1)}{2}}$

2.  $n!$

6.  $2^n n!$

10.  $2^{\ln((n+1)!)}$

3.  $n!$

7.  $\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

11.  $e^{x \frac{(n-1)(n+2)}{2}}$

4.  $(\ln(2))^{n+1}$

8.  $n! \sqrt{n+1}$

12.  $\frac{1}{n+1} \left( \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \right)^2$

**Réponses de l'exercice 12 :**

1.  $n(n+1)^2$

3.  $\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$

2.  $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4.  $5^n - 3^n$

## 4 Corrigés détaillés

Un jour peut-être ...