DS2 (version A) - Commentaires

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.random as rd`

Commentaire

Il ne faut pas me rendre le sujet avec votre copie. Les exercices doivent être classés dans le bon ordre.

Exercice 1 (Inspiré Oral ESCP 2018)

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \ = \ \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Commentaire

Il y a encore trop de récurrences mal rédigées. Il y a un modèle de rédaction à apprendre par coeur.

2. Écrire une fonction **Python** `suiteV(n,a)` qui, prenant en argument un entier naturel n et un réel a jouant le rôle de u_0, renvoie le nombre v_n.

Commentaire

J'ai opté pour une notation très généreuse, même si votre code n'avait que peu de sens dans sa globalité.

3. a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

Commentaire

Ecrire que « le terme général tend vers 0 donc la série converge » démontre que votre travail est resté très superficiel sur le chapitre « Séries » et mettra immanquablement votre correcteur de très mauvaise humeur. C'est certainement la plus grosse erreur à ne pas faire sur ce chapitre (si ce résultat était vrai, on ne ferait pas ce chapitre).

b) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$.

Commentaire

Il faut perdre cette fâcheuse habitude d'inventer un thm qui donnerait la réponse à la question. En l'occurrence, il n'existe pas de thm affirmant que « toute série télescopique converge ». Contre-exemple : la série $\sum (2^{n+1} - 2^n)$ diverge (grossièrement).

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell \ = \ \sigma + v_0$$

4. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n).

b) (i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

(ii) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Commentaire

Il faut remarquer ce genre de questions à la lecture de l'énoncé et les traiter même si vous avez bloqué sur les questions précédentes. C'est ici une conséquence presque immédiate de la question précédente et du thm de comparaison (à ne pas confondre avec le thm d'encadrement, ou avec le critère de comparaison sur les SATP).

Partie II : Approximation de σ

6. ***a)*** Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Commentaire

Il s'agit d'une question de cours (argument de concavité). Tout le monde devrait traiter cette question en théorie. En pratique, plein d'élèves passent à côté, ce qui démontre de mauvaises capacités de gestion du temps et/ou de lecture globale de l'énoncé (vous devez balayer l'exo en entier avant d'abandonner).

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

7. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sigma - \left(- \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

8. Écrire une fonction **Python** `approx(eps)` qui, prenant en argument un réel `eps` strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à `eps` près.

Exercice 2 (Inspiré EML 2013)

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. ***a)*** Calculer $(A - 2\,I)\ (A + 2\,I)\ (A - I)$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Commentaire

Il n'y a vraiment aucune raison d'écrire des équivalences dans cette question.

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = 2 \cdot X\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & & & + & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right.$.

b) Déterminer $E_2(A)$.

Commentaire

Il faut cesser d'écrire des produits matriciels à l'envers. L'ordre est important dans les produits de matrices. En particulier, il faut écrire $(A-2I)X$ et non pas $X(A-2I)$.

c) En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$.

3. Déterminer de même une base de $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$, espaces vectoriels définis par :

$$E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = X\} \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,X = -2X\}$$

4. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.

5. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

6. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

7. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :

$$M \in C_A \ \Leftrightarrow \ N \in C_D$$

8. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

9. En déduire :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

10. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Commentaire

La connaissance du chapitre « Espaces vectoriels » ne doit pas s'arrêter aux familles de vecteurs colonnes. Il faut être capable de manipuler également des familles de vecteurs lignes, de polynômes ou de matrices (pour montrer leur caractère générateur ou leur liberté).

Exercice 3 (EDHEC 2004)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ et face également avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. ***a)*** Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.

b) Démontrer : $\mathbb{P}\big([Z=0] \big) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) Pour tout k de $Z(\Omega) \setminus \{0\}$, démontrer : $\mathbb{P}\big([Z=k] \big) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

d) Vérifier : $\sum\limits_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) = 1$.

> **Commentaire**
>
> Attention, pour cette question il est attendu un calcul explicite de somme, et non pas un argument de système complet d'événements. Ce n'est pas forcément très clair au vu de la formulation (contrairement à la question ***5*** où c'est mieux formulé) mais il faut savoir que c'est une question classique sur ce genre d'exercices. Ne vous faites plus avoir !

