Table des matières

On fixe $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé pour tout le chapitre.

1 Lois associées à un couple de v.a.r. discrètes

1.1 Loi d'un couple de v.a.r. discrètes

1.1.1 Couple de v.a.r. discrètes

Definition 1.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes. On appelle *couple de v.a.r.* (X, Y) l'application définie par :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Exercice 1 : *(ECRICOME 2023)*

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
   (a) On suppose que l'événement $[X = k]$ est réalisé.
   Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
   (b) Pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, exprimer $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = j])$ en fonction de k et j.
   On distinguera les cas $j \leq k$ et $j \geq k + 1$.
4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,
   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$
   (b) En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,
   $$\mathbb{P}([Y = j]) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$
5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+2}{3}$.
6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
7. (a) Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \dfrac{n^2 - 1}{18}$.
8. (a) Écrire une fonction en langage Python, nommée `seconde_urne`, prenant en entrée un entier naturel `k` non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant 1, 2 éléments valant 2, …, j éléments valant j, … , jusqu'à k éléments valant k.
   Par exemple, l'appel de `seconde_urne(4)` renverra `[1,2,2,3,3,3,4,4,4,4]`.

(b) Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel n non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires (X, Y).

```
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    X = .....
    urne2 = seconde_urne(.....)
    nb = len(urne2)
    i = rd.randint(0, nb)
    Y = .....
    return X,Y
```

(c) On considère la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier naturel `n` non nul.

```
def fonction(n):
    liste = [0]*n
    for i in range(10000):
        j = simul_XY(n)[1]
        liste[j-1] = liste[j-1] + 1/10000
    return liste
```

Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$. On simule 50 réalisations du couple de variables aléatoires (X, Y) à l'aide de la fonction `simul_XY` définie à la question 8b. On représente alors les valeurs obtenues sous forme d'un nuage de points, où les valeurs des réalisations de X sont représentées en abscisse et les valeurs des réalisations de Y en ordonnées. On trace également, sur la même figure, la droite de régression linéaire associée à ce nuage de points.

   (a) Déterminer par un calcul une valeur approchée des coordonnées du point moyen du nuage de points. Quel théorème de probabilités permet de justifier cette approximation ?

   (b) Parmi les figures représentées ci-dessous, en justifiant soigneusement votre réponse, indiquer celle qui correspond au nuage de points et à la droite de régression linéaire étudiés.

Figure 1

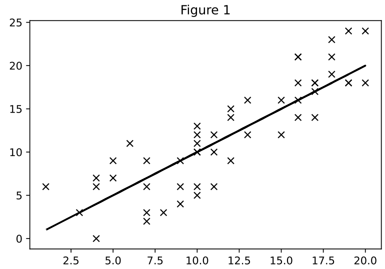


Figure 2

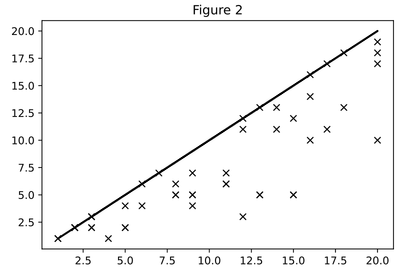


Figure 3

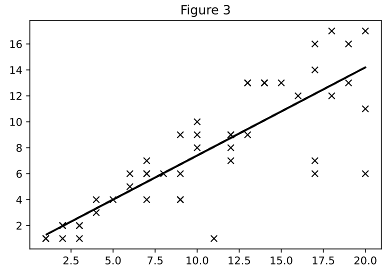
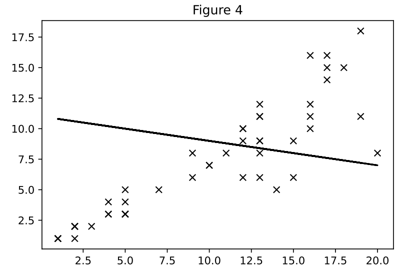


Figure 4



Exercice 2 : On considère un dé équilibré à 4 faces. On lance deux fois ce dé et on note

- X la v.a.r. égale au plus petit des deux résultats
- Y la v.a.r. égale au plus grand des deux résultats

On notera également U (resp. V) le résultat du premier (resp. second) lancer.

1. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire les lois marginales de X et de Y.
4. Calculer $\mathbb{V}(X + Y)$ sans utiliser la covariance de X et de Y.
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
6. Calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.
7. Calculer $\mathbb{V}(X)$.
8. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
9. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$
10. Calculer $\mathbb{V}(Y)$ en utilisant le résultat précédent.
11. Calculer $\rho(X, Y)$.
12. Ecrire une fonction **Python** qui simule X (resp. Y).
13. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 3 : On considère une pièce de monnaie qui tombe sur Face avec probabilité $p \in]0, 1[$. On lance deux fois cette pièce et on note X (resp. Y) la v.a.r. égale à 1 si, au cours du premier (resp. deuxième) lancer, on est tombé sur Face, et égale à 0 sinon.

1. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Rappeler la loi de X ainsi que celle de Y.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4 : Bob est gérant d'un magasin de jeux de sociétés. On note N la v.a.r. égale au nombre de clients potentiels visitant le magasin en une journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A la fin de chaque journée, si n désigne le nombre de clients potentiels ayant visité le magasin, Bob lance n fois une pièce de monnaie qui tombe sur `Pile` avec probabilité $p \in]0, 1[$. On note alors X la v.a.r. égale au nombre de `Pile` obtenus et Y la v.a.r. égale au nombre de `Face` obtenus. On pose enfin $q = 1 - p$.

1. (a) Démontrer que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(p\lambda)$.
   (b) En déduire sans calcul que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(q\lambda)$.
2. (a) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$: $[X = i] \cap [Y = j] = [X = i] \cap [N = i + j]$.
   (b) En déduire que les v.a.r. X et Y sont indépendantes.

1.1.2 Loi d'un couple de v.a.r. discrètes

Definition 2. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. On appelle *loi de probabilité du couple* (X, Y) ou *loi conjointe des v.a.r. X et Y* la donnée de

- l'ensemble $X(\Omega)$
- l'ensemble $Y(\Omega)$
- toutes les valeurs $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour x décrivant $X(\Omega)$ et y décrivant $Y(\Omega)$ (*i.e.* pour (x, y) décrivant $X(\Omega) \times Y(\Omega)$).

Remarque 1. $[X = x] \cap [Y = y] = [(X, Y) = (x, y)] = [X = x, Y = y]$. Il faut savoir jongler entre ces différentes notations si l'énoncé n'utilise pas celle dont vous avez l'habitude.

