On lance indéfiniment une pièce de monnaie qui tombe sur `Pile` avec probabilité $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

- On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

  P_k : « la pièce tombe sur `Pile` au k^e lancer »
  F_k : « la pièce tombe sur `Face` au k^e lancer »

- On note T la variable aléatoire égale au rang du premier `Face` et on pose $U = T - 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à la longueur de la plus grande séquence de `Pile` consécutifs parmi les n premiers lancers ou égale à 0 si il n'y a aucun `Pile`. Par convention, on pose $X_0 = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note $X_n^{(\ell)}$ la variable aléatoire égale à la longueur de la plus grande séquence de `Pile` consécutifs parmi les lancers numéros $\ell+1, \ell+2, \ldots, \ell+n$. Cette notation généralise la précédente, au sens où $X_n = X_n^{(0)}$. Par convention, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $X_0^{(\ell)} = 0$.

Exemple : si l'issue est $\omega = (\texttt{Pile}, \texttt{Pile}, \texttt{Face}, \texttt{Pile}, \texttt{Pile}, \texttt{Pile}, \ldots)$, alors $T(\omega) = 3$, $U(\omega) = 2$, $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 2$, $X_3(\omega) = 2$, $X_4(\omega) = 2$, $X_5(\omega) = 2$, $X_6(\omega) = 3$, $X_1^{(1)}(\omega) = 1$, $X_2^{(1)}(\omega) = 1$, $X_3^{(1)}(\omega) = 1$, $X_4^{(1)}(\omega) = 2$, $X_5^{(1)}(\omega) = 3$.

Partie A : Etude des variables aléatoires T et U

1. Reconnaître la loi de T. Donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de U et calculer son espérance et sa variance. Donner une interprétation de la variable U en une phrase.

Partie B : Etude des variables aléatoires X_1 et X_2 et X_3

3. Reconnaître les lois de X_1 et X_2.
4. (a) Démontrer que la loi de X_3 est donnée par le tableau :

$x \in X_3(\Omega)$	0	1	2	3
$\mathbb{P}([X_3 = x])$	$(1-p)^3$	$p(1-p)(3-2p)$	$2p^2(1-p)$	p^3

   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_3)$. En considérant qu'il s'agit d'un polynôme en p, en donner une expression entièrement factorisée et qui ne dépend que de p.

   (c) Calculer $\lim\limits_{p \to 0} \mathbb{E}(X_3)$ et $\lim\limits_{p \to 1} \mathbb{E}(X_3)$. Interpréter les résultats.

Partie C : Quelques valeurs extrémales dans le cas général

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $X_n(\Omega)$. On justifiera le résultat de manière concise.
6. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = 0])$.
7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = n])$.
8. (*) Soit $n \geqslant 2$.

   (a) Montrer que, si $j \geqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, alors on ne peut pas trouver au cours des n premiers lancers une séquence de `Pile` consécutifs qui soit de longueur exactement j et une autre séquence de `Pile` consécutifs qui soit de longueur supérieure ou égale à j.

   (b) En déduire que, pour tout $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant j \leqslant n-1$, $\mathbb{P}([X_n = j]) = 2p^j q + (n-j-1)p^j q^2$.
9. Soient n et m deux entiers tels que $m > n \geqslant 1$. Les variables aléatoires X_n et X_m sont-elles indépendantes ?

Partie D : Calcul de $\mathbb{P}([X_n \leqslant 1])$ puis de $\mathbb{P}([X_n = 1])$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathbb{P}([X_n \leqslant 1])$ et $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$.

10. Soit $n \geqslant 2$.

   (a) Montrer que

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant 1]) = \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = 0]) + \mathbb{P}([X_n \leqslant 1] \cap [U = 1])$$

(b) Exprimer l'événement $[X_n \leqslant 1] \cap [U = 0]$ à l'aide de la variable aléatoire $X_{n-1}^{(1)}$, puis l'événement $[X_n \leqslant 1] \cap [U = 1]$ à l'aide de la variable aléatoire $X_{n-2}^{(2)}$.

(c) En déduire que

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant 1]) = q\mathbb{P}([X_{n-1} \leqslant 1]) + pq\mathbb{P}([X_{n-2} \leqslant 1])$$

(on remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, X_n et $X_n^{(\ell)}$ suivent la même loi)

11. (a) En déduire qu'il existe $r_1 > r_2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

On explicitera r_1 et r_2 en fonction de q et $\Delta = q(1 + 3p)$ mais on n'explicitera pas λ et μ.

(b) Déterminer A et B en fonction de λ, μ, r_1 et r_2 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}$$

(c) Montrer que $(r_1^2 - r_1^3)A + (r_2^2 - r_2^3)B = 0$.

