Table des matières

1 Introduction : quelle motivation pour introduire les DL ?

Les DL sont un nouvel outil pour calculer des limites (ou des équivalents). Quelles sont les différentes situations qui peuvent arriver lors d'un calcul de limite et dans quel cas aurais-t-on besoin de ce nouvel outil ?

1. Pas de F.I.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + x = +\infty$ par somme
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\ln(x)} = 0$ par quotient
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^x - 1 = +\infty$ par produit et somme
2. Une F.I. qui se lève par croissances comparées
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$ par croissances comparées
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x - 1 = -1$ par croissances comparées
3. Une F.I. qui se lève par équivalents
   - $\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ car $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
   - $x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\frac{1}{x} = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
4. Une F.I. qui se lève par équivalents et croissances comparées
   - Soit $n \geqslant 2$.
   $$x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(x)}{1+x^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{x^{n-\frac{3}{2}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissances comparées, car } n - \frac{3}{2} > 0$$
   - $(e^x - 1)\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées
5. Il existe des F.I. que l'on ne peut pas simplifier avec les équivalents usuels dont nous disposons et où les croissances comparées ne sont pas suffisantes pour conclure.
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ est une F.I. de la forme $\frac{0}{0}$
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ est une F.I. de la forme $+\infty - (+\infty)$
   - On aimerait calculer un équivalent de $\ln(1+x) - x$ en 0. Comment faire ? On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ mais il est interdit de sommer des équivalents donc on ne peut pas conclure que
   $$\cancel{\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} x - x = 0}$$
   On a besoin d'un nouvel outil pour calculer cet équivalent : les DL. A la fin du chapitre, on sera capable d'écrire
   $$\begin{array}{lll} & \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) & \text{DL de } \ln(1+x) \text{ à l'ordre 2 en 0} \\ \text{donc} & \ln(1+x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) & \text{contrairement aux équivalents, on peut sommer dans les égalités} \\ \text{donc} & \ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} & \text{le DL donne un équivalent} \\ \text{donc} & \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{2} & \\ \text{donc} & \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2} & \end{array}$$

2 Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point

Definition 1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un voisinage de x_0 est un intervalle ouvert contenant x_0.

2.1 $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et approximation affine de f en x_0

Definition 2. Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f possède *un développement limité d'ordre* 1 *en* x_0 si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction ε définie au voisinage de x_0 tels que :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Si c'est le cas, on dit que la fonction $g : x \mapsto a + b\,(x - x_0)$ est une *approximation affine de f au voisinage de x_0*.

Remarque 1. Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors on a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - (a + b\,(x - x_0)) = 0$. Ainsi, la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = a + b\,(x - x_0)$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0.

Théoreme 1. *Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.*

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f \text{ admet un développement limité d'ordre } 1 \text{ en } x_0$$

Si c'est le cas, alors les coefficients du développement limité sont : $\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{cases}$ *et donc il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que au voisinage de x_0 :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$*. En particulier, il y a unicité du développement limité de f en x_0 à l'ordre* 1*.*

Remarque 2. Parmi toutes les droites, la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

est celle qui représente le mieux le graphe de f au voisinage de x_0. On retrouve l'équation de la tangente en x_0.

2.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Théoreme 2 (Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1))**.** *Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est dérivable en x_0, son $\mathrm{DL}_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$$

Démonstration. On a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\frac{(x - x_0)\,\varepsilon(x)}{x - x_0} = \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

et donc $(x - x_0)\,\varepsilon(x) = \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$. □

Théoreme 3 (Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1) en 0)**.** *Si f est dérivable en* 0*, son* $\mathrm{DL}_1(0)$ *s'écrit sous la forme :*

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

Remarque 3. De la précédente formule, on déduit que si $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) - f(0) \underset{x \to 0}{\sim} f'(0)x$.

2.3 Développements limités usuels en 0

Théoreme 4 (Formules de Taylor-Young usuelles). *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
2. $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
3. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. *En particulier :*
   (a) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ $(\alpha = \frac{1}{2})$
   (b) $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ $(\alpha = -1)$

Remarque 4. On retrouve alors les équivalents usuels :

1. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
3. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ (si $\alpha \neq 0$).