Remarque 2. Si X et Y sont finies, on pourra représenter la loi du couple (X, Y) sous forme de tableau.

Exemple 1. On reprend l'exemple de l'exo 3. A développer pour obtenir le tableau de la loi.

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	0
1	p^2	$p(1-p)$
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$

Exemple 2. On reprend l'exemple de l'exo 2.

- $\Omega = [\![1,4]\!]^2$. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \text{Card}([\![1,4]\!]^2) = 4 \times 4 = 16$.
- Ω est muni de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$. *($(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé)*

On a donc :

$$\forall A \in \mathscr{A},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(A)}{16}$$

Déterminons la loi de (X,Y). Tout d'abord : $X(\Omega) = [\![1,4]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,4]\!]$.

Soit $i \in [\![1,4]\!]$ et soit $j \in [\![1,4]\!]$.

L'événément $[X = i] \cap [Y = j]$ est réalisé
$\Longleftrightarrow$ L'événément $[X = i]$ est réalisé et l'événement $[Y = j]$ est réalisé
$\Longleftrightarrow$ Le plus petit des deux résultats obtenus vaut i et le plus grand des deux résultats obtenus vaut j

Trois cas se présentent (i et j étant des variables libres, on peut faire une disjonction de cas dessus).

- Si $i > j$, alors :
$$[X = i] \cap [Y = j] = \varnothing \qquad \text{et donc} \qquad \text{Card}\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = 0$$
En effet, le plus petit des deux résultats ne peut être strictement plus grand que le plus grand.
- Si $i < j$, alors :
$$[X = i] \cap [Y = j] = \{(i,j),(j,i)\} \qquad \text{et donc} \qquad \text{Card}\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = 2$$
(cet événement est réalisé par deux 2-tirages : celui où le 1^{er} dé vaut i et le suivant j et celui où le premier dé vaut j et le suivant i)
- Si $i = j$, alors :
$$[X = i] \cap [Y = j] = \{(i,i)\} \qquad \text{et donc} \qquad \text{Card}\left([X = i] \cap [Y = j]\right) = 1$$
(cet événement est réalisé par un unique 2-tirages : le 1^{er} lancer donne i et le deuxième aussi)

On en conclut :

$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\ \mathbb{P}\big(\,[X = i] \cap [Y = j]\,\big) = \begin{cases} \frac{0}{16} & \text{si } i > j \\ \frac{2}{16} & \text{si } i < j \\ \frac{1}{16} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ce résultat peut aussi être présenté sous forme de tableau.

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

Remarque 3.
- On commence toujours par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- Il est fréquent de devoir réaliser une disjonction de cas lorsqu'on détermine la loi d'un couple de v.a.r. discrètes.

1.1.3 Système complet d'événements associé à un couple de v.a.r. discrètes

Definition 3. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes. On appelle *système complet d'événements associé au couple* (X,Y) la famille :

$$\big(\,[X = x] \cap [Y = y]\,\big)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$$

Cette famille est un système complet d'événements. En particulier :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \Big(\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) \\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque 4. Cette formule donne un moyen de vérifier le calcul de la loi d'un couple. On peut sommer tous les nombres du tableau : on doit trouver 1.

1.2 Lois conditionnelles

Definition 4. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

1. Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$. Déterminer la *loi conditionnelle de* X *sachant* $[Y = y]$, c'est calculer, pour tout $x \in X(\Omega)$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])$.
2. Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. Déterminer la *loi conditionnelle de* Y *sachant* $[X = x]$, c'est calculer, pour tout $y \in Y(\Omega)$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y])$.

Remarque 5. Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. Par définition :

$$\mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbb{P}([X = x])}$$

Ainsi, si on connaît deux quantités parmi les trois suivantes :

- la loi du couple (X, Y),
- la loi de X,
- les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ $(x \in X(\Omega))$.

alors on obtient la troisième.

1.3 Lois marginales

1.3.1 Définition

Definition 5. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

1. On appelle $1^{ère}$ *loi marginale du couple* (X, Y) la loi de la v.a.r. X.
2. On appelle $2^{ème}$ *loi marginale du couple* (X, Y) la loi de la v.a.r. Y.

Remarque 6. L'expression « loi marginale » n'a de sens que dans un contexte d'étude d'un couple de v.a.r. (X, Y). Aux concours, cette expression ne sera pas forcément utilisée, même dans les sujets sur les couples. On parlera alors tout simplement de loi de X (resp. Y) en lieu et place de $1^{\text{ère}}$ (resp. $2^{\text{ème}}$) loi marginale du couple (X, Y).

1.3.2 Détermination en pratique des lois marginales

Théoreme 1. *Soit* (X, Y) *un couple de v.a.r. discrètes.*

1. *Loi de* X *via la loi du couple* (X, Y)*. On a :*

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x]) \ = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

2. *Loi de* X *via la loi de* Y *et les lois conditionnelles de* X *sachant* $[Y = y]$ *pour tout* $y \in Y(\Omega)$*.*
   On suppose que, pour tout $y \in Y(\Omega)$*,* $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$*. Alors :*

$$\boxed{\mathbb{P}([X = x]) \ = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y])\ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])}$$

3. *Loi de Y via la loi du couple (X, Y). On a :*

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([Y = y]) \ = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [X = x])}$$

4. *Loi de Y via la loi de X et les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$.*
   On suppose que, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = y]) \ = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) \ \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y])}$$

A retenir.

$$\boxed{\text{Pour déterminer une loi marginale, on applique la formule des probabilités totales.}}$$

Remarque 7. Cela permet de construire des énoncés d'exercices du type :

1. Reconnaître la loi de X.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y) *(si l'énoncé a un parti-pris couple).*

   OU

   Pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ *(si l'énoncé a un parti-pris lois conditionnelles).*
3. Déterminer la loi de Y.

Exemple 3. Lorsque X et Y sont finies, on peut lire la loi de X (ou de Y) sur le tableau donnant la loi du couple (X, Y). Reprenons l'exemple du lancer de deux dés 4.

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	Loi de X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
Loi de Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	

2 Indépendance de variables aléatoires discrètes

2.1 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Definition 6. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. Les *v.a.r. X et Y sont indépendantes* (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])}$$

Autrement dit, les v.a.r. X et Y sont indépendantes si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

Méthode. Pour montrer que deux v.a.r. discrètes ne sont pas indépendantes, on exhibe $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \neq \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

Si c'est possible, on choisit x et y tels que

$$[X = x] \cap [Y = y] = \varnothing \qquad (\text{et donc } \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0)$$

et

$$\mathbb{P}([X = x]) \neq 0, \qquad \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$$

Exemple 4. On reprend l'exo 2 ici sur la question de l'indépendance.

