

Colles de Mathématiques en E2A

Probabilités, v.a.r. discrètes

Semaine 7 : 14-18 octobre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre V : probabilités générales

1.1 Définitions

- Espace probabilisable, univers, tribu (on n'insistera pas sur cette dernière notion qui est hors-programme). Le fait d'être capable de donner l'univers associé à une expérience n'est pas un attendu du programme, mais cela peut aider à la compréhension sur certains cas simples.
- Événements, événement certain, événement impossible, événement contraire.
- Événements incompatibles, système complet d'événements.
- Probabilité, espace probabilisé.
- Événement quasi-impossible (ou négligeable), événement quasi-certain.
- Probabilité conditionnelle relative à A , probabilité de B sachant A .
- Événements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants.

1.2 Résultats

- Propriétés des tribus (opérations faisables sur les événements : union (OU), intersection (ET), passage au complémentaire (Événement contraire)).
- Propriétés générales des applications de probabilité.
- Formule du crible.
- Théorème de la limite monotone (Hors-programme).
- Formule des probabilités composées.
- Formule des probabilités totales.
- Formule de Bayes.
- Stabilité de l'indépendance mutuelle par passage à l'événement contraire.

1.3 Méthodes (voir également feuille méthodo)

Savoir modéliser mathématiquement une expérience probabiliste concrète :

- Nommage de l'événement A dont on cherche la probabilité.
- Nommage des événements élémentaires.
- Décomposition de A en fonction des événements élémentaires. Cette décomposition se trouve en deux étapes :

1. On raisonne par équivalence :

$$A \text{ est réalisé} \iff \dots$$

2. On conclut par une égalité ensembliste (entre événements) :

$$A = \dots$$

C'est seulement après ce travail que l'on commence à calculer des probabilités.

Pour calculer $\mathbb{P}_A(B)$, on doit (presque) toujours rédiger en s'inspirant du modèle suivant :

Si A est réalisé, alors c'est que ...

Dans ce cas, l'expérience (ou la deuxième partie de l'expérience) consiste à ...

Ainsi, $\mathbb{P}_A(B) = \dots$

Si, lors d'un calcul de probabilité d'une intersection d'événements, on suspecte les événements de ne pas être indépendants (tirage sans remise par exemple), alors on doit penser à la formule des probabilités conditionnelles.

Si, lors d'un calcul de probabilité, on est amené à se dire que le résultat du calcul « dépend » de ce qui s'est passé avant dans l'expérience, il faut penser à utiliser la formule des probabilités totales. Cette formule permet de formaliser l'idée d'une « disjonction de cas » en probabilité.

Si, lors d'un calcul de probabilité conditionnelle, on est amené à se dire que le conditionnement se fait dans un sens « contre-intuitif », il faut penser à utiliser la formule de Bayes. C'est typiquement le cas lorsque l'on calcule la probabilité d'un événement qui dépend du début de l'expérience alors qu'on a une information sur la suite (ou la fin) de l'expérience.

2 Chapitre VII : v.a.r. discrètes

Les élèves doivent connaître **par coeur** les lois usuelles (notation, loi, espérance, variance). Les exercices peuvent porter sur

- La loi d'une v.a.r. discrète. Présentation sous forme de tableau possible pour une loi finie.
- Le calcul d'une espérance.
- Le calcul d'une variance.
- La détermination de la loi d'une transformée d'une v.a.r. discrète.

On évitera les exos portant sur les fonctions de répartition des v.a.r. discrètes (fait en cours, mais hors-programme)

2.1 Définitions

- Variable aléatoire réelle discrète (finie ou infinie).
- Système complet d'événements associé à une v.a.r. discrète.
- Loi de probabilité d'une v.a.r. discrète.
- Espérance d'une v.a.r. discrète. Moment d'ordre r d'une v.a.r. discrète.
- Variance, écart-type d'une v.a.r. discrète.
- Loi certaine, loi quasi-certaine.
- Loi uniforme.
- Loi de Bernoulli.
- Loi binomiale.
- Loi géométrique.
- Loi de Poisson.

2.2 Résultats

- Formule de la fonction de répartition d'une v.a.r. discrète. A savoir retrouver sur des exemples simples.

- Formule

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$$

provenant du fait que la famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

- Théorème de transfert.
- Propriétés de l'espérance.
- Formule de Kœnig-Huygens.
- Propriétés de la variance.
- Espérance et variance des v.a.r. suivant une loi usuelle. Pour chaque loi usuelle, il faut connaître l'expérience aléatoire de référence et la variable aléatoire associée.

2.3 Méthodes

- Lors de la définition d'une v.a.r. à l'aide d'une phrase associée au résultat d'une expérience concrète, il faut être capable de reconnaître qu'elle suit une loi usuelle le cas échéant. On utilisera pour cela la description d'une expérience aléatoire de référence.
- Si X est une v.a.r. et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une application, il faut savoir trouver la loi de $g(X)$. Il faut également savoir calculer son espérance à l'aide du théorème de transfert.
- (non exigible mais vu en cours) être capable de déterminer F_X si on connaît la loi de X . Inversement, on peut retrouver la loi de X à partir de sa fonction de répartition F_X .

3 Questions de cours

1. On considère l'expérience qui consiste à lancer une infinité de fois un dé à 6 faces. Montrer que l'événement « on tombe sur 6 à tous les lancers » est quasi-impossible (le colleur / la colleuse rappellera le thm de la limite monotone si besoin).
2. On considère l'expérience qui consiste à lancer une fois une pièce de monnaie. Quel est le système complet d'événements naturellement associé à cette expérience ? L'écrire de manière formelle.
On considère maintenant une pièce qui tombe sur **Pile** avec probabilité $p \in]0, 1[$ et deux urnes. La première urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires tandis que la deuxième urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On lance la pièce puis on effectue un tirage unique d'une boule dans l'urne 1 si la pièce est tombée sur **Pile** et dans l'urne 2 sinon. Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On effectue n tirages successifs et sans remise dans cette urne. On note, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

B_k : « on tire une boule blanche au k^{e} tirage »

Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ en utilisant la formule des probabilités composées puis par un argument de dénombrement.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une v.a.r. telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}([X = k]) = \alpha k$$

Déterminer la valeur de α .

5. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Rappeler la loi de X sous forme d'un tableau puis calculer $\mathbb{E}((X - 2)^2)$.
6. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Rappeler la loi de X sous forme d'un tableau puis déterminer la loi de $(X - 2)^2$.
7. Ecrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un réel $p \in]0, 1[$ et qui simule une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (cf TP 4).
8. Ecrire une fonction **Python** qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $p \in]0, 1[$ et qui simule une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ (cf TP 4).