Colles de Mathématiques en E2A
Séries, probabilités générales
Semaine 6 : 7-11 octobre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre IV : séries

1.1 Définitions

- Série de terme général u_n, suite des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$, somme partielle d'ordre n, série convergente/divergente, somme d'une série, nature d'une série.
- Série grossièrement divergente.
- Série géométrique de raison q. Série géométrique dérivée, d'ordre 1 ou 2, de raison q.
- Série exponentielle.
- Sommes télescopiques.
- Séries de Riemann.
- Série à termes positifs.
- Série absolument convergente.

1.2 Résultats

- Critère nécessaire de convergence (u_n tend vers 0).
- Simplification des sommes télescopiques.
- Formules pour les sommes infinies usuelles.
- Critère de Riemann.
- Limites des séries à termes positifs.
- Critère de comparaison, critère équivalence et critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs.
- Inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes.

1.3 Méthodes

- Reconnaitre une série usuelle lors d'un calcul de somme d'une série, ou la faire apparaître « de force » lorsque la série qu'on étudie ressemble à une série usuelle (ex : $\sum \frac{n^2}{3^n}$).

- Reconnaître une somme télescopique (éventuellement cachée) et savoir calculer la somme.
- Trouver la nature d'une série à termes positifs en étudiant le terme général de la série (trouver un équivalent, ou une négligeabilité, ou une inégalité). Si le terme général n'est pas équivalent à un terme général de série usuelle, essayer de deviner la nature de la série (en ayant en tête les croissances comparées) et proposer une relation de négligeabilité qui permet de le démontrer.
- Utiliser la monotonie d'une fonction pour faire une comparaison série / intégrale.

2 Chapitre V : probabilités générales

2.1 Définitions

- Espace probabilisable, univers, tribu (on n'insistera pas sur cette dernière notion qui est hors-programme). Le fait d'être capable de donner l'univers associé à une expérience n'est pas un attendu du programme, mais cela peut aider à la compréhension sur certains cas simples.
- Evénements, événement certain, événement impossible, événement contraire.
- Evénements incompatibles, système complet d'événements.
- Probabilité, espace probabilisé.
- Evénement quasi-impossible (ou négligeable), événement quasi-certain.
- Probabilité conditionnelle relative à A, probabilité de B sachant A.
- Evénements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants.

2.2 Résultats

- Propriétés des tribus (opérations faisables sur les événements : union (`OU`), intersection (`ET`), passage au complémentaire (`Evénement contraire`)).
- Lois de Morgan.
- Propriétés générales des applications de probabilité.
- Formule du crible.
- Formule des probabilités composées.
- Formule des probabilités totales.
- Formule de Bayes.
- Stabilité de l'indépendance mutuelle par passage à l'événement contraire.
- Théorème de la limite monotone `(Hors-programme)`.

2.3 Méthodes (voir également feuille méthodo)

Savoir modéliser mathématiquement une expérience probabiliste concrète :

- Nommage de l'événement A dont on cherche la probabilité.
- Nommage des événements élémentaires.
- Décomposition de A en fonction des événements élémentaires. Cette décomposition se trouve en deux étapes :
  1. On raisonne par équivalence :
  $$A \text{ est réalisé } \iff \dots$$
  2. On conclut par une égalité ensembliste (entre événements) :
  $$A = \dots$$

C'est seulement après ce travail que l'on commence à calculer des probabilités.

Pour calculer $\mathbb{P}_A(B)$, on doit (presque) toujours rédiger en s'inspirant du modèle suivant :
Si A est réalisé, alors c'est que ...
Dans ce cas, l'expérience (ou la deuxième partie de l'expérience) consiste à ...
Ainsi, $\mathbb{P}_A(B) = \cdots$

Si, lors d'un calcul de probabilité d'une intersection d'événements, on suspecte les événements de ne pas être indépendants (tirage sans remise par exemple), alors on doit penser à la formule des probabilités conditionnelles.

Si, lors d'un calcul de probabilité, on est amené à se dire que le résultat du calcul « dépend » de ce qui s'est passé avant dans l'expérience, il faut penser à utiliser la formule des probabilités totales. Cette formule permet de formaliser l'idée d'une « disjonction de cas » en probabilité.

Si, lors d'un calcul de probabilité conditionnelle, on est amené à se dire que le conditionnement se fait dans un sens « contre-intuitif », il faut penser à utiliser la formule de Bayes. C'est typiquement le cas lorsque l'on calcule la probabilité d'un événement qui dépend du début de l'expérience alors qu'on a une information sur la suite (ou la fin) de l'expérience.

3 Questions de cours

1. Montrer que $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$ converge et calculer sa somme.
2. Montrer que $\sum \frac{n^2}{2^n}$ converge et calculer sa somme.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.
4. Compléter la fonction **Python** suivante, qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x, pour qu'elle renvoie le réel $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$.

```
def P(n, x):
    S = 0
    for k in ____________________ :
        S = ___________________________
    return S
```

5. On considère l'expérience qui consiste à lancer une infinité de fois un dé à 6 faces. Montrer que l'événement « on tombe sur 6 à tous les lancers » est quasi-impossible (le colleur / la colleuse rappellera le thm de la limite monotone si besoin).
6. On considère l'expérience qui consiste à lancer une fois une pièce de monnaie. Quel est le système complet d'événements naturellement associé à cette expérience ? L'écrire de manière formelle.

   On considère maintenant une pièce qui tombe sur `Pile` avec probabilité $p \in]0,1[$ et deux urnes. La première urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires tandis que la deuxième urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On lance la pièce puis on effectue un tirage unique d'une boule dans l'urne 1 si la pièce est tombée sur `Pile` et dans l'urne 2 sinon. Calculer la probabilité de tirer une boule noire.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On effectue n tirages successifs et sans remise dans cette urne. On note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$B_k : \text{« on tire une boule blanche au } k^{\text{e}} \text{ tirage »}$$

Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ en utilisant la formule des probabilités composées puis par un argument de dénombrement.