Remarque 8. Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes. Alors, tout événement ne dépendant que de la variable X est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable Y. Par exemple, pour tout $x \in X(\Omega)$, pour tout $y \in Y(\Omega)$:

- $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y \leq y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y \leq y])$,
- $\mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = \mathbb{P}([X \leq x]) \times \mathbb{P}([Y \leq y])$,
- $\mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y > y]) = \mathbb{P}([X \leq x]) \times \mathbb{P}([Y > y])$,
- $\mathbb{P}([X > x] \cap [Y < y])) = \mathbb{P}([X > x] \times \mathbb{P}([Y < y])$,
- ...

Théoreme 2. *Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.*

1. *Supposons :* $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. *Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{ll} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \ = \ \mathbb{P}([Y = y]) \end{array}}$$

2. *Supposons :* $\forall y \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$. *Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{ll} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X = x]) \end{array}}$$

Exemple 5. On peut illustrer ce thm avec l'exo 1.

2.2 Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Definition 7. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (avec $n \geq 2$) des v.a.r. discrètes.

1. On dit que les v.a.r. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont *(mutuellement) indépendantes* (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\boxed{\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = x_i])}$$

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de var aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables *(mutuellement) indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$)* si :

$$\forall n \geq 2,\ \text{ les variables } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes}$$

Théoreme 3. *Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors toute famille de n événements dont chacun est construit à l'aide d'une v.a.r. X_i est une famille d'événements mutuellement indépendants. Par exemple, pour tout $x_1 \in X_1(\Omega)$, ..., $x_n \in X_n(\Omega)$:*

- *les événements $[X_1 = x_1], [X_2 \leq x_2], \ldots, [X_n \leq x_n]$ sont mutuellement indépendants,*
- *les événements $[X_1 \leq x_1], [X_2 > x_2], \ldots, [X_n \leq x_n]$ sont mutuellement indépendants,*
- ...

Théoreme 4 (Lemme des coalitions)**.**

1. *Cas de 2 v.a.r.*
   Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. Soient $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si X et Y indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
2. *Généralisation à n v.a.r.*
   Soient X_1, ..., X_n des v.a.r. discrètes. Soient $f_1 : X_1(\Omega) \to \mathbb{R}$, ..., $f_n : X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ des fonctions. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors
   (a) *$f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes*
   (b) *Toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_{p+1}, \ldots, X_n$ (pour $p \in [\![2, n-1]\!]$)*

Exemple 6. 1. Soient $X_1, \ldots, X_5$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :

(a) les v.a.r. X_1, ${X_2}^2$, $2\,X_3$, $\mathrm{e}^{X_4}-1$ et $|X_5|$ sont mutuellement indépendantes.
(b) les v.a.r. $2\,X_1X_3 - X_5$ et ${X_2}^2$ sont indépendantes.
(c) les v.a.r. $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_3, X_4, X_5)$ sont indépendantes.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} sont indépendantes.
3. Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors, en procédant par l'absurde, on démontre que X et Y ne le sont pas non plus.

3 Opérations sur les v.a.r. discrètes

Dans cette section, on étudie des v.a.r. du type $Z = g(X, Y)$ où

- (X, Y) est un couple de v.a.r. discrètes
- $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$

3.1 Cas général : loi de $g(X, Y)$

Théoreme 5. *Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors,*

1. *Z est un v.a.r. discrète.*
2. *L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X, Y)$ est donnée par :*

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subseteq & \{g(x, y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\} \end{array}$$

3. *La loi de $Z = g(X, Y)$ est donnée par :*

$$\boxed{\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}([Z = z]) = \sum_{\substack{(x,y) \,\in\, X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ z \,=\, g(x,y)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

Remarque 9. On retiendra que si l'on connait la loi conjointe de X et de Y, alors on connait la loi de $g(X, Y)$. Autrement dit, la loi de $g(X, Y)$ est entièrement déterminée par la loi du couple (X, Y). Mais dans le cas général, il peut être difficile de déterminer la loi de $g(X, Y)$ explicitement.

Remarque 10. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\boxed{\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}([Z = z]) = \sum_{\substack{(x,y) \,\in\, X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ z \,=\, g(x,y)}} \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])}$$

Dans ce cas, si l'on connait la loi de X et la loi de Y, alors on connait la loi de $g(X, Y)$.

3.2 Cas particuliers (opérations classiques)

3.2.1 Loi de la somme de deux v.a.r. discrètes

Théoreme 6. *Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.*
Alors $X + Y$ est une v.a.r. discrète et on détermine la loi de $X + Y$ à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.

1. *La famille $([X = x])_{x\in X(\Omega)}$ est un sce. Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales : pour tout $z \in (X+Y)(\Omega)$*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X + Y = z]) & = & \sum\limits_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [X + Y = z]) \\ & = & \sum\limits_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) \\ & = & \sum\limits_{\substack{x\in X(\Omega) \\ z-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) \end{array}$$

2. *La famille $([Y=y])_{y\in Y(\Omega)}$ est un sce. Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales : pour tout $z\in(X+Y)(\Omega)$*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X+Y=z]) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y=y]\cap[X+Y=z])\\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y=y]\cap[X=z-y])\\ &= \sum_{\substack{y\in Y(\Omega)\\ z-y\in X(\Omega)}} \mathbb{P}([Y=y]\cap[X=z-y])\end{aligned}$$

Le choix de l'introduction du sce $([Y=y])_{y\in Y(\Omega)}$ ou $([X=x])_{x\in Y(\Omega)}$ est guidé par les lois de X et Y. On optera toujours pour le sce le plus simple.

Exemple 7. On reprend l'exemple de l'exo 2. Notons U (resp. V) le résultat du premier (resp. deuxième) lancer. On cherche la loi de $X+Y$, on remarque que $X+Y=U+V$.