(d) (*) Montrer que $r_1^2 - r_1^3 = r_2^2 - r_2^3 = p^2 q$

(Indication : on pourra utiliser la définition de r_i comme racine d'un certain polynôme puis exprimer r_i^2 et r_i^3 en fonction de r_i)

(e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2})$$

12. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}) - q^n$$

(b) Montrer que $|r_2| \leqslant |r_1|$ puis que $|r_1| < 1$.

(c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Interpréter en une phrase.

Partie E : Généralisation au calcul de $\mathbb{P}([X_n \leqslant j])$ puis de $\mathbb{P}([X_n = j])$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $v_n^{(j)} = \mathbb{P}([X_n \leqslant j])$ et $u_n^{(j)} = \mathbb{P}([X_n = j])$.

13. (*) Soit $n \geqslant 1$ et soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. En s'inspirant de la question 10, démontrer que

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant j]) = \sum_{i=0}^{j} qp^i \mathbb{P}([X_{n-i-1} \leqslant j])$$

14. (a) (*) En déduire que, pour tout $j \geqslant 0$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$v_{n+j+1}^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} qp^{j-i} v_{n+i}^{(j)}$$

(b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Préciser les valeurs des $j + 1$ premiers termes de la suite $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Ainsi, on a montré que la suite $\left(v_n^{(j)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $j + 1$.

15. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

16. (a) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^{(j)} = 0$.

(b) En déduire que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} [X_n \leqslant j]\right) = 0$ puis que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{j=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} [X_n \leqslant j]\right) = 0$. Interpréter.

17. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $u_n^{(j)}$ en fonction de $v_n^{(j)}$ et $v_n^{(j-1)}$.

(b) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{(j)} = 0$.

(c) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi vers une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$?

Partie F : Simulation informatique

18. On importe la bibliothèque `numpy.random as rd`. On rappelle que la commande `rd.binomial(n,p,d)` renvoie un vecteur contenant d simulations indépendantes de la loi binomiale de paramètres n et p. Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il simule la variable aléatoire X_n (on codera les `Pile` par des 1 et les `Face` par des 0).

```
def SimulX(n,p):
    L = _______________________ #vecteur contenant les résultats des n lancers
    m = 0 #contiendra la longueur maximale de toutes les séquences de Pile
    l = 0 #contiendra la longueur de la séquence en cours
    for k in range(n):
        if L[k]==1:
            l = l + 1
        else:
            if l > m:
                ________
            l = _____
    if l > m:
        ________
    return m
```

On supposera pour la suite des simulations que $p = \frac{1}{2}$.

20. Compléter le programme suivant pour qu'il prenne en argument un entier naturel n et renvoie la matrice

$$V_n = \begin{pmatrix} v_0^{(0)} & v_1^{(0)} & v_2^{(0)} & \cdots\cdots & v_n^{(0)} \\ v_0^{(1)} & v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \cdots\cdots & v_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0^{(n)} & v_1^{(n)} & v_2^{(n)} & \cdots\cdots & v_n^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

```
def CalculV(n):
    V = np.zeros([n+1,n+1]) #crée la matrice V_n, initialement remplie de zéros
    for j in range(n+1):
        for i in range(j+1):
            V[j,i]= _____
        for i in range(j+1,n+1):
            for k in range(j+1):
                V[j,i] = ________________________________________
    return V
```

21. Compléter le programme suivant pour qu'il prenne en argument un entier naturel n et renvoie la matrice

$$U_n = \begin{pmatrix} u_0^{(0)} & u_1^{(0)} & u_2^{(0)} & \cdots\cdots & u_n^{(0)} \\ u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots\cdots & u_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots\cdots & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

```
def calculU(n):
    V = CalculV(n)
    U = np.zeros([n+1,n+1])
    for i in range(n+1):
        U[0,i] = __________
    for j in range(1,n+1):
        for i in range(n+1):
            U[j,i] = ____________________
    return U
```

22. Pour la curiosité, on affiche l'histogramme en fréquence des lois de X_5, X_{10}, X_{20} et X_{40}, ainsi que le tracé des suites $\left(u_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour quelques valeurs de j.