Exemple 1. On peut maintenant calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x}$. On écrit

$$\begin{array}{ll} & \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x) \\ \text{donc} & \ln(1+x) - x = \underset{x\to 0}{o}(x) \\ \text{donc} & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x} = 0 \end{array}$$

mais on ne peut pas encore calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$. Il nous faut les DL à l'ordre 2.

3 Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point

3.1 $\mathrm{DL}_2(x_0)$ et approximation quadratique de f en x_0

Definition 3. Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f possède *un développement limité d'ordre* 2 *en* x_0 si il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et une fonction ε définie au voisinage de x_0 tels que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)}$$

Si c'est le cas, on dit que la fonction $g : x \mapsto a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2$ est une *approximation quadratique de f au voisinage de* x_0.

Remarque 5. Si f admet un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ alors : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - g(x) = 0$. Ainsi, les courbes représentatives de f et g ont tendance à se confondre à proximité de x_0. La courbe représentative de g est la parabole qui épouse le mieux le graphe de f au voisinage de x_0.

Exemple 2. Soit $f : x \mapsto 1 + x^2 + x^4$. Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f est $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

3.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théoreme 5. *Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable en x_0. Alors f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0 dont les coefficients sont :*

$$\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \\ c = \dfrac{f''(x_0)}{2} \end{cases}$$

Son $\mathrm{DL}_2(x_0)$ *s'écrit sous la forme :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

Théoreme 6. *Il y a unicité du développement limité à l'ordre 2.*

Théoreme 7 (Formule de Taylor-Young (à l'ordre 2) en 0)**.** *Soit f définie dans un voisinage de 0. Si f est deux fois dérivable en 0, son* $\mathrm{DL}_2(0)$ *s'écrit sous la forme :*

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$$

3.3 Développements limités usuels en 0

Théoreme 8. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
3. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *et en particulier :*
   (a) $\dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
   (b) $\boxed{\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$

3.4 Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

Théoreme 9. *Soit f définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable en x_0 et que $f''(x_0) \neq 0$. Alors, la position locale de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente en x_0 est donnée par le signe de $f''(x_0)$. Plus précisément :*

- *si $f''(x_0) > 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de sa tangente.*
- *si $f''(x_0) < 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de sa tangente.*

Démonstration. On a, dans un voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right) &= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right) \\ &\underset{x\to x_0}{\sim} \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

□

4 Calcul pratique des développements limités

4.1 Composition d'un DL avec une suite qui tend vers 0

Théoreme 10. *Puisque* $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, on a :*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

4.2 Changement de variable $x \leftarrow -x$

Considérons le DL $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. En remplaçant x par $-x$, on obtient

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &= (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left((-x)^2\right)\\ &= -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

On obtient le DL usuel

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Considérons le DL $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. En remplaçant x par $-x$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 - (-x) + (-x)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left((-x)^2\right)\\ &= 1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

On obtient le DL usuel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

Il faut toujours penser aux parenthèses quand on fait une substitution.

4.3 Troncature

On peut tronquer le $DL_2(0)$ pour obtenir le $DL_1(0)$. Il suffit de remplacer les termes d'ordre 2 par $\underset{x\to 0}{o}(x)$.

Par exemple, si $f(x) = 1 + 3x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, alors $f(x) = 1 + 3x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

4.4 Calcul via les dérivées (application concrète de la formule de Taylor-Young)

Soit $f : x \mapsto x^2 e^x + 3x$. On a

$$\begin{aligned}f'(x) &= x(2+x)e^x + 3\\ f''(x) &= (2+4x+x^2)e^x\end{aligned}$$

donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$ et $f''(0) = 2$. D'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = 3x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

4.5 Somme, produit et composition de DL

On peut faire la somme et le produit de deux DL.

Exercice 1 : (Somme de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x} + x$ puis de $x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 : (Produit de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto (1+x)\mathrm{e}^x$ puis de $x \mapsto (x-1)\ln(1+x)$.

Exercice 3 : (Composition de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1+2x)$ puis de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

5 Calcul d'un équivalent à l'aide d'un développement limité

Théoreme 11. *Soit f une fonction qui admet un $\mathrm{DL}_2(0)$: $f(x) = a + bx + cx^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.*

- *Si $a \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a$.*
- *Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} bx$.*
- *Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} cx^2$.*