- $\Omega=[\![1,4]\!]\times[\![1,4]\!]$ est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
- $X(\Omega)=[\![1,4]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![1,4]\!]$
- $(X+Y)(\Omega)=[\![2,8]\!]$.
- Soit $k\in[\![2,8]\!]$. La famille $([V=j])_{j\in[\![1,4]\!]}$ est un sce, on a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X+Y=k]) &= \mathbb{P}([U+V=k])\\ &= \sum_{j\in[\![1,4]\!]} \mathbb{P}([V=j]\cap[U+V=k])\\ &= \sum_{\substack{j\in[\![1,4]\!]\\ k-j\in[\![1,4]\!]}} \mathbb{P}([V=j]\cap[U=k-j])\\ &= \mathbb{P}([V=1]\cap[U=k-1])+\mathbb{P}([V=2]\cap[U=k-2])\\ &+ \mathbb{P}([V=3]\cap[U=k-3])+\mathbb{P}([V=4]\cap[U=k-4])\\ &= \mathbb{P}([V=1])\mathbb{P}([U=k-1])+\mathbb{P}([V=2])\mathbb{P}([U=k-2]) \qquad \text{(par indépendance)}\\ &+ \mathbb{P}([V=3])\mathbb{P}([U=k-3])+\mathbb{P}([V=4])\mathbb{P}([U=k-4])\\ &= \frac{1}{4}\left(\mathbb{P}([U=k-1])+\mathbb{P}([U=k-2])+\mathbb{P}([U=k-3])+\mathbb{P}([U=k-4])\right)\end{aligned}$$

Attention : si $k-j\leq 0$ ou $k-j\geq 5$, alors $[U=k-j]=\varnothing$ puisque $k-j$ n'appartient pas à $U(\Omega)$.
On en déduit la loi de $X+Y$:

$k\in(X+Y)(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}([X+Y=k])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Exercice 5 : Soient X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $p\in\,]0,1[$). En utilisant un sce associé à X, montrer que pour tout $n\geq 2$:

$$\mathbb{P}([X+Y=n]) \;=\; (n-1)\,p^2\,q^{n-2}$$

Théoreme 7 (Stabilité des lois classiques)**.**

1. *Stabilité des lois binomiales. Soit $p\in\,]0,1[$ et soient $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Si*
   - $X\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$ *et* $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$
   - X *et* Y *indépendantes*

   alors $X+Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m+n,p)$.
2. *Stabilité des lois de Poisson. Soient $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et $\mu\in\mathbb{R}_+^*$. Si*
   - $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$ *et* $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\mu)$
   - X *et* Y *indépendantes*

alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 6 : Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ où $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Reconnaître la loi de X sachant $[X + Y = n]$.

Exercice 7 : Soient $X_1, \dots, X_k$ des v.a.r. mutuellement indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ lorsque :

1. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
2. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.
3. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, ..., $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$.

3.2.2 Loi du produit de deux v.a.r. discrètes

Théoreme 8. *Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. Alors XY est une v.a.r. discrète et on détermine la loi de XY à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.*

1. *La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un sce. Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales : pour tout $z \in (XY)(\Omega)$*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([XY = z]) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [XY = z]) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [xY = z])\end{aligned}$$

2. *La famille $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce. Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales : pour tout $z \in (XY)(\Omega)$*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([XY = z]) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [XY = z]) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [yX = z])\end{aligned}$$

Le choix de l'introduction du sce $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ ou $([X = x])_{x \in Y(\Omega)}$ est guidé par les lois de X et Y. On optera toujours pour le sce le plus simple.

Exercice 8 :*(EML 2007)* On considère une v.a.r. Y dont la loi est définie par :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{-n}$$

1. (a) Montrer que la v.a.r. $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

On considère maintenant une v.a.r. U, **indépendante de** Y, dont la loi est définie par :

$$U(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad \mathbb{P}([U = -1]) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{2}$$

Enfin, on note $T = U \times Y$.

2. Démontrer que T est une v.a.r. discrète dont on déterminera la loi.
3. Montrer que les variables Y et T ne sont pas indépendantes puis montrer que $\mathbb{E}(YT) = \mathbb{E}(Y)\ \mathbb{E}(T)$.

Démonstration. 1. (a) • $(Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y + 1 = n]) &= \mathbb{P}([Y = n - 1]) \\ &= \mathrm{e}^{-(n-1)}\ (1 - \mathrm{e}^{-1}) \\ &= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\end{aligned}$$

Ainsi : $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(b) • La v.a.r. $Y+1$ suit une loi géométrique donc admet une espérance et une variance.

• Or : $Y = (Y+1)-1$. Donc Y admet donc une espérance et une variance en tant que somme de v.a.r. qui admettent une variance.

• On détermine enfin $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y) & = & \mathbb{E}(Y+1) - \mathbb{E}(1) \;=\; \mathbb{E}(Y+1) - 1 \\ & = & \dfrac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1 \;=\; \dfrac{e}{e-1} - 1 \\ & = & \dfrac{e-(e-1)}{e-1} \;=\; \dfrac{1}{e-1} \end{array}$$

Par propriété de la variance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(Y) & = & \mathbb{V}(Y+1) \;=\; \mathbb{V}(Y) \\ & = & \dfrac{1-(1-\frac{1}{e})}{(1-\frac{1}{e})^2} \;=\; \dfrac{\frac{1}{e}}{(1-\frac{1}{e})^2} \\ & = & \dfrac{1}{e\,(\frac{e-1}{e})^2} \;=\; \dfrac{e^2}{e\,(e-1)^2} \;=\; \dfrac{e}{(e-1)^2} \end{array}$$

2. • T est une v.a.r. en tant que produit de deux v.a.r. .

• $T(\Omega) = \mathbb{Z}$. Ainsi, T est une v.a.r. discrète.

• Soit $n \in \mathbb{Z}$. La famille $([U=-1],[U=1])$ forme un sce.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([T=n]) & = & \mathbb{P}([U=-1] \cap [T=n]) + \mathbb{P}([U=1] \cap [T=n]) \\ & = & \mathbb{P}([U=-1] \cap [UY=n]) + \mathbb{P}([U=1] \cap [UY=n]) \\ & = & \mathbb{P}([U=-1] \cap [Y=-n]) + \mathbb{P}([U=1] \cap [Y=n]) \\ & = & \dfrac{1}{2}\,\big(\mathbb{P}([Y=-n]) + \mathbb{P}([Y=n])\big) \end{array}$$

L'avant dernière égalité est vérifiée par indépendance des v.a.r. U et Y.
Trois cas se présentent.