e) On rappelle que l'instruction `rd.binomial(1,0.5)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
n = int(input(' Entrez un entier n : '))
Z = 0
k = 1
lancer = rd.binomial(1,0.5)
while lancer == 0 and k <= n:
    k = k+1
    lancer = rd.binomial(1,0.5)
if k != n+1:
    Z = ...
print(Z)
```

On dispose de $n+1$ urnes U_0, U_1, ..., U_n telles que pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- × si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geqslant 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à lissue de ces tirages,
- × si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

> **Commentaire**
>
> Il faut réfléchir aux différentes variables apparaissant dans les énoncés des exos de proba. Sont-elles libres ou liées ? Il est possible de faire un tableau ou brouillon pour les classer selon ces deux catégories. Dans cet énoncé, n est libre, tandis que k est liée. Ainsi, les ensembles images (comme $X(\Omega)$) ne peuvent pas dépendre de k, cela n'a tout simplement aucun sens. Ils peuvent par contre dépendre de n.

3. ***a)*** Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i])$?
On distinguera les cas $i=0$ et $1 \leqslant i \leqslant n$.

Commentaire

La notation ${}_BA$ n'a aucun sens (elle n'a pas été définie dans le cours, contrairement à la notation $\mathbb{P}_B(A)$). Il est interdit de manipuler cette notation et de parler d'un événement conditionné par un autre. On peut parler de « probabilité conditionnelle » (vu dans le chapitre de révisions sur les probabilités générales) et on peut également parler de « loi conditionnelle » (on verra cette notion dans le chapitre sur les couples de v.a.r. discrètes).
Plutôt que de parler de ${}_BA$ (qui n'a pas de sens), on manipulera $A \cap B$ (qui a un sens). Par exemple, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on remarque que $[Z=0] \cap [X=i] = \varnothing$ et donc $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i]) = 0$.

b) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=i])$?
On distinguera les cas $i = n$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

c) Démontrer, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commentaire

Attention à l'argument du nombre de boules blanches pour justifier que l'on ne peut pas piocher plus de k boules blanches. Cet argument serait valable en cas de tirages sans remises. Or, dans cette expérience, les tirages se font avec remise! On peut imaginer une urne contenant une seule boule blanche. Si je fais 10 tirages, alors je peux tout à fait tirer 10 boules blanches. On voit que la donnée importante ici, c'est en fait le nombre de tirages effectués.
Il fallait donc expliquer que l'on fait k tirages en tout (on a supposé que $[Z=k]$ est réalisé) et donc qu'on ne peut pas obtenir plus de k boules blanches.

4. ***a)*** Montrer : $\mathbb{P}([X=0]) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^k + \dfrac{1}{2^n}$.

Commentaire

Dans cette question, on applique la FPT, ce qui amène à faire un calcul de somme. Il faut faire très attention quand on remplace les termes de la somme par des formules explicites. Il faut se poser la question de leur domaine de validité.
Ici, on a : $\mathbb{P}([X=0]) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0])$ et on ne peut pas remplacer $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0])$ par une même formule quelque soit la valeur de k (idem pour $\mathbb{P}([Z=k])$, la formule est différente pour $k=0$). Il faut donc séparer la somme en plusieurs morceaux (qui correspondent aux domaines de validité des différentes formules trouvées aux questions ***3.a)***, ***3.b)*** et ***3.c)***). On utilise la relation de Chasles pour faire ce découpage.

b) Montrer : $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{2^n}$.

c) Démontrer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$: $\mathbb{P}([X=i]) = \sum\limits_{k=i}^{n-1} \dbinom{k}{i} \left(\dfrac{k}{2n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{2n}\right)^{k-i}$.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = 1$.

Problème (EDHEC 2003)

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties.
Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie ».
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}(E_{n+1}) \;=\; \frac{2}{3}\,\mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(F_n)$$

Commentaire

J'ai noté très sec sur cette question. Beaucoup ont appliqué la FPT avec une famille d'événements qui n'était pas un SCE. J'ai mis 0 points à la question même si la suite était pertinente. Vous devez vérifier vos affirmations avec plus de rigueur et ne pas vous contenter d'un « j'obtiens la formule de l'énoncé en faisant comme cela, donc ça doit être vrai » qui n'est pas sérieux.
Comme dit l'adage : « On peut avoir raison pour de mauvaises raisons ».

b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $\mathbb{P}(F_{n+1})$, $\mathbb{P}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}(H_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = M\,U_n$, où $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2. a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}MP$.

Commentaire

Je vous conseille de ne jamais faire de produits matriciels avec des matrices dont les coefficients sont des fractions. C'est l'assurance de faire une erreur de calcul. Pour se ramener à une matrice à coefficients entiers, il suffit de factoriser par la bonne fraction. Attention à ne pas oublier ce facteur à la toute fin du calcul.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. ***a)*** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2$, $U_n = M^{n-2}\, U_2$.

c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ème}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.

b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

a) Calculer $\mathbb{P}([S_n = 2])$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([S_n = n])$.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de n.