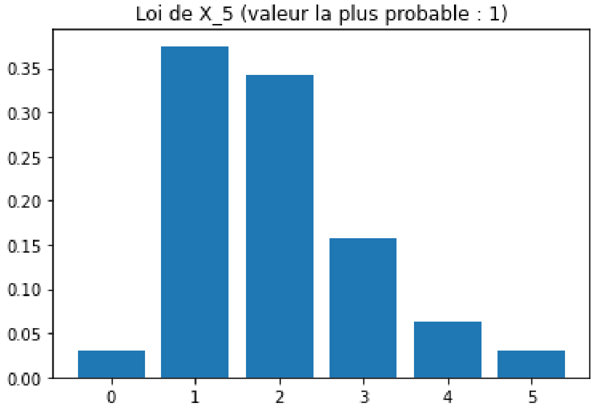

FIGURE 1 – Loi de X_5

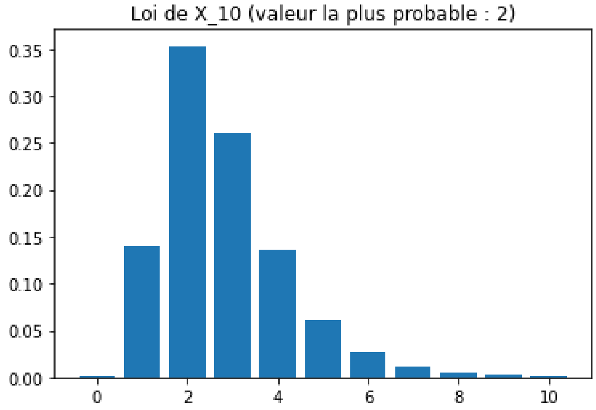

FIGURE 2 – Loi de X_{10}

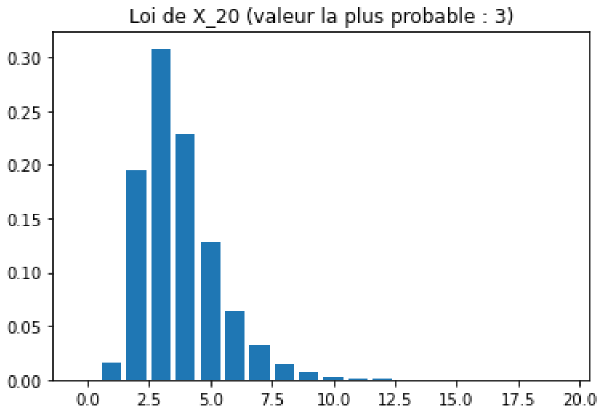

FIGURE 3 – Loi de X_{20}

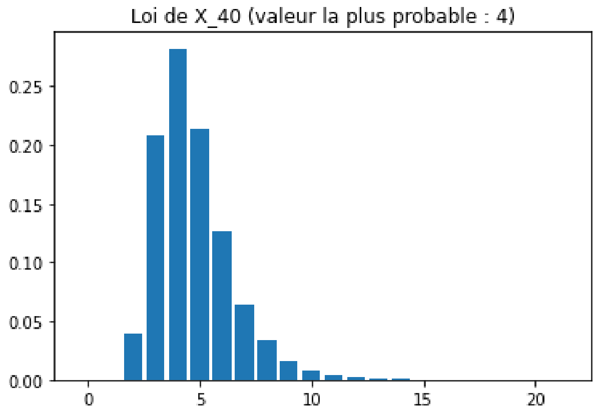

FIGURE 4 – Loi de X_{40}

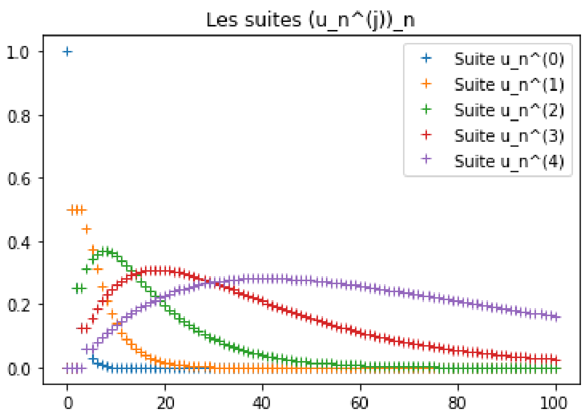

FIGURE 5 – Tracé de quelques suites $\left(u_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

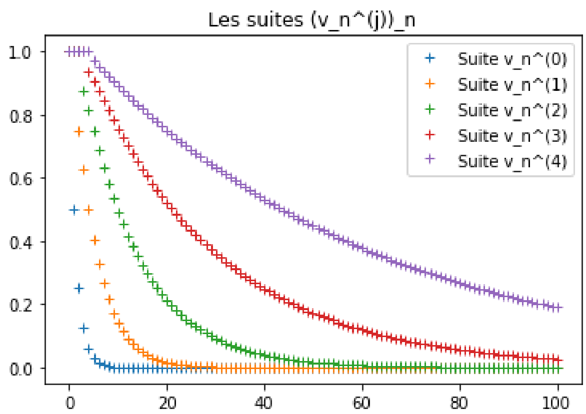

FIGURE 6 – Tracé de quelques suites $\left(v_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$