— Si $n = 0$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([T=0]) & = & \dfrac{1}{2}\,\big(\mathbb{P}([Y=0]) + \mathbb{P}([Y=0])\big) \\ & = & \mathbb{P}([Y=0]) \;=\; 1 - e^{-1} \end{array}$$

— Si $n > 0$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([T=n]) & = & \dfrac{1}{2}\,\big(\mathbb{P}([Y=n])\big) \\ & = & \dfrac{1}{2}\,e^{-n}\,(1-e^{-1}) \end{array}$$

— Si $n < 0$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([T=n]) & = & \dfrac{1}{2}\,\big(\mathbb{P}([Y=-n]) \\ & = & \dfrac{1}{2}\,e^{-n}\,(1-e^{-1}) \end{array}$$

3. Les v.a.r. Y et $T = UY$ **ne sont pas indépendantes**. En effet :

$$\mathbb{P}([Y=0] \cap [UY=1]) \;=\; \mathbb{P}([U=0] \cap [0=1]) \;=\; 0$$

puisque $[0=1] = \varnothing$. Or : $\mathbb{P}([Y=0]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([UY=1]) \neq 0$.
Montrons maintenant que $\mathbb{E}(YT) = \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(T)$:

- $YT = YUY = UY^2$. Or U et Y sont indépendantes. Donc, d'après le lemme des coalitions, U et Y^2 sont indépendantes. Ces deux v.a.r. admettant une espérance (Y^2 admet une espérance car Y admet une variance - déjà démontré). Ainsi :

$$\mathbb{E}(YT) \ = \ \mathbb{E}(UY^2) \ = \ \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(Y^2) \ = \ 0 \times \mathbb{E}(Y^2) \ = \ 0$$

- De même : $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(U\,Y) = \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{E}(Y) = 0$

Les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes et pourtant :

$$\mathbb{E}(YT) \ = \ 0 \ = \ \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(T)$$

□

Exercice 9 : Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ (avec $p \in \,]0,1[$ et $q = 1 - p$). Déterminer la loi de $Z = XY$.

Démonstration. Comme $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1\}$ alors : $Z(\Omega) = \{0,1\}$. On en déduit que Z suit une loi de Bernoulli.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\,[Z=1]\,\big) &= \mathbb{P}\big(\,[X=1] \cap [Y=1]\,\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\,[X=1]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[Y=1]\,\big) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
&= pq
\end{aligned}$$

Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$. □

3.2.3 Loi d'un maximum / minimum de deux v.a.r. discrètes

Théoreme 9. *Soient X et Y deux v.a.r. discrètes. On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de ces v.a.r. . On note $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$. Alors :*
- *U et V sont des variables aléatoires discrètes*
- *si $X(\Omega) = Y(\Omega)$, alors $U(\Omega) = V(\Omega) = X(\Omega) = Y(\Omega)$*
- *pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{[\max(X,Y) \leq t] \ = \ [X \leq t] \cap [Y \leq t]}$$

$$\boxed{[\max(X,Y) < t] \ = \ [X < t] \cap [Y < t]}$$

$$\boxed{[\min(X,Y) \geq t] \ = \ [X \geq t] \cap [Y \geq t]}$$

$$\boxed{[\min(X,Y) > t] \ = \ [X > t] \cap [Y > t]}$$

De plus, si X et Y sont indépendantes (formules hors-programme) :
1. *La fonction de répartition de $U = \min(X,Y)$ vérifie :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ F_U(t) = 1 - \big(1 - F_X(t)\big)\,\big(1 - F_Y(t)\big)$$

2. *La fonction de répartition de $V = \max(X,Y)$ vérifie :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ F_V(t) = F_X(t)\ F_Y(t)$$

Remarque 11. Une fois connu le maximum de 2 v.a.r. , on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que $X + Y = \min(X,Y) + \max(X,Y)$. Cela fonctionne aussi dans l'autre sens.

Exercice 10 : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$. Notons $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}([X > n])$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([U > n])$.

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([U = n]) = \mathbb{P}([U > n-1]) - \mathbb{P}([U > n])$.
(d) En déduire la loi de U.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}([V \leq n])$ puis $\mathbb{P}([V > n])$.
(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([V = n]) = \mathbb{P}([V > n-1]) - \mathbb{P}([V > n])$.
(c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $\sum\limits_{n=1}^{m} n\mathbb{P}([V = n]) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V > n]) - m\,\mathbb{P}(V > m)$.
(d) En déduire que V admet une espérance et la calculer.

Démonstration.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\mathbb{P}([X > n]) = q_1^n$.
(car $\mathbb{P}([X > n]) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n+1}^{+\infty} [X = i]\right)$ *...)*
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U > n]) &= \mathbb{P}([X > n] \cap [Y > n]) \\ &= \mathbb{P}([X > n])\ \mathbb{P}([Y > n]) && \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\ &= q_1^n\ q_2^n\ =\ (q_1\, q_2)^n \end{aligned}$$
(c) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors : $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque U est à valeurs entières :
$$[U > n-1]\ =\ [U = n]\ \cup\ [U > n]$$
Comme $[U = n]$ et $[U > n]$ sont incompatibles :
$$\mathbb{P}(\,[U > n-1]\,)\ =\ \mathbb{P}(\,[U = n]\,)\ +\ \mathbb{P}(\,[U > n]\,)$$
On en déduit :
$$\mathbb{P}([U = n]) = \mathbb{P}(\,[U > n-1]\,) - \mathbb{P}(\,[U > n]\,)$$
(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U = n]) &= \mathbb{P}(\,[U > n-1]\,) - \mathbb{P}(\,[U > n]\,) \\ &= (q_1\, q_2)^{n-1} - (q_1\, q_2)^n \\ &= (q_1\, q_2)^{n-1}\ (1 - q_1\, q_2) \end{aligned}$$
On a donc :
- $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([U = n])\ =\ (1 - q_1\, q_2)\ (q_1\, q_2)^{n-1}$.

Comme $q_1\, q_2 \in\ ]0,1[$, on en déduit : $U \hookrightarrow \mathcal{G}\,(1 - q_1\, q_2)$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([V \leq n]) &= \mathbb{P}([X \leq n] \cap [Y \leq n]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq n])\ \mathbb{P}([Y \leq n]) && \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\ &= (1 - q_1^n)\ (1 - q_2^n) \\ &= 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n \end{aligned}$$
Et ainsi : $\mathbb{P}([V > n]) = 1 - \mathbb{P}([V \leq n] = q_1^n + q_2^n - (q_1 q_2)^n$.
(b) La variable aléatoire V est à valeurs entières comme U, donc V vérifie la même formule que U (c'était la seule hypothèse utilisée).

(c)

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{m} n\,\mathbb{P}([V=n]) \\
= & \sum_{n=1}^{m} n\Big(\ \mathbb{P}([V>n-1]) -\ \mathbb{P}([V>n])\Big) && \text{(d'après la question précédente)} \\
= & \sum_{n=1}^{m} n\,\mathbb{P}([V>n-1]) - \sum_{n=1}^{m} n\,\mathbb{P}([V>n]) && \text{(par linéarité)} \\
= & \sum_{n=0}^{m-1} (n+1)\ \mathbb{P}([V>n]) - \sum_{n=1}^{m} n\,\mathbb{P}([V>n]) && \text{(par décalage d'indice)} \\
= & \sum_{n=0}^{m-1} n\ \mathbb{P}([V>n]) + \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V>n]) - \sum_{n=1}^{m} n\ \mathbb{P}([V>n]) \\
= & \sum_{n=1}^{m-1} n\ \mathbb{P}([V>n]) + \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V>n]) \\
& -\left(\sum_{n=1}^{m-1} n\ \mathbb{P}([V>n] + m\ \mathbb{P}([V>m])\right) \\
= & \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}([V>n]) - m\ \mathbb{P}([V>m])
\end{aligned}$$

(d) V admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{n\geq 1} n\ \mathbb{P}([V=n])$ est absolument convergente, ce qui revient à montrer la convergence puisque cette série est à termes positifs. D'après la question précédente :

$$\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{m} n\ \mathbb{P}([V=n]) = \sum_{n=0}^{m-1} q_1^n + \sum_{n=0}^{m-1} q_2^n - \sum_{n=0}^{m-1} (q_1\,q_2)^n - m\mathbb{P}([V>m])$$

Or, en reconnaissant trois sommes partielles de séries géométriques convergentes ($q_1 \in]0,1[$, $q_2 \in]0,1[$ et $q_1q_2 \in]0,1[$), on obtient :

- $\sum\limits_{n=0}^{m-1} q_1^n \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-q_1} = \dfrac{1}{p_1}$
- $\sum\limits_{n=0}^{m-1} q_2^n \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-q_2} = \dfrac{1}{p_2}$
- $\sum\limits_{n=0}^{m-1} (q_1\,q_2)^n \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-q_1\,q_2} = \dfrac{1}{p_1+p_2-p_1\,p_2}$
- $m\mathbb{P}([V>m]) = m(q_1^m + q_2^m - (q_1q_2)^m) = mq_1^m + mq_2^m - m(q_1q_2)^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

On en déduit que V admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1+p_2-p_1\,p_2}$$

$\square$

Théoreme 10 (Généralisation à n variables aléatoires ou une infinité)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. discrètes. Soit $t\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors :*

$$[\max(X_1,\dots,X_n)\leq t] = \bigcap_{k=1}^{n}\ [X_k\leq t] \qquad \textit{et} \qquad \left[\max_{k\geq 1}(X_k)\leq t\right] = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\ [X_k\leq t]$$

$$[\min(X_1,\dots,X_n)\geq t] = \bigcap_{k=1}^{n}\ [X_k\geq t] \qquad \textit{et} \qquad \left[\min_{k\geq 1}(X_k)\geq t\right] = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\ [X_k\geq t]$$

Exemple 8.

$$[\max(X_1,\dots,X_n)\geq t] = \overline{[\max(X_1,\dots,X_n)<t]} = \overline{\bigcap_{k=1}^{n}\ [X_k<t]} = \bigcup_{k=1}^{n}\ \overline{[X_k<t]} = \bigcup_{k=1}^{n}\ [X_k\geq t]$$

4 Calculs d'espérance

4.1 Cas général : espérance de $Z = g(X,Y)$

Théoreme 11 (Théorème de transfert)**.** *Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes. Alors, sous réserve de convergence absolue :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(g(X,Y)) & = & \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} g(x,y)\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \Big) \\ & = & \displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} \Big(\sum_{x\in X(\Omega)} g(x,y)\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \Big) \end{array}}$$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

1. **Si X et Y sont finies**
   Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1,\dots,y_n\}$. La v.a.r. $g(X,Y)$ admet alors une espérance donnée par :
   $$\boxed{\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])}$$
   Il n'y a jamais de problème de convergence pour les sommes finies !
2. **Si X est finie et Y infinie**
   Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j\in\mathbb{N}\}$. Si pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, la série $\sum g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ est absolument convergente alors $g(X,Y)$ admet une espérance et :
   $$\boxed{\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])}$$
   Le cas X infinie et Y finie est symétrique.
3. **Si X est infinie et Y infinie**
   Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j\in\mathbb{N}\}$. Il faut alors démontrer :
   (a) pour tout $i\in\mathbb{N}$, la série $\sum g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ est absolument convergente.
   (b) la série $\sum \left(\sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])\right)$ est absolument convergente.
   Alors $g(X,Y)$ admet une espérance donnée par :
   $$\boxed{\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])}$$

Exercice 11 : Considérons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\quad P([X=i]\cap[Y=j]) = \frac{i+j}{\mathrm{e}\ 2^{i+j}\ i!\ j!}$$

Calculer l'espérance de $Z = 2^{X+Y}$.

Démonstration. Ici, $Z = 2^{X+Y} = g(X,Y)$ pour $g : (x,y)\mapsto 2^{x+y}$. Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$. On remarque :

$$g(i,j)\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = 2^{i+j}\frac{i+j}{\mathrm{e}\ 2^{i+j}\ i!\ j!} = \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$$

On fixe $i\in\mathbb{N}$. La série $\sum \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$ est à termes positifs. Démontrer qu'elle est absolument convergente revient donc à démontrer qu'elle est convergente. Soit $N\in\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=0}^{N} \frac{(i+j)}{\mathrm{e}\ i!\,j!} & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{i}{\mathrm{e}\ i!}\ \frac{1}{j!} + \frac{1}{\mathrm{e}\ i!}\ \frac{j}{j!}\right) \\ & = & \displaystyle\frac{i}{\mathrm{e}\ i!}\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!} + \frac{1}{\mathrm{e}\ i!}\sum_{j=0}^{N}\frac{j}{j!} \end{array}$$

Or $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ et $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{j}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{j}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{(j-1)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$.

Ainsi la série $\sum \frac{i+j}{\mathrm{e}\; i!\; j!}$ est convergente de somme :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{\mathrm{e}\; i!\; j!} = \frac{i}{\mathrm{e}\; i!}\,\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}\; i!}\,\mathrm{e} = \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}$$

La série $\sum \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}$ étant à termes positifs, démontrer qu'elle est absolument convergente revient donc à démontrer qu'elle est convergente. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}\right) = \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{i!}$$

Or, comme vu précédemment : $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{i}{i!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ et $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$.

Ainsi la série $\sum \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}\right)$ est convergente et on peut alors conclure :

$$\mathbb{E}\left(2^{X+Y}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i+j}{\mathrm{e}\; i!\; j!}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}\right) = 2\mathrm{e}$$

□

4.2 Espérance d'une somme

Théoreme 12 (Linéarité de l'espérance)**.** *Soit* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$*. Soient* $X_1, \ldots, X_n$ *des v.a.r. discrètes admettant une espérance.*

1. *Alors* $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ *admet une espérance.*
2. *De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mathbb{E}(X_i)}$$

En particulier, lorsque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 1$, *on obtient :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

Exemple 9. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. discrètes, mutuellement indépendantes, telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Notons $X = X_1 + \ldots + X_n$.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = n\,p$$

Or X compte le nombre de succès dans une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On retrouve ainsi le résultat classique du cours.

4.3 Espérance d'un produit

4.3.1 Cas général

Théoreme 13. *Soit* (X, Y) *un couple de v.a.r. discrètes. On suppose que* X *et* Y *admettent chacune un moment d'ordre* 2.

1. *Alors* XY *admet une espérance.*
2. *De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\; \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

Exemple 10. On reprend aussi l'exo 1 sur le calcul de l'espérance du produit.

4.3.2 Cas de deux v.a.r. indépendantes

Théoreme 14. *Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. Si*

- *X et Y admettent une espérance.*
- *X et Y sont indépendantes.*

alors XY admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

Remarque 12. Dans le cas où X et Y sont indépendantes on utilisera ce thm. Si elles ne sont pas indépendantes, on utilisera le théorème précédent.

Exemple 11. Reprenons l'exemple de l'exo 2. Notons U (resp. V) le résultat du premier (resp. deuxième) lancer. Ces v.a.r. étant indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{E}(UV) \ = \ \mathbb{E}(U)\ \mathbb{E}(V) \ = \ \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \ = \ \frac{25}{4}$$

De plus, $X = \min(U, V)$ et $Y = \max(U, V)$. Donc :

$$XY \ = \ \min(U, V) \times \max(U, V) \ = \ UV$$

Et donc

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(UV) = \frac{25}{4}$$

On peut également faire ce calcul à l'aide de la formule de transfert. Nous avons déjà déterminé (en début de chapitre) la loi de (X, Y) :

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

X et Y admettent chacune un moment à l'ordre 2 car elles sont finies.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\
&= \sum_{i \in [\![1,4]\!]} \sum_{j \in [\![1,4]\!]} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{(i,j) \in [\![1,4]\!]^2} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,4]\!]^2 \\ i > j}} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&\quad + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,4]\!]^2 \\ i = j}} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&\quad + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,4]\!]^2 \\ i < j}} ij\ \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= 0 \ + \ \sum_{i=1}^{4} i^2\ \frac{1}{16} \ + \ \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i+1}^{4} ij\ \frac{2}{16} \\
&= \frac{1}{16} \times 30 + \frac{2}{16} \times 70 \\
&= \frac{100}{16} \\
&= \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

Méthode. Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

Exemple 12. Reprenons une nouvelle fois l'exo 2.

On peut vérifier que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{15}{8}$ et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{25}{8}$ donc $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{25}{4} \neq \dfrac{15}{8} \times \dfrac{25}{8} = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 12 : Soient X_1, X_2 et X_3 indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in \,]0,1[$. Montrer que les v.a.r. $Y_1 = X_1X_2$ et $Y_2 = X_2X_3$ ne sont pas indépendantes.

Démonstration.

- Comme X_1 et X_2 sont indépendantes et admettent une espérance, la v.a.r. $Y_1 = X_1\,X_2$ admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1\,X_2) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$$
- De même, Y_2 admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(Y_2) = \mathbb{E}(X_2\,X_3) = \mathbb{E}(X_2)\,\mathbb{E}(X_3)$$
- Comme $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, ${X_2}^2 = X_2$. Et ainsi :
$$Y_1\,Y_2 = X_1\,X_2\,X_2\,X_3 = X_1\,{X_2}^2\,X_3 = X_1\,X_2\,X_3$$
Comme X_1, X_2, X_2 sont indépendantes, par le lemme des coalitions les v.a.r. $X_1\,X_2$ et X_3 sont indépendantes. Ces deux v.a.r. admettent une espérance. On en déduit que $Y_1\,Y_2$ admet une espérance et :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1\,Y_2) &= \mathbb{E}(X_1\,X_2\,X_3) = \mathbb{E}(X_1\,X_2)\,\mathbb{E}(X_3)\\ &= \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)\,\mathbb{E}(X_3) \;=\; p^3\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1)\,\mathbb{E}(Y_2) &= \mathbb{E}(X_1\,X_2)\,\mathbb{E}(X_2\,X_3)\\ &= \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)\,\mathbb{E}(X_2)\,\mathbb{E}(X_3) \;=\; p^4\end{aligned}$$
- Or $p^3 = p^4 \iff p^3\,(p-1) = 0 \iff p = 0 \ \texttt{OU}\ p = 1$.
Ainsi, $\mathbb{E}(Y_1\,Y_2) \neq \mathbb{E}(Y_1)\,\mathbb{E}(Y_2)$ et les v.a.r. ne sont pas indépendantes. □

Remarque 13. Attention, le théorème n'est pas une équivalence. Il existe des variables alétoires X et Y telles que

- X et Y ne sont pas indépendantes
- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$

Voir exo EML 2007.

5 Calculs de variance et de covariance

5.1 Covariance

5.1.1 Définition

Definition 8. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes. On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2. La *covariance* de X et Y est définie par :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)}$$

5.1.2 Calcul en pratique

Théoreme 15 (Formule de Kœnig-Huygens)**.** *Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes. On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre* 2.

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)}$$

En particulier, on a :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{V}(X)}$$

5.1.3 Propriétés de la covariance

Théoreme 16 (Propriétés de la covariance). *Soient X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2 des v.a.r. discrètes. Supposons que ces v.a.r. admettent chacune un moment d'ordre 2. L'opérateur de covariance vérifie les propriétés suivantes.*

1. $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)}$ *(propriété de symétrie)*
2. $\boxed{\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda\ \mathrm{Cov}(X_1,Y) + \mu\ \mathrm{Cov}(X_2,Y)}$ *(linéarité à gauche)*
3. $\boxed{\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda\ \mathrm{Cov}(X,Y_1) + \mu\ \mathrm{Cov}(X,Y_2)}$ *(linéarité à droite)*
4. $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \mathrm{Cov}(X,a) = \mathrm{Cov}(a,X) = 0}$

Exemple 13. On reprend l'exo 1.

5.1.4 Une condition nécessaire d'indépendance

Théoreme 17. *Soient X et Y deux v.a.r. discrètes. On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.*

Méthode. Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de montrer que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$$

Remarque 14. Attention, le résultat n'est pas une équivalence. Si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, on ne peut rien en conclure à propos de l'éventuelle indépendance de X et Y.

5.2 Variance d'une somme

5.2.1 Cas général

Théoreme 18. *Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes. On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 (*i.e. *X et Y admettent une variance).*

1. *Alors $X+Y$ admet une variance.*
2. *De plus :* $\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\ \mathrm{Cov}(X,Y)}$

5.2.2 Variance d'une somme de v.a.r. indépendantes

Théoreme 19.

1. *Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes. On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 (*i.e. *X et Y admettent une variance). Alors la v.a.r. $X+Y$ admet une variance. De plus, si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.*
2. *Généralisation. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et :*
$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$$

Exemple 14. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. discrètes, mutuellement indépendantes, telles que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Notons $X = X_1 + \dots + X_n$.

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n) = n\,p(1-p)$$

Or X compte le nombre de succès dans une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. On retrouve ainsi le résultat classique du cours.

Exemple 15. Considérons à nouveau l'exemple de l'exo 2.

- On note U le résultat du 1^{er} dé et V le résultat du $2^{\text{ème}}$.
- On note X le minimum des résultats et Y le maximum.

1. Il s'agit de déterminer $\mathbb{V}(X+Y)$. Afin de s'épargner tout calcul, on remarque :

$$X+Y=\min(U,V)+\max(U,V)=U+V$$

Comme U et V sont indépendantes et admettent une variance :

$$\mathbb{V}(U+V) \;=\; \mathbb{V}(U)+\mathbb{V}(V) \;=\; \frac{4^2-1}{12}+\frac{4^2-1}{12}=\frac{15}{6}$$

(si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$ alors $\mathbb{V}(U)=\frac{n^2-1}{12}$)
Ainsi, $X+Y$ admet une variance qui vaut :

$$\mathbb{V}(X+Y) \;=\; \mathbb{V}(U+V) \;=\; \frac{15}{6}$$

2. Déterminons alors $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)\\ &= \frac{25}{4}-\frac{15}{8}\,\frac{25}{8}=\frac{5^2}{8^2}\end{aligned}$$

3. Déterminons alors $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$. Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2\\ &= \frac{55}{8^2}\end{aligned}$$

On peut faire de même pour $\mathbb{V}(Y)$ ou remarquer :

$$\mathbb{V}(Y) \;=\; \mathbb{V}(X+Y)-\mathbb{V}(X)-2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; \frac{15}{6}-\frac{55}{8^2}-\frac{50}{8^2} \;=\; \frac{55}{8^2}$$

5.3 Coefficient de corrélation linéaire

Definition 9. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes. On suppose que X et Y admettent des variances non nulles. Le *coefficient de corrélation linéaire de X et de Y* est :

$$\boxed{\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}}$$

Deux v.a.r. dont la covariance est nulle (et donc dont le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites *non corrélées.*

Théoreme 20. *Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes. On suppose que X et Y admettent des variances non nulles. Alors*

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\boxed{|\ \mathrm{Cov}(X,Y)\ |\ \leq\ \sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

On en déduit (reformulation) : $\boxed{|\rho(X,Y)|\leq 1}$

2. $\rho(X,Y)\;=\;1$ *ssi une des v.a.r. est une fonction affine strictement croissante de l'autre v.a.r. .*
Autrement dit, $\rho(X,Y)=1$ *ssi il existe $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que :*

$$X=a\,Y+b \qquad \texttt{OU} \qquad Y=a\,X+b$$

3. $\rho(X,Y)\;=\;-1$ *ssi une des v.a.r. est une fonction affine strictement décroissante de l'autre v.a.r. .*
Autrement dit, $\rho(X,Y)=-1$ *ssi il existe $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que :*

$$X=-a\,Y+b \qquad \texttt{OU} \qquad Y=-a\,X+b$$

Remarque 15. Les valeurs intermédiaires entre -1 et 1 renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux v.a.r. . Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les v.a.r. est forte.

Démonstration. On pose $P : t \mapsto \operatorname{Cov}(X+tY, X+tY)$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

- $P(t) = \operatorname{Cov}(X+tY, X+tY) = \mathbb{V}(X+tY) \geqslant 0$.
- $P(t) = \mathbb{V}(X) + 2t\operatorname{Cov}(X,Y) + t^2\mathbb{V}(Y)$ donc P est un trinôme du second degré ($\mathbb{V}(Y) \neq 0$ par hypothèse)

P ne peut pas admettre deux racines distinctes donc $\Delta = 4\operatorname{Cov}(X,Y)^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \leqslant 0$ donc $\operatorname{Cov}(X,Y)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$ donc $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\,\sigma(Y)$.

$$\begin{aligned}
|\rho(X,Y)| = 1 &\iff \frac{|\operatorname{Cov}(X,Y)|}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} = 1\\
&\iff |\operatorname{Cov}(X,Y)| = \sigma(X)\,\sigma(Y)\\
&\iff \operatorname{Cov}(X,Y)^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)\\
&\iff \Delta = 0\\
&\iff P \text{ admet une racine double}
\end{aligned}$$

Supposons que $\rho(X,Y) = 1$. Alors P admet une racine double et son expression est :

$$r = \frac{-2\operatorname{Cov}(X,Y)}{2\mathbb{V}(Y)} = -\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(Y)} = -\frac{\sigma(X)\sigma(Y)}{\mathbb{V}(Y)} < 0$$

On a alors $P(r) = \mathbb{V}(X+rY) = 0$. Donc $X + rY$ est une variable constante et donc il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que $X + rY = b$. D'où $X = -rY + b$. On pose $a = -r > 0$ d'où le résultat.

Réciproque : si $X = aY + b$ avec $a > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\operatorname{Cov}(aY+b,Y)}{\sigma(aY+B)\sigma(Y)}\\
&= \frac{a\operatorname{Cov}(Y,Y) + \operatorname{Cov}(b,Y)}{|a|\,\sigma(Y)\sigma(Y)}\\
&= \frac{a\mathbb{V}(Y)}{a\mathbb{V}(Y)} && \textit{(car } a > 0\textit{)}\\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Exemple 16. On reprend l'exemple de l'exo 2.

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = \frac{\frac{25}{8^2}}{\sqrt{\frac{55}{8^2}}\sqrt{\frac{55}{8^2}}} = \frac{25}{8^2}\,\frac{8^2}{55